

PROBLÈMES DU MILLÉNAIRE

Le problème *P* versus *NP*

C'est samedi soir et vous arrivez dans une soirée au milieu de nombreux invités. Timide, vous vous demandez combien de personnes vous connaissez déjà dans la pièce. Votre hôte vous informe que vous devez certainement connaître Julie, la femme qui se trouve à côté de la table du fond. En une fraction de seconde, vous pouvez jeter un coup d'œil et vérifier si votre hôte a raison. En revanche, si votre hôte ne vous dit rien, vous serez dans l'obligation de faire le tour de la pièce et d'aller voir chaque personne une par une. Voici l'exemple type du phénomène montrant que chercher une solution prend souvent plus de temps que de vérifier l'exactitude d'une solution.

De même, trouver un diviseur de 13 717 421 prend beaucoup plus de temps que de vérifier que ce nombre est égal à 3 607 fois 3 803. Les mathématiciens ont isolé une classe de problèmes qui peuvent être résolus en un temps efficace : les problèmes à temps polynomial. Le problème *P* versus *NP*, formulé par Stephen Cook en 1971, demande si une solution qui peut être vérifiée en un temps polynomial peut également être trouvée en un temps polynomial.

L'hypothèse de Riemann

Certains nombres entiers ont la particularité de ne pas pouvoir être exprimés comme le produit de deux nombres entiers plus petits qu'eux mêmes (par exemple : 2, 3, 5, 7, ... 53, ..., 1 999, ... etc.). Ils sont appelés nombres premiers et jouent un rôle très important dans les mathématiques fondamentales et leurs applications (comme la cryptographie). Bien qu'elle ne semble pas obéir à une règle, la répartition des nombres premiers parmi les entiers est étroitement liée au comportement d'une fonction « $\zeta(s)$ » (lire «dzéta de s») découverte par Euler. L'hypothèse de Riemann affirme que les solutions intéressantes de l'équation $\zeta(s) = 0$ se situent sur une droite. L'hypothèse de Riemann a été vérifiée numériquement pour les 1 500 000 000 premières solutions. Elle contient la clef des mystères entourant la distribution des nombres premiers.

La conjecture de Poincaré

Traçons une courbe fermée (mais qui ne se recoupe pas) à la surface d'un ballon (sphère). Si l'on découpe le ballon le long de cette courbe, on obtient deux morceaux différents. Cependant, cela n'est pas toujours le cas pour des surfaces un peu plus compliquées, comme une chambre à air de vélo (surface appelée «tore» par les mathématiciens). On dit que la sphère est simplement connexe (alors que le tore ne l'est pas). Il est facile de démontrer que toute surface simplement connexe qui est finie (que l'on peut enfermer dans une boîte) et sans bord, est nécessairement la surface d'un objet sphérique. Poincaré a conjecturé qu'une telle caractérisation des objets sphériques continue à être vraie si l'on passe des surfaces à deux dimensions aux espaces à trois dimensions.

Cette question s'est révélée extrêmement difficile et résiste depuis un siècle aux efforts des mathématiciens.

La conjecture de Hodge

Au XX^e siècle, les mathématiciens ont découvert des façons efficaces de décrire la géométrie des objets complexes. L'idée de base est de se demander comment reconstituer la forme d'un objet complexe en assemblant des formes géométriques simples de dimension croissante. Cette technique s'est révélée si puissante qu'elle a permis de créer une multitude d'outils

appelés théories de cohomologie. Grâce à ces théories, les mathématiciens ont effectué d'énormes progrès dans la classification des objets mathématiques. Malheureusement, les origines géométriques de la théorie ont disparu, au fur et à mesure qu'il est devenu nécessaire d'ajouter des éléments qui n'ont plus rien à voir avec la géométrie. La conjecture de Hodge suggère que, pour certains types d'espaces «élégants» (définis par des équations algébriques), les éléments appelés cycles de Hodge peuvent être interprétés comme une combinaison de formes géométriques d'origine algébrique.

La conjecture de Birch Swinnerton-Dyer

Les mathématiciens ont toujours été fascinés par le problème consistant à trouver des solutions aux équations algébriques comme : $x^2 + y^2 = z^2$.

La question de base est de chercher des solutions où x , y , et z sont des nombres entiers. Pour l'équation ci-dessus, on sait depuis Euclide décrire toutes les solutions, mais, pour des polynômes plus compliqués, cela devient extrêmement difficile. En fait, Yu Matijasevich a montré en 1970 que le dixième problème d'Hilbert a une réponse négative, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de méthode générale pour savoir si une telle équation a une solution composée d'entiers! Cependant, pour une classe très importante d'équations appelées courbes elliptiques de genre un, la conjecture de Birch Swinnerton-Dyer dit que la taille du groupe de solutions rationnelles dépend du comportement près de $s = 1$ d'une généralisation de la fonction $\zeta(s)$ associée à la courbe.

Équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes gouvernent la mécanique des fluides, qui joue un rôle crucial dans un très grand nombre de phénomènes allant du contrôle des turbulences aérodynamiques aux prévisions de la météorologie.

Bien que ces équations datent du XIX^e siècle, notre compréhension de leurs solutions reste minime. Le problème est de décider si ces équations admettent des solutions et d'obtenir une théorie mathématique rigoureuse qui permette d'expliquer et de prédire le comportement des solutions des équations de Navier-Stokes.

Équations de Yang-Mills

Les lois de la physique quantique jouent aux échelles microscopiques un rôle analogue à celui des lois de Newton, qui régissent la mécanique classique du monde macroscopique.

Il y a près d'un demi-siècle, deux physiciens Yang et Mills ont découvert une relation étonnante entre la physique des particules élémentaires et la géométrie des espaces fibrés. Ils ont obtenu une équation fondamentale qui porte le nom d'équation de Yang-Mills et dont on vérifie quotidiennement les prédictions expérimentales dans les accélérateurs de particules du monde entier, comme à Brookhaven, à Stanford, au CERN, ou à Tsukuba. Cependant, il n'y a aucune preuve mathématique de l'existence des champs quantiques gouvernés par les équations de Yang-Mills et la question, essentielle pour la physique, du confinement des quarks est un problème d'une difficulté mathématique considérable. La solution de ce problème nécessitera sans doute l'introduction d'idées nouvelles aussi bien du point de vue des mathématiques que de celui de la physique et devrait permettre de lever le voile sur un des grands mystères du monde microscopique.

Le sixième sens des blattes

Les cafards réussissent (trop) souvent à échapper au coup rageur qui devrait les écraser. Des physiciens de l'Université de Princeton ont montré



que les blattes portent, sur deux appendices postérieurs, des poils minuscules qui leur permettent de détecter la direction et la vitesse du vent. Ces capteurs sensoriels transmettent l'information à des neurones qui commandent les réactions de l'animal. Ce mécanisme de détection ultra sensible les protège des prédateurs.

Anti-VIH et nécrose de la hanche

Les antiprotéases, qui empêchent le virus responsable du SIDA de se multiplier, ont notablement augmenté l'espérance de vie des personnes séropositives. Pourtant, l'administration régulière de ces molécules aurait quelques conséquences néfastes pour la santé : on a constaté que les personnes traitées souffrent parfois d'une nécrose douloureuse de la tête du fémur. Les antiprotéases perturbent le métabolisme des graisses : la quantité de graisse dans le sang augmente, de sorte que, pour un même flux sanguin, les os sont moins bien irrigués et se dégradent. Quand cette nécrose est diagnostiquée assez tôt, on sait la traiter ; sinon, on doit implanter une prothèse de hanche, mais l'opération n'est pas dénuée de risques chez les personnes immunodéprimées.

Rotation de la graine

La partie solide du noyau terrestre, la graine, tourne plus vite que le reste de la Terre : elle effectue une révolution supplémentaire autour de son axe tous les 2 400 ans. En 1996, après l'analyse des enregistrements, en Alaska, d'ondes sismiques provenant de tremblements de terre survenus dans les îles Sandwich, en 1968 et en 1996, on avait déjà supposé l'existence de ces mouvements surprenants du cœur de la Terre : les ondes étaient parvenues plus vite en Alaska en 1996 qu'en 1968 ! John Vidale et ses collègues de l'Université de Californie ont analysé les ondes produites lors de deux essais nucléaires soviétiques qui ont eu lieu en 1971 et 1974. L'analyse de la réflexion de ces ondes sur des hétérogénéités dans la graine confirme que la rotation différentielle de la graine par rapport au manteau et à l'écorce terrestre est de 0,15 degré par an.

Des villes englouties

Découverte de deux cités antiques égyptiennes au large d'Alexandrie

Deux ville égyptiennes, datant probablement du VI^e siècle avant notre ère, ont été découvertes sur les fonds sous-marins de la baie d'Aboukir, à quelques kilomètres d'Alexandrie. Après deux ans de repérages, les équipes de l'explorateur Frank Goddio et du Conseil supérieur des antiquités égyptiennes ont sorti les premières statues de la Méditerranée, où elles gisaient à moins de dix mètres de profondeur. Notamment, une tête de pharaon, un buste du dieu Séraphis et une statue décapitée d'Isis en granite noir ont été mis au jour.

Les nombreux vestiges découverts sont répartis sur deux sites. Le premier se trouve à deux kilomètres au large d'Aboukir et comporte des fondations de monuments, des statues, principalement liées au culte d'Isis, et de nombreux objets (céramiques, pièces de monnaie, bijoux...). Les plongeurs ont aussi retrouvé les parties manquantes du «Naos des décades», une chapelle de basalte dont un fragment, trouvé à Aboukir en 1777, est exposé au Musée du Louvre. Cette chapelle, du IV^e siècle avant notre ère, était gravée de tableaux et d'inscriptions représentant et commentant les 36 décades, des périodes de dix jours déterminées par l'apparition et la dispa-

rition dans le ciel d'étoiles nommées décans. Elle témoigne des origines de l'astrologie classique, où les décans sont devenus des subdivisions des douze signes du zodiaque. Le second site, à six kilomètres des côtes, correspond aux vestiges d'une cité entière, en parfait état de conservation, répartis sur un kilomètre carré : on y a notamment identifié des ruines d'habitations, de temples, d'infrastructures portuaires. La statuaire y est également largement représentée.

Dès 1929, on avait établi, d'après l'étude des textes anciens, que les villes d'Hérakleion et de Ménouthis devaient se trouver sous les eaux, à quelques kilomètres des côtes. La présence de Ménouthis fut confirmée quelques années plus tard par des observations aériennes et par celles d'un scaphandrier. Celui-ci avait même récupéré la base du Naos des décades, exposée au Musée gréco-romain d'Alexandrie. Cependant, la plupart des vestiges, recouverts d'une épaisse couche de sédiments, avaient échappés au repérage que les instruments modernes de détection ont enfin permis. En revanche, la cité d'Hérakleion n'avait jamais été repérée.

La lecture des papyrus et des épigraphes anciens enseigne que le Nil avait autrefois une branche dans la région d'Aboukir, au bord de laquelle se trouvait la ville de Canope, reliée à Alexandrie par un canal. Puis venait Ménouthis, faubourg de Canope et enfin Hérakleion, à l'embouchure. Port maritime de l'Égypte sur la Méditerranée au Nouvel Empire, c'était une ville douanière au commerce florissant, mais qui fut ensuite sup-



Les plongeurs ont retrouvé des fragments du Naos des décades, une chapelle couverte de hiéroglyphes, qui sont les plus anciens témoins connus de l'astrologie classique.

Christoph Gerigk, Hill Foundation/Frank Goddio/Discovery Channel



Christoph Gerigk, Hilti Foundation/Frank Goddio/Discovery Channel

Dans la baie d'Aboukir, Frank Goddio et son équipe ont découvert les restes de deux villes réputées pour leur richesses et leurs œuvres d'art, telle cette tête de pharaon.

plantée par Alexandrie, à partir de 331 avant notre ère. Ces villes, réputées pour leur richesse, leurs œuvres d'art et leurs nombreux temples érigés aux dieux Séraphis, Isis et Osiris, où les pèlerins accouraient pour consulter les oracles, sont cités par les auteurs anciens : l'historien grec Hérodote, qui a visité le temple d'Hérakleion en 450 avant notre ère, le géographe grec Strabon, qui a décrit leur situation géographique et leur mode de vie luxueux, et le philosophe romain Sénèque, qui a condamné leurs mœurs corrompues.

Pourquoi ces villes sont-elles aujourd'hui englouties ? La montée des eaux de la Méditerranée, de lents mouvements d'affaissement de l'écorce terrestre et, finalement, de brusques effondrements de terrain, provoqués par des séismes, expliqueraient leur engloutissement. La position des colonnes et des murs, tous effondrés dans la même direction, semblent confirmer cette dernière hypothèse. Au IV^e siècle, à l'époque chrétienne, une basilique et deux sanctuaires furent construits près du temple d'Isis, à Ménouthis, alors enseveli dans le sable. Puis, au VI^e siècle, le sanctuaire de Ménouthis fut mis à sac par les chrétiens : à cette époque, Hérakleion et Ménouthis étaient encore sur la terre ferme. La découverte dans les ruines sous-marines de monnaies byzantines et islamiques du VIII^e siècle prouve qu'elles n'ont pas été englouties avant cette date.

L'équipe de F. Goddio, à laquelle se sont joints des archéologues et des géologues, compte établir les plans de Ménouthis et d'Hérakleion et apporter, grâce aux fouilles, des précisions quant au mode de vie de ces cités : les plongeurs remonteront divers objets qui gisent au fond de l'eau et les égyptologues déchiffreront les hiéroglyphes.

Le morse du manchot

Pour se reconnaître dans une colonie, les manchots émettent des «syllabes» caractéristiques.

Les manchots, dont les 17 espèces vivent toutes dans l'hémisphère Sud, sillonnent les océans en quête de pêches miraculeuses. Ils recherchent les zones poissonneuses où se mêlent eaux froides et eaux chaudes. Pour nicher, ils se regroupent à terre, par espèce, sur un territoire, où règne un vacarme assourdissant. Les partenaires font alors un va-et-vient incessant entre terre et mer : tandis que l'un couve, l'autre va chercher la nourriture et *vice versa*. Comment le manchot nourricier retrouve-t-il «sa famille», le parent qui reste couvrir ayant pu se déplacer avec l'œuf de plusieurs dizaines de kilomètres ? Thierry Aubin, du laboratoire de neurobiologie de l'apprentissage et de la mémoire du CNRS, à la Faculté des sciences d'Orsay, et Pierre Jouventin, au Centre d'écologie fonctionnelle et évolutive du CNRS, à Montpellier, ont montré que les manchots émettent des sons, une signature spécifique qui assure la reconnaissance.

Pendant la période de reproduction, l'archipel des Crozet devient le fief du manchot royal dont la plus vaste colonie – un million et demi d'individus – recouvre entièrement l'une des îles. Pour se nourrir, le manchot royal parcourt parfois jusqu'à 300 kilomètres, ce qui lui prend trois semaines. Quand il revient, le ventre plein de poissons, il retrouve les siens et les nourrit en régurgitant. Dès qu'il prend pied sur la terre ferme, le manchot se met à crier, tout en parcourant la colonie, car le son, vite arrêté par les congénères qui font écran, ne porte pas à plus de huit mètres. Le par-

tenaire (ou le poussin) à l'écoute, répond, dès qu'il entend l'appel du voyageur, et, grâce à un guidage acoustique, l'attire jusqu'à lui.

Pour élucider les modalités d'une telle reconnaissance sans faille, P. Jouventin a obturé les oreilles ou clos le bec de plusieurs manchots, et a vérifié que chaque espèce a un cri – un chant de cour – particulier, où chaque individu introduit sa caractéristique acoustique.

Trois paramètres caractérisent ce son : l'intensité, la fréquence et la durée. Les chants de cour ont été enregistrés en fonction de ces paramètres : on constate qu'ils sont organisés en syllabes (voir la figure), des motifs, constitués d'une fréquence fondamentale et d'harmoniques, qui se répètent. En enregistrant les chants de nombreux manchots, T. Aubin et ses collègues ont constaté que la variation chez un même individu est bien inférieure à la variation entre individus. Les petits ne s'y trompent pas : on enregistre le chant du parent, on en modifie un des paramètres, puis on le rediffuse ; on constate que le poussin s'approche du haut-parleur jusqu'au moment où un des paramètres fondamentaux a été modifié.

L'équipe a réalisé différents mixages du cri d'un parent et de ceux d'autres parents. Dans cet exercice, le manchot royal se montre particulièrement performant : le poussin est capable d'extraire la voix de son parent même lorsque son intensité est inférieure de six décibels au brouhaha ambiant ! L'effet «cocktail» joue à plein : l'animal sait extraire du bruit de fond les sons qui ont un sens pour lui. Pour ce faire, il applique la «théorie mathématique de la communication» de Shannon et Weaver : pour faire passer une information dans le bruit, il faut être redondant, c'est-à-dire la répéter plusieurs fois. Ce que font les manchots.

T. Aubin et ses collègues ont constaté que la tactique acoustique des



T. Aubin

Lorsqu'ils couvent leur poussin entre leurs pattes, sous un repli de la peau, les manchots se déplacent. Pour que les partenaires se retrouvent, chacun répète inlassablement une syllabe qui lui est propre.