

LE PARADOXE DU CONTRÔLE SURPRISE

LE PROBLÈME :

Un professeur annonce à ses élèves qu'il y aura un contrôle surprise la semaine suivante (du lundi au vendredi).



LE PARADOXE :

M	T	W	Th	F
---	---	---	----	---

Si, le jeudi soir, le contrôle n'a toujours pas eu lieu, les élèves savent qu'il sera le vendredi. Ce ne sera donc pas un contrôle surprise.

M	T	W	Th	F
---	---	---	----	---

Le vendredi étant exclu, si le contrôle n'a pas eu lieu le mercredi soir, il se déroulera assurément le jeudi. De nouveau, ce n'est plus une surprise.

M	T	W	Th	F
---	---	---	----	---

En raisonnant de la même façon, les étudiants éliminent successivement le mercredi, le mardi et le lundi comme date surprise. Un contrôle surprise est donc impossible.

LA RÉOLUTION :

LUNDI	MARDI	MERCREDI
Les élèves : "Le contrôle aura lieu aujourd'hui."	Les élèves : "Le contrôle aura lieu aujourd'hui."	Les élèves : "Le contrôles aura lieu aujourd'hui." Le professeur : "Oui, en effet."

L'argumentation des étudiants est logiquement équivalente au fait d'annoncer chaque matin : "Le contrôle aura lieu aujourd'hui." Comme ils s'attendent chaque jour à ce que le contrôle ait lieu, ce dernier ne saurait les surprendre.

dions donc l'existence de cet hypothétique entier, le plus petit qui ne puisse être défini par une phrase de moins de 23 mots.

La langue française ne comportant qu'un nombre fini de mots, le nombre fini de phrases de moins de 23 mots est également fini. Supposons que la langue française comporte 99 999 mots. On compterait alors 99 999²³ phrases ayant exactement 23 mots et 100 000²³ phrases de moins de 23 mots : une phrase à 15 mots, par exemple, comporte 15 mots et 8 absences de mots ; l'absence de mot correspond à l'unité qui fait passer de 99 999 à 100 000. Beaucoup de ces phrases n'ont aucun sens et, parmi celles qui en ont, seules certaines définissent un nombre entier. Ces dernières sont donc associées à un ensemble fini d'entiers positifs, dont le complémentaire, d'après un théorème classique de mathématiques, possède un plus petit élément. Autrement dit, le plus petit nombre entier positif, défini par une phrase de moins de 23 mots, existe et il est unique.

Comment éviter le paradoxe ? On pourrait d'abord se méfier des phrases qui semblent définir un nombre et qui, en réalité, ne le font pas. Par exemple, l'expression «Un nombre tel que son produit par 0 donne 0» ne semble pas différer beaucoup de la phrase de Richard, mais elle n'est pas une bonne définition d'un nombre, parce qu'elle est vérifiée par tous les nombres entiers. Toutefois la phrase de Richard n'est pas de ce type, car c'est une bonne définition : le concept de «plus petit entier tel que» assure l'unicité dès qu'il y a l'existence. Observons que la phrase

«Le plus petit entier positif que l'on ne peut pas définir par une phrase en français de moins de 21 mots» ne pose aucun problème. Le paradoxe de Richard montre les limites de la langue pour la description de l'arithmétique. Ne pouvant lever ce paradoxe malgré un examen approfondi, je le nomme «paradoxe retrouvé».

Appliquons maintenant ces notions de paradoxes perdus et retrouvés à l'exemple du contrôle surprise. Un professeur annonce à ses élèves qu'il fera un contrôle la semaine suivante (entre le lundi et le vendredi). Il mentionne que le jour exact du contrôle ne sera pas dévoilé : il peut choisir n'importe quel jour de la semaine.

Les élèves font cependant le raisonnement suivant : si le professeur choisit de faire le contrôle surprise le vendredi, alors, dès la fin des cours du jeudi, le contrôle n'ayant pas encore eu lieu, les élèves sauront que le contrôle aura lieu le vendredi et ce ne sera plus une surprise. Par conséquent, le contrôle n'aura pas lieu le vendredi. Peut-il avoir lieu le jeudi ? S'il n'a pas été fait avant la fin du mercredi, les élèves sauront que le contrôle aura lieu le jeudi ; donc le contrôle n'aura pas lieu le jeudi. En remontant ainsi, les élèves concluent que le contrôle n'aura pas non plus lieu le mercredi, ni le mardi ni le lundi. Ainsi, le professeur ne peut donner de contrôle surprise.

Pourtant, si le professeur choisit le mercredi, par exemple, comment les élèves sauraient-ils qu'ils auront un contrôle ce jour-là ? Un paradoxe se présente : est-ce un paradoxe perdu ou un paradoxe retrouvé ?

Reformulons le problème de façon logiquement équivalente. Supposons que, chaque matin, les élèves annoncent d'un ton assuré : «Le contrôle aura lieu aujourd'hui.» Ils finiront évidemment par dire le jour du contrôle, de sorte qu'il n'y aura pas de surprise. Plus généralement, si, chaque jour, vous vous attendez à une surprise, la surprise n'en est plus une. J'en ai discuté avec beaucoup de collègues mathématiciens et je pense que ce paradoxe du contrôle inclut la même idée, un peu «habillée».

Ajoutons deux remarques. D'une part, ce paradoxe est fondé sur l'usage ambigu du mot «surprise». D'autre part, quel que soit le sens raisonnable que l'on donne à cette idée de «surprise», il y a deux façons équivalentes d'envisager la stratégie prédictive des élèves. La première est la façon précédente, qui conduit au paradoxe. La seconde décrit le problème en termes d'actions effectives et non d'hypothèses subjectives, ce qui élimine l'aspect paradoxal.

Ajoutons, en effet, une autre condition au paradoxe du contrôle surprise : supposons que les élèves aient de si mauvaises mémoires que, quelles que soient les révisions qu'ils fassent un soir, ils les oublient le soir suivant. Même s'ils affirment que la date du contrôle n'est pas une surprise, ils devront travailler jusqu'au soir précédant le contrôle : s'ils ne travaillent pas dimanche soir et que le contrôle est lundi, ils échoueront, et il en sera de même pour tous les autres soirs et lendemains. Bien qu'ils disent ne jamais pouvoir être surpris, ils doivent réviser tous les soirs jusqu'à l'examen.

Je conclus que le paradoxe du contrôle surprise est un paradoxe perdu.

Matière à penser

ROLAND LEHOUCQ • MICHEL CASSÉ

Grâce à une enquête longue et minutieuse, les physiciens savent que les éléments viennent des étoiles et que leur répartition traduit des mécanismes de physique nucléaire.

En 1610, lorsqu'il pointe sa lunette vers la Lune, Galilée voit des montagnes et l'astronome en déduit que la Lune est «terreuse». Aujourd'hui, nous serions plutôt enclins à dire que la Terre est céleste, car les éléments qui la composent viennent du ciel. De l'hydrogène à l'uranium, les sources des éléments chimiques sont maintenant bien connues.

Les noyaux sont constitués de protons, chargés positivement, et de neutrons, de masse analogue à celle du proton, mais sans charge. Quelles sont, parmi les combinaisons de ces nucléons, celles qui forment des noyaux stables au regard de l'âge de l'Univers? Dans un diagramme où l'on représente le nombre de neutrons N en fonction du nombre de protons Z , les 270 noyaux stables que dénombre la physique nucléaire sont au fond d'une sorte de vallée, la «vallée de stabilité» (plus l'énergie de liaison du noyau est grande, plus sa position dans la vallée est profonde) ; les noyaux instables occupent les flancs des «collines» qui la bordent. Les isotopes d'un élément sont les noyaux qui ont le même nombre de protons, mais un nombre différent de neutrons (leurs propriétés chimiques sont identiques, mais leurs propriétés nucléaires diffèrent). Ils sont situés sur une même verticale.

Porteurs d'une charge positive, les protons se repoussent. Pourquoi sont-ils liés dans le noyau? Parce qu'ils subissent une force attractive, d'intensité supérieure à courte distance à celle de la force électrostatique. Cette force est indépendante de la charge électrique et son rayon d'action est très faible, de l'ordre de 10^{-15} mètre. En raison de cette attraction, la masse d'un noyau est toujours inférieure à la somme des

masses de ses $N+Z$ nucléons : la différence entre la somme des masses des constituants isolés et la masse du noyau est son énergie de liaison ; c'est l'énergie qu'il faut lui fournir pour en libérer les nucléons.

La force nucléaire entre un proton et un neutron est

plus intense qu'entre nucléons du même type, deux neutrons par exemple. Pour cette raison, un noyau qui comporte autant de protons que de neutrons est plus stable.

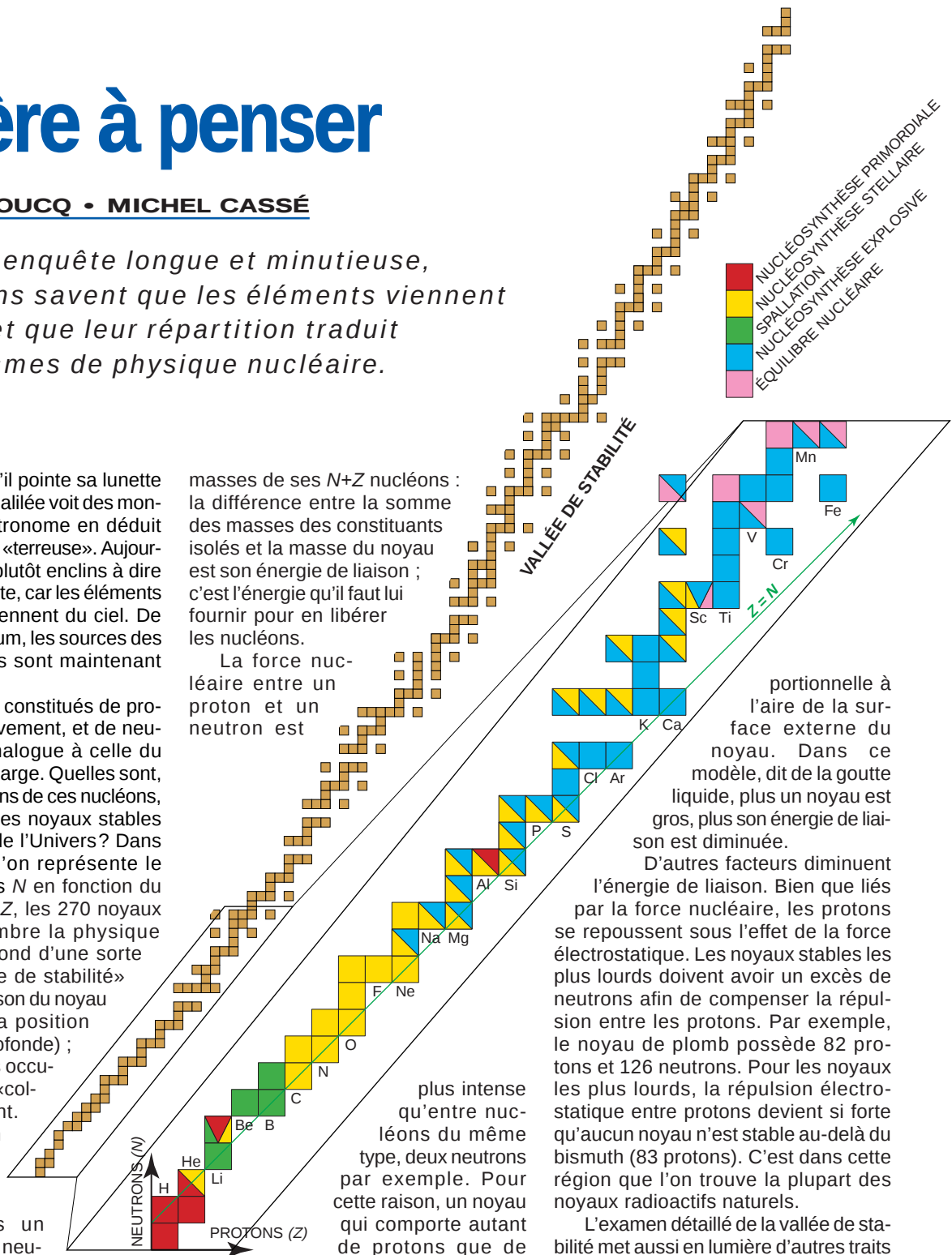
C'est ce que l'on observe pour les noyaux plus légers, comme le calcium (20 protons et 20 neutrons). Cependant, la taille du noyau est finie, de sorte que les nucléons situés près de la surface extérieure sont moins entourés, et donc moins liés, que ceux de l'intérieur. La résultante des forces d'interaction sur les nucléons superficiels, dirigée vers l'intérieur du noyau, crée une tension superficielle analogue à celle qui existe à la surface d'une goutte de liquide. L'énergie de liaison s'en trouve diminuée d'une quantité pro-

portionnelle à l'aire de la surface externe du noyau. Dans ce modèle, dit de la goutte liquide, plus un noyau est gros, plus son énergie de liaison est diminuée.

D'autres facteurs diminuent l'énergie de liaison. Bien que liés par la force nucléaire, les protons se repoussent sous l'effet de la force électrostatique. Les noyaux stables les plus lourds doivent avoir un excès de neutrons afin de compenser la répulsion entre les protons. Par exemple, le noyau de plomb possède 82 protons et 126 neutrons. Pour les noyaux les plus lourds, la répulsion électrostatique entre protons devient si forte qu'aucun noyau n'est stable au-delà du bismuth (83 protons). C'est dans cette région que l'on trouve la plupart des noyaux radioactifs naturels.

L'examen détaillé de la vallée de stabilité met aussi en lumière d'autres traits de la structure nucléaire. Ainsi, les noyaux qui ont un nombre pair de protons et de neutrons, ainsi que ceux qui contiennent un nombre entier de noyaux d'hélium (deux protons et deux neutrons) ont une énergie de liaison plus élevée que leurs voisins. Selon la mécanique quantique, les nucléons occupent des états déterminés, regroupés en couches. Un noyau est plus stable lorsqu'il possède suffisamment de protons ou de neutrons pour remplir une couche. C'est le cas de ces noyaux.

Au total, la cohésion des noyaux résulte d'un jeu subtil entre la répulsion

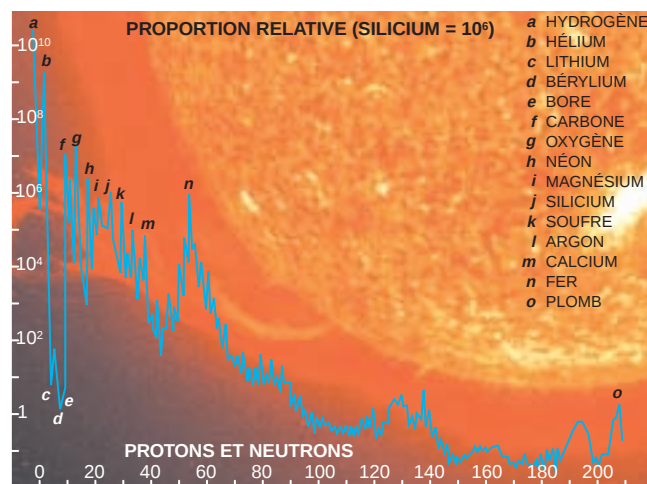


électrostatique entre protons et la force d'attraction entre nucléons, arbitré par des règles de mécanique quantique, telle la règle de remplissage des couches ou le principe d'exclusion de Pauli.

INVENTAIRE NUCLÉAIRE

Comment se répartissent ces éléments dans notre coin de Galaxie ? Les proportions relatives des éléments du Soleil sont essentiellement déduites de l'analyse du spectre de sa photosphère, la partie externe de notre étoile : les éléments chimiques excités qui la composent émettent, en se désexcitant, une lumière caractéristique. En revanche, la composition des parties internes, et notamment du cœur, où se déroulent les réactions de fusion nucléaire, est invisible. Les modèles de structure interne du Soleil indiquent que la photosphère n'est pas contaminée par les produits des réactions nucléaires, limitées à la région centrale, hormis pour le fragile lithium que la convection transporte à des profondeurs où la température est suffisante pour le détruire. À cette exception près, on peut considérer que la composition de la photosphère solaire est identique à celle du nuage à partir duquel notre étoile s'est formée, il y a 4,6 milliards d'années.

Autre source de renseignements : la composition des météorites. À condition d'exclure les éléments les plus volatils (hydrogène, hélium, carbone, azote, oxygène et néon) qui se sont en partie échappés depuis leur formation, les météorites sont aussi un bon indicateur de la composition du Système solaire primordial. La comparaison entre ces deux sources montre un accord excellent. De surcroît, l'analyse des météo-



rites en laboratoire permet de déterminer la composition isotopique de la matière du Système solaire, caractéristique de notre environnement galactique local. La courbe qui résulte de ces données (*ci-dessus*) est la pierre de Rosette de l'astrophysique nucléaire.

ARCHÉOLOGIE NUCLÉAIRE

La courbe de répartition représente la quantité de chaque élément, classé par nombre de nucléons croissants. Sur cette échelle, le silicium, pris comme référence arbitraire, vaut un million. L'hydrogène règne en maître : pour un million d'atomes de silicium, il y a dix milliards d'atomes d'hydrogène.

Les éléments les plus simples, formés peu après le Big-Bang (la nucléosynthèse primordiale), essentiellement l'hydrogène et l'hélium, représentent à eux seuls 98 pour cent de la masse de la matière ordinaire de l'Univers. Leur prépondérance saute aux yeux et peut étonner. Pourquoi des noyaux plus lourds, plus stables et mieux charpentés sont plus rares ? La formation de noyaux lourds, qui se fait par fusion de noyaux plus légers, est inhibée par la répulsion électrostatique entre noyaux, d'autant plus forte que leur charge électrique est grande. Les températures élevées qui peuvent vaincre cette répulsion ne se trouvent qu'au cœur des étoiles (nucléosynthèse stellaire) d'où la matière peine à s'extraire : il ne suffit pas que les noyaux soient créés pour les retrouver dans la matière interstellaire, il faut aussi qu'ils s'échappent de leur berceau ; cette dissémination des éléments internes est faite par les supernovae.

À partir du carbone, de l'azote et de l'oxygène issus des réactions de fusion, les noyaux sont de plus en plus rares à l'exception notable du fer, noyau le plus robuste de la nature. Il naît dans

les supernovae (nucléosynthèse explosive et équilibre nucléaire) sous forme de nickel-56 radioactif, dont la désintégration en cobalt, puis en fer, nourrit leur vive lumière. Le brusque déclin des quantités de lithium, de béryllium et de bore (trois, quatre et cinq protons) reflète l'extrême fragilité de ces noyaux. Ils sont produits, non pas par fusion thermonucléaire, mais par brisure des noyaux de carbone, d'azote et d'oxygène interstellaire sous l'impact de collisions avec les particules rapides du rayonnement cosmique

galactique, ce que les physiciens nomment spallation.

Hormis le fer, nous vérifions que la plupart des noyaux abondants ont le même nombre pair de protons et de neutrons. Ce sont, en proportion décroissante, l'oxygène (8 protons et 8 neutrons), le carbone (6 protons et 6 neutrons), le néon (10 protons et 10 neutrons) et jusqu'au calcium (20 protons et 20 neutrons). Il faut égrainer la liste des noyaux jusqu'au carbone-13 pour rencontrer un noyau ayant un nombre impair de nucléons (6 protons et 7 neutrons). Finalement, on comprend pourquoi l'or est rare : l'Univers a beaucoup peiné pour le produire par transmutation du fer sous l'effet d'un intense bombardement de neutrons dans les couches les plus internes des supernovae.

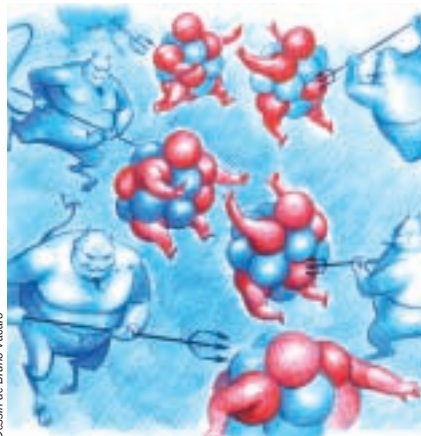
Au terme de cette enquête, on aurait mauvaise grâce d'attribuer l'origine des éléments aux planètes : le mercure n'a rien à voir avec la planète Mercure, ni le fer avec Mars, ni le plomb avec Saturne. Les éléments viennent des étoiles et la décroissance de la courbe de leur répartition indique que l'évolution nucléaire de l'Univers est à peine ébauchée dans notre Galaxie. Mais elle s'éteint, faute de gaz à transformer en étoiles.

Roland LEHOUCQ et Michel CASSÉ sont astrophysiciens au Service d'astrophysique du CEA.

N. PRANTZOS et T. MONTMERLE, *Naissance, vie et mort des étoiles*, PUF, Collection Que sais-je ?, 1998.

É. SLEZAK et F. THÉVENIN, *Nucléosynthèse et abondance dans l'Univers*, Éditions CEPADUÈS, 1998.

D. ARNETT, *Supernovae and Nucleosynthesis*, Princeton University Press, 1996.



Dessin de Bruno Vacaro

