

3. ADDITION DE LIPONOMBRES

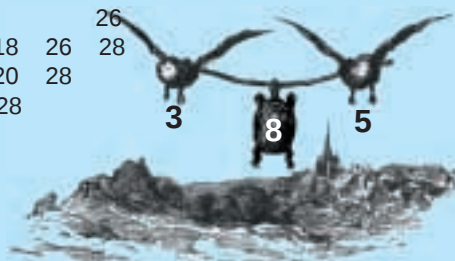
Les seuls liponombres (nombres qui ne comportent pas de "e" dans leur écriture en toutes lettres) inférieurs à un million sont : un, trois, cinq, six, huit, dix, dix-huit, vingt, vingt-trois, vingt-cinq, vingt-six, vingt-huit.

Voici leur table d'addition :

	1	3	5	6	8	10	18	20	23	25	26	28
1				6						26		
3				6	8				23	26	28	
5		6	8	10			23	25	28			
6								26				
8							18	26	28			
10								20	28			
18												
20												
23												
25												
26												
28												

Le résultat d'une série d'opérations dépend de l'ordre dans lequel on les effectue, autrement dit l'addition des liponombres n'est pas associative. Pour calculer "dix plus huit plus cinq", on peut calculer d'abord "dix plus huit", qui vaut dix-huit, puis ajouter cinq pour obtenir vingt-trois. Mais si l'on commence par calculer "huit plus cinq" le résultat intermédiaire n'est pas un liponombre, et l'on ne peut donc pas terminer le calcul. Dans l'ensemble des liponombres, $(10 + 8) + 5 = 23$, mais $10 + (8 + 5)$ n'est pas défini. Quand on fait la somme de trois nombres, dans certains cas aucune somme partielle de deux des trois nombres ne donne un liponombre, bien que la somme globale en soit un. Voici quelques exemples :

- un plus un plus un font trois,
- trois plus un plus un font cinq,
- dix-huit plus six plus un font vingt-cinq,
- vingt-trois plus un plus un font vingt-cinq,
- vingt-six plus un plus un font vingt-huit.



lipogramme de Georges Perec (publié dans l'ouvrage collectif OULIPO *La Littérature Potentielle*, Ed. Gallimard, 1973).

Venons-en aux découvertes remarquables faites il y a quelques mois par Nicolas Graner :

- il y a exactement 512 233 nombres premiers sans «e» (nous dirons lipopremiers), pas un de plus, pas un de moins !
- le plus grand lipopremier est : vingt-huit quintillions vingt-huit quadrillions vingt-huit trillions vingt-huit billions vingt-six milliards huit millions trois, soit : 28 000 028 000 028 000 028 000 003.

La justification de ces affirmations que nous allons détailler maintenant se fonde sur quelques raisonnements combinatoires amusants. Qu'est-ce qu'un liponombre et un lipopremier ? Pour cela, nous allons examiner l'écriture en toutes lettres d'un nombre.

ÉCRITURE DES NOMBRES EN FRANÇAIS

La question n'est pas simple. En effet, lorsque l'on traite de nombres dont le nom ne comporte pas de «e», il faut préciser de quel nom il s'agit, car tout nombre peut

s'écrire en toutes lettres de plusieurs façons en français. Le nombre *huit* (lipogramme en «e», «a» et «o») est aussi *quatre plus quatre* (lipogramme en «i» et «o»), *dix moins deux* (lipogramme en «a»), *cinq plus trois* (lipogramme en «a» et «e»), *deux plus six* (lipogramme en «a» et «o»), deux à la puissance trois, ou enfin «le nombre qui s'écrit un-zéro-zéro-zéro en base deux», etc. Chaque nombre peut bien sûr s'écrire d'une infinité de façons différentes (huit, par exemple, s'écrit : neuf moins un, dix moins deux, onze moins trois, etc.)

En écrivant n sous la forme «un plus un plus ... plus un» (n fois «un»), on obtient toujours une écriture lipogrammatique du nombre n en «e», «o» et «a». On établit ainsi que tout nombre est un lipogramme en n'importe quelle lettre.

Nous examinerons les liponombres, en nous référant à une définition normalisée qui donnera un nom officiel à chaque entier et nous ne nous intéresserons plus qu'aux lipogrammes en «e» (les plus difficiles, puisque «e» est la lettre la plus fréquente en français), que nous appellerons simplement liponombres.

Pour les nombres jusqu'à 10^{12} , c'est-à-dire mille milliards, l'orthographe française propose une écriture que nous adopterons comme base et qui fixe la notation officielle recherchée. Le nombre 32 644 255 232 628 s'écrit trente-deux mille six cent quarante-quatre milliards deux cent cinquante-cinq millions deux cent trente-deux mille six cent vingt-huit.

Pour les nombres au-delà de 10^{12} , différents systèmes ont été proposés, et le mieux est de s'en tenir à un texte officiel. Nicolas Graner a eu quelques difficultés à dénicher un tel texte, mais, il y a deux mois, il en a découvert un qui propose une norme pour l'écriture des grands nombres. Il s'agit d'une note annexée au décret n° 61-501 du 3 mai 1961 relatif aux unités de mesure et au contrôle des instruments de mesure (*Journal officiel* du 20 mai 1961) modifié par les décrets n° 75-1200 du 4/12/1975 et n° 82-203 du 26/2/1982. Cette note stipule : «Énoncé des très grands nombres. Pour énoncer les puissances de 10, à partir de 10^{12} , on applique la règle exprimée par la formule : $10^{6N} = N$ -illion. Exemples : $10^{12} =$ billion, $10^{18} =$ trillion, $10^{24} =$ quadrillion, $10^{30} =$ quintillion, $10^{36} =$ sextillion, etc.»

L'usage du etc. final est assez troublant dans un texte réglementaire et laisse indécise la question d'une nomenclature exhaustive : quels mots doivent être autorisés ? Pour lever cette énigme, adressons-nous donc aux dictionnaires. Celui de l'Académie française, dont aucune nouvelle version n'a paru depuis le texte de 1961, ne peut servir de référence. Nous utiliserons donc un dictionnaire disponible, et régulièrement mis à jour, le *Petit Robert*, et nous nous en tiendrons strictement à la terminologie qu'il mentionne. Il se trouve que les termes pour désigner des puissances de dix au-delà du milliard (bien sûr présent dans tous les dictionnaires français) qui possèdent une entrée dans le *Petit Robert* correspondent à ceux de l'article de 1961 : billion, trillion, quadrillion, quintillion, sextillion.

Nous adopterons donc la convention de 1961 en ne retenant que les termes qui y sont explicitement mentionnés. Plus loin, nous envisagerons ce que deviendraient les résultats de Nicolas Graner lorsqu'on étend ce vocabulaire de base.

Il faut remarquer que les termes de milliard, trillion (parfois utilisés en français) ne pourront donc pas être employés dans un liponombre ou un lipopremier. Notons aussi que le terme de quadrillion (parfois utilisé) a été éliminé au profit de sextillion.

En résumé, pour traiter notre problème des liponombres (sans «e»), les

seuls termes utilisés pour désigner des nombres supérieurs à mille que nous nous autoriserons seront : million (10^6), milliard (10^9), billion (10^{12}), trillion (10^{18}), quadrillion (10^{24}), quintillion (10^{30}) et sextillion (10^{36}).

Les nombres supérieurs à un sextillion devront être désignés sous la forme «mille sextillions», «dix mille millions de sextillions», «un sextillion de sextillions», «un sextillion de sextillions de sextillions», etc.

Plus généralement, pour un nombre très grand, on obtiendra son écriture canonique en le séparant en tranches de 36 chiffres, chacune étant décomposée en tranches de 6 chiffres. Par exemple, le nombre : 12 123456 000000 000000 000000 000000 000000 000000 001032 000067 s'écrira en écriture canonique : douze sextillions de sextillions de sextillions (première tranche) cent vingt-trois mille quatre cent cinquante-six quintillions de sextillions (deuxième tranche) deux quintillions trois quadrillions un milliard trente-deux millions soixante-sept (troisième tranche).

UNE SEULE LETTRE VOUS MANQUE ET TOUT EST DÉPEUPLÉ

Étudions les liponombres. En examinant un à un les nombres compris entre un et vingt pour éliminer ceux qui contiennent un «e», on découvre huit liponombres : un, trois, cinq, six, huit, dix, dix-huit, vingt. Ensuite, de vingt et un à vingt-neuf, on découvre quatre nouveaux liponombres : vingt-trois, vingt-cinq, vingt-six, vingt-huit. Nous avons donc douze liponombres inférieurs à trente, que nous appellerons liponombres de base : un, trois, cinq, six, huit, dix, dix-huit, vingt, vingt-trois, vingt-cinq, vingt-six, vingt-huit.

Entre trente et soixante-dix-neuf, on ne découvre aucun nouveau liponombre, car tous les nombres contiennent un mot se terminant par «ente» ou «ante». Tous les nombres des deux dizaines suivantes, qui commencent par «quatre-vingts», sont aussi à éliminer. Remarquons que la nomenclature belge ou suisse avec ces septante, octante ou huitante, nonante ne change rien à la liste des liponombres. Entre cent et neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, tous les nombres contiennent le mot «cent», donc là encore pas de nouveaux liponombres. De mille à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf, chaque nombre contient le mot «mille», et donc pas de liponombres. Entre un et un million, notre collection se limite aux douze liponombres de base.

Ensuite les noms de grands nombres vont précédemment utilisés. Seul sex-

4. CHUQUET, L'ÉCHELLE COURTE ET L'ÉCHELLE LONGUE

Le mot million provient de l'italien *millione* ; il est apparu en France vers 1270. L'invention d'une terminologie allant au-delà est due à Nicolas Chuquet, qui rédigea un opuscule à Lyon en 1484 où il proposait d'ajouter au million (pour 10^6) les mots byllion (pour 10^{12}), tryllion (pour 10^{18}), quadryllion (pour 10^{24}), quyllion (pour 10^{30}), sixlion (pour 10^{36}), septyllion (pour 10^{42}), octyllion (pour 10^{48}) et nonyllion (pour 10^{54}). En termes modernes, un N-illion vaut 10^{6N} . C'est ce qu'on dénomme l'échelle longue.

Malheureusement, au XVII^e siècle, des grammairiens peu sensibles à la cohérence et à l'esthétique du système de Chuquet proposèrent d'autres définitions des mots introduits par Chuquet (dont l'orthographe évolua légèrement). Le principe de cette échelle courte n'est plus de sauter de 6 en 6, mais de 3 en 3, autrement dit de considérer qu'un billion vaut 10^9 (un billion = un milliard), un trillion vaut 10^{12} , etc. (un N-illion vaut 10^{3N+3}).

Depuis, une dangereuse confusion règne, et cela d'autant plus que, selon les pays, l'usage a retenu soit l'échelle longue de Chuquet, 10^{6N} , soit l'échelle courte 10^{3N+3} . Même en langue anglaise, l'accord est incertain : l'échelle courte a été adoptée aux États-Unis, alors que l'échelle longue a la faveur des Britanniques.

La neuvième Conférence générale des poids et mesures de 1948 a recommandé d'employer l'échelle longue. La *Grande Encyclopédie Larousse* se conforme à cette recommandation, ainsi que le texte réglementaire de 1961, repéré par N. Graner. Pour des raisons à la fois historiques, esthétiques, légales et en respect à la recommandation de la Conférence des poids et mesures de 1948, on doit donc retenir aujourd'hui l'échelle longue. C'est ce qu'a fait Nicolas Graner pour déterminer les lipopremiers. Signalons que, concernant le mot milliard (qui ne fait pas partie du système de Chuquet), tous les utilisateurs s'accordent pour lui attribuer la valeur 10^9 ; aucun risque n'est donc impliqué par l'usage de ce mot.

tion comporte un «e», et donc il nous reste : million, milliard, billion, trillion, quadrillion, quintillion.

Les noms des nombres plus grands qu'un sextillion contiennent tous le mot «sextillion» et ne sont pas des liponombres, d'où le premier résultat de Nicolas Graner : le nombre des liponombres est fini.

COMBIEN DE LIPONOMBRES?

Nous allons compter les liponombres, en examinant comment se combinent les douze liponombres de base avec les six noms de grands nombres. Un liponombre typique est : trois quintillions vingt-six quadrillions huit trillions six billions vingt milliards cinq millions trois. Plus généralement, tous les liponombres sont de la forme : C1 quintillion(s) C2 quadrillion(s) C3 trillion(s) C4 billion(s) C5 milliard(s) C6 million(s) C7, où chacun des nombres C1, C2, ..., C7 est, soit l'un des douze liponombres de base, soit zéro, auquel cas ce nombre et le nom qui le suit sont supprimés de l'écriture en toutes lettres.

Remarquons que C1, C2, ..., C7 ne peuvent être tous nuls (sinon, le nombre obtenu serait zéro, qui contient un «e»). On désigne donc sans ambiguïté un liponombre par la donnée de sept nombres

C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 que nous nommerons ses «composantes» et dont chacune est l'une des treize valeurs 0, 1, 3, 5, 6, 8, 10, 18, 20, 23, 25, 26 ou 28. On en déduit que :

- le plus grand liponombre existant a pour composantes 28, 28, 28, 28, 28, 28, 28 ce qui donne : vingt-huit quintillions vingt-huit quadrillions vingt-huit trillions vingt-huit billions vingt-huit milliards vingt-huit millions vingt-huit, ou, en écriture décimale habituelle : 28 000 028 000 028 000 028 028 028 000 028.

- le liponombre ayant le nom le plus long s'obtient à partir du précédent, celui-ci en remplaçant tous les huit par des trois.

- le liponombre le plus petit, c'est évidemment «un», qui est aussi celui dont le nom est le plus court.

La caractérisation des liponombres par leurs composantes conduit à leur dénombrement précis. Puisque chacune des sept composantes peut prendre treize valeurs, le nombre de combinaisons possibles est 13^7 , auquel il faut retrancher un (pour le cas où toutes les composantes sont nulles). Il existe donc en tout $13^7 - 1$ soit 62 748 516 liponombres.

Nous sommes maintenant armés pour aborder le problème des liponombres premiers ou lipopremiers. Comme chacun le sait, un nombre premier est un nombre qui n'est divisible que par un et par lui-même, comme 2, 3, 5, 7, 11, 13. Euclide



5. LES NOMS PROPOSÉS PAR J. H. CONWAY

Le célèbre mathématicien John Conway (à gauche) et le linguiste Allan Wechsler ont soigneusement mis au point un système qui permet de nommer les N-illions au-delà de $N = 9$, ce qui prolonge donc le système de Chuquet.

Ce système attribue un nom normalisé (en anglais, mais aussi en français, car l'adaptation est immédiate) à toutes les puissances de 10 de la forme 10^{6k} , et donc à tous les entiers.

On traite d'abord le cas où $9 < N \leq 999$ en utilisant le tableau suivant :

UNITÉS	DIZAINES	CENTAINES
1 un	(n)deci	(n)(x)centi
2 duo	(n)vinginti	(n)ducenti
3 tre	(n)(s)triginta	(n)(s)trecenti
4 quattuor	(n)(s)quadrīginta	(n)(s)quadrīginti
5 quīnqua	(n)(s)quīnquaginta	(n)(s)quīngenti
6 se	(n)sexaginta	(n)sescenti
7 septe	(n)septuaginta	(n)septingenti
8 octo	(m)(x)octoginta	(m)(x)octingenti
9 nove	nonaginta	nongenti

– *tre* devient *tres* et *se* devient *ses* devant les mots précédés d'un (s) : exemple *trestrecenti*

– *se* devient *sex* devant les mots précédés d'un (x)

– *septe* et *nove* deviennent *septem* et *novem* devant les mots précédés d'un (m)

– *septe* et *nove* deviennent *septen* et *noven* devant les mots précédés d'un (n)

Un 543-illion = $10^{543 \times 6}$ s'appelle ainsi un tresquadrīgintaquīngentillion.

Pour un N au-delà de mille, le N-illion s'obtient : (i) en séparant les chiffres de N par tranches de 3 (exemple : 81 000 000 321) ; (ii) en juxtaposant les noms donnés par le tableau ci-dessus ; (iii) en remplaçant illion par illi tant qu'on n'est pas au bout ; (iv) en utilisant nilli pour 0 quand c'est nécessaire.

Ainsi, un 81 000 000 321-illion = $10^{6 \times 81000000321}$ est donc un unoctogintillillinillillinunvigintitrecentillion.

Le nombre d'Archimède $10^{8 \times 10^8} = 10^{800000000} = 100 \times 10^6 \times 133\ 333\ 333$ est donc : cent tetrīgintacentillitetrīgintatrecentillitetrīgintatrecentillion.

nous a appris qu'il existe une infinité de nombres premiers, mais combien existe-t-il de lipopremiers ?

NOMBRE DE LIPOPREMIERS

Puisqu'il n'existe qu'une soixantaine de millions de liponombres en tout, il serait possible, avec un ordinateur de bureau, de les tester un par un pour trouver lesquels sont premiers. Il est plus amusant d'éliminer d'emblée ceux dont on voit facilement qu'ils ne peuvent pas l'être, car multiples de 2, 3 ou 5.

On sait que tout nombre qui se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 est pair, donc ne peut pas être premier. Un liponombre pair de composantes $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$ s'obtient donc en choisissant une valeur parmi treize pour C_1 , pour C_2 , jusqu'à C_6 , puis une valeur parmi huit (0, 6, 8, 10, 18, 20, 26 ou 28) pour C_7 . En prenant en compte le cas où tous les C_i sont nuls, le nombre des lipo-

nombres pairs est $(13^6 \times 8) - 1 = 38\ 614\ 471$. De même, on voit qu'il y a $13^6 \times 5$ liponombres impairs. Les nombres terminés par 0 ou 5 sont des multiples de 5, donc ne sont pas premiers (sauf 5, bien sûr). Ce sont les liponombres pour lesquels C_7 vaut 0, 5, 10 ou 25. Ceux terminés par 0 ou 10 ont déjà été éliminés. Les liponombres divisibles par 5, mais non par 2, sont donc ceux terminés par 5 ou 25, qui sont au nombre de $13^6 \times 2$. On voit finalement que les liponombres pouvant être premiers sont donc ceux pour lesquels C_7 vaut 1, 3 ou 23, plus le nombre 5 lui-même, c'est-à-dire $(13^6 \times 3) + 1 = 14\ 480\ 428$.

Intéressons-nous maintenant aux multiples de 3. On sait qu'en base dix un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est. Dans le cas des liponombres, cela revient à dire que la somme $C_1 + C_2 + \dots + C_7$ est divisible par 3. Nous savons déjà que C_7 doit être égal à 1, 3 ou 23,

nombres qui ont pour restes respectifs 1, 0 et 2 dans la division par 3. Donc, une fois connus $C_1, C_2 \dots C_6$ (pour un liponombre non multiple de 2 ou 5), il y a toujours une façon unique de trouver C_7 pour que le nombre résultant soit multiple de 3.

On obtient ainsi que le nombre de liponombres potentiellement premiers (non multiples de 2, 3 ou 5) est : $(13^6 \times 2) + 1 = 9\ 653\ 619$.

Nicolas Graner a testé tous ces nombres un par un à l'aide d'un programme capable de déterminer efficacement si un nombre est premier ou non. Il a utilisé une méthode probabiliste : lorsque le programme affirme qu'un nombre est composé, il l'est effectivement, mais, lorsque le programme affirme qu'un nombre est premier, il y a un risque pour qu'il ne le soit pas réellement. Le risque d'erreur qu'il a accepté de prendre est d'environ 10^{-15} , ce qui fait qu'on doit être confiant dans son résultat. Une vérification n'utilisant pas un algorithme probabiliste est possible et sera sans doute rapidement faite. La conclusion de cette étude exhaustive et des calculs de l'ordinateur est : il existe exactement 512 233 lipopremiers.

Les plus petits (qu'on peut bien sûr trouver à la main) sont : trois, cinq, vingt-trois, un million trois, six millions vingt-trois, huit millions vingt-trois, etc., ce qui, en écriture décimale, donne 3, 5, 23, 1 000 003, 6 000 023, 8 000 023, etc.

Plus intéressant, la recherche de Nicolas Graner aboutit au résultat suivant : le plus grand lipopremier est : vingt-huit quintillions vingt-huit quadrillions vingt-huit trillions vingt-huit billions vingt-six milliards huit millions trois, soit 28 000 028 000 028 000 028 026 008 000 003.

On constate que la proportion de nombres premiers parmi les liponombres est : $512\ 233 / 62\ 748\ 516$, soit environ $1/122$. Or, parmi l'ensemble de tous les entiers inférieurs à vingt-huit quintillions, cette proportion est d'environ $1/171$. Un liponombre pris au hasard a donc nettement moins de chances d'être premier qu'un entier pris au hasard (mais inférieur à la limite des liponombres)! Cela s'explique par le fait que le dernier chiffre des liponombres n'est pas réparti uniformément, mais est déterminé par les treize valeurs possibles de la dernière composante. La proportion de liponombres divisibles par deux ou cinq est de $10/13$ (77 pour cent) contre seulement $6/10$ (60 pour cent) pour les nombres ordinaires. En éliminant tous les multiples de 2 et de 5, la proportion de nombres premiers parmi les liponombres restants est : $512\ 233 / 14\ 480\ 428 = 1/28$, ce qui cette fois correspond, à peu de chose près, à la proportion de nombres premiers parmi