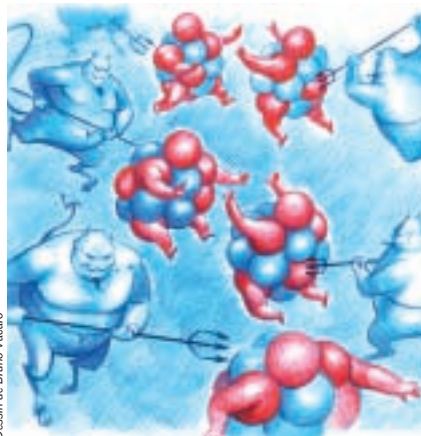


électrostatique entre protons et la force d'attraction entre nucléons, arbitré par des règles de mécanique quantique, telle la règle de remplissage des couches ou le principe d'exclusion de Pauli.

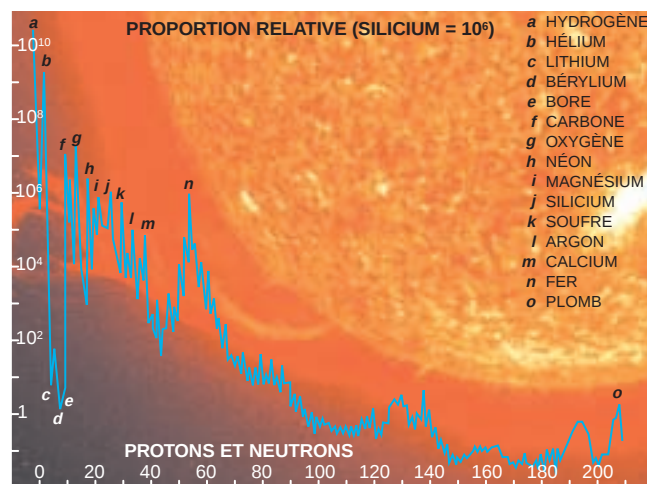
INVENTAIRE NUCLÉAIRE

Comment se répartissent ces éléments dans notre coin de Galaxie ? Les proportions relatives des éléments du Soleil sont essentiellement déduites de l'analyse du spectre de sa photosphère, la partie externe de notre étoile : les éléments chimiques excités qui la composent émettent, en se désexcitant, une lumière caractéristique. En revanche, la composition des parties internes, et notamment du cœur, où se déroulent les réactions de fusion nucléaire, est invisible. Les modèles de structure interne du Soleil indiquent que la photosphère n'est pas contaminée par les produits des réactions nucléaires, limitées à la région centrale, hormis pour le fragile lithium que la convection transporte à des profondeurs où la température est suffisante pour le détruire. À cette exception près, on peut considérer que la composition de la photosphère solaire est identique à celle du nuage à partir duquel notre étoile s'est formée, il y a 4,6 milliards d'années.

Autre source de renseignements : la composition des météorites. À condition d'exclure les éléments les plus volatils (hydrogène, hélium, carbone, azote, oxygène et néon) qui se sont en partie échappés depuis leur formation, les météorites sont aussi un bon indicateur de la composition du Système solaire primordial. La comparaison entre ces deux sources montre un accord excellent. De surcroît, l'analyse des météo-



Dessin de Bruno Vacaro



rites en laboratoire permet de déterminer la composition isotopique de la matière du Système solaire, caractéristique de notre environnement galactique local. La courbe qui résulte de ces données (*ci-dessus*) est la pierre de Rosette de l'astrophysique nucléaire.

ARCHÉOLOGIE NUCLÉAIRE

La courbe de répartition représente la quantité de chaque élément, classé par nombre de nucléons croissants. Sur cette échelle, le silicium, pris comme référence arbitraire, vaut un million. L'hydrogène règne en maître : pour un million d'atomes de silicium, il y a dix milliards d'atomes d'hydrogène.

Les éléments les plus simples, formés peu après le Big-Bang (la nucléosynthèse primordiale), essentiellement l'hydrogène et l'hélium, représentent à eux seuls 98 pour cent de la masse de la matière ordinaire de l'Univers. Leur prépondérance saute aux yeux et peut étonner. Pourquoi des noyaux plus lourds, plus stables et mieux charpentés sont plus rares ? La formation de noyaux lourds, qui se fait par fusion de noyaux plus légers, est inhibée par la répulsion électrostatique entre noyaux, d'autant plus forte que leur charge électrique est grande. Les températures élevées qui peuvent vaincre cette répulsion ne se trouvent qu'au cœur des étoiles (nucléosynthèse stellaire) d'où la matière peine à s'extraire : il ne suffit pas que les noyaux soient créés pour les retrouver dans la matière interstellaire, il faut aussi qu'ils s'échappent de leur berceau ; cette dissémination des éléments internes est faite par les supernovae.

À partir du carbone, de l'azote et de l'oxygène issus des réactions de fusion, les noyaux sont de plus en plus rares à l'exception notable du fer, noyau le plus robuste de la nature. Il naît dans

les supernovae (nucléosynthèse explosive et équilibre nucléaire) sous forme de nickel-56 radioactif, dont la désintégration en cobalt, puis en fer, nourrit leur vive lumière. Le brusque déclin des quantités de lithium, de béryllium et de bore (trois, quatre et cinq protons) reflète l'extrême fragilité de ces noyaux. Ils sont produits, non pas par fusion thermonucléaire, mais par brisure des noyaux de carbone, d'azote et d'oxygène interstellaire sous l'impact de collisions avec les particules rapides du rayonnement cosmique

galactique, ce que les physiciens nomment spallation.

Hormis le fer, nous vérifions que la plupart des noyaux abondants ont le même nombre pair de protons et de neutrons. Ce sont, en proportion décroissante, l'oxygène (8 protons et 8 neutrons), le carbone (6 protons et 6 neutrons), le néon (10 protons et 10 neutrons) et jusqu'au calcium (20 protons et 20 neutrons). Il faut égrainer la liste des noyaux jusqu'au carbone-13 pour rencontrer un noyau ayant un nombre impair de nucléons (6 protons et 7 neutrons). Finalement, on comprend pourquoi l'or est rare : l'Univers a beaucoup peiné pour le produire par transmutation du fer sous l'effet d'un intense bombardement de neutrons dans les couches les plus internes des supernovae.

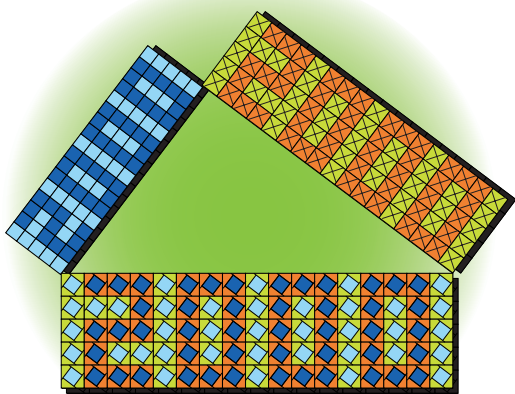
Au terme de cette enquête, on aurait mauvaise grâce d'attribuer l'origine des éléments aux planètes : le mercure n'a rien à voir avec la planète Mercure, ni le fer avec Mars, ni le plomb avec Saturne. Les éléments viennent des étoiles et la décroissance de la courbe de leur répartition indique que l'évolution nucléaire de l'Univers est à peine ébauchée dans notre Galaxie. Mais elle s'éteint, faute de gaz à transformer en étoiles.

Roland LEHOUCQ et Michel CASSÉ sont astrophysiciens au Service d'astrophysique du CEA.

N. PRANTZOS et T. MONTMERLE, *Naissance, vie et mort des étoiles*, PUF, Collection Que sais-je ?, 1998.

É. SLEZAK et F. THÉVENIN, *Nucléosynthèse et abondance dans l'Univers*, Éditions CEPADUÈS, 1998.

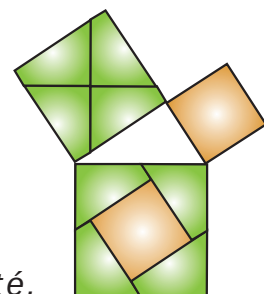
D. ARNETT, *Supernovae and Nucleosynthesis*, Princeton University Press, 1996.



La mise en pièces d'un carré

JEAN-PAUL DELAHAYE

Le carré : énigmes anciennes et nouvelles pour vous distraire cet été.



La méthode la plus simple – utilisée, dit-on, depuis l'Antiquité – pour dessiner un angle droit lorsque l'on ne dispose que d'une ficelle est d'y faire des nœuds régulièrement espacés et de construire le triangle dont les côtés ont pour longueur 3, 4 et 5. D'après le théorème de Pythagore, un tel triangle est rectangle, car $3^2 + 4^2 = 5^2$. Les nombres 3, 4 et 5 ne sont pas les seuls nombres entiers qui permettent cette construction, et la recherche des solutions de l'équa-

tion $x^2 + y^2 = z^2$ a été l'une des toutes premières activités mathématiques dans presque toutes les civilisations.

Les triplets de nombres entiers x , y , z qui satisfont l'équation sont traditionnellement dénommés triplets pythagoriciens (du nom du philosophe Pythagore, qui vécut au VI^e siècle avant notre ère), ce qui est assez injuste puisque la célèbre tablette babylonienne *Plimpton 322*, vieille de plus de 3 500 ans, contient déjà la liste d'une dizaine de tels triplets.

On peut bien sûr multiplier 3, 4 et 5 par un même entier, 2 par exemple, ce qui donne 6, 8, 10, pour obtenir un autre triplet pythagoricien. Mais cette méthode de multiplication ne fournit que les solutions de la forme $(3k, 4k, 5k)$; or il en existe bien d'autres.

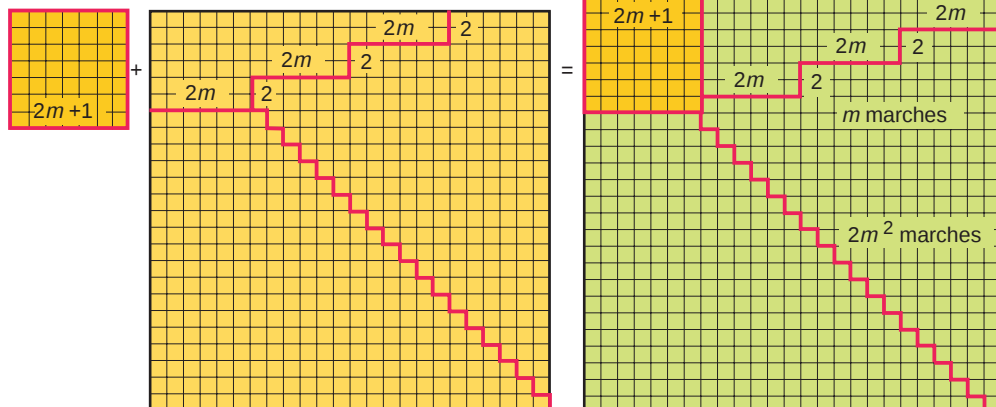
Proclus, philosophe néoplatonicien (412-485), dans son commentaire sur le livre I des *Éléments* d'Euclide, attribue à Pythagore la découverte d'une formule générale donnant une famille infinie de triplets pythagoriciens. Cette formule, que nous nommerons formule de Pythagore, s'écrit (avec nos notations modernes qui évidemment n'étaient pas utilisées par Pythagore) : $(n, (n^2 - 1)/2, (n^2 + 1)/2)$, n étant un nombre impair quelconque, ce qui, en posant n égal à $2m + 1$, donne : $(2m + 1, 2m^2 + 2m, 2m^2 + 2m + 1)$, m étant un entier quelconque. On vérifie que la formule fournit des triplets pythagoriciens en développant : $(2m + 1)^2 + (2m^2 + 2m)^2 = (2m^2 + 2m + 1)^2$.

Les quatre premières valeurs de m donnent ainsi les triplets : (3, 4, 5) (5, 12, 13) (7, 24, 25) (9, 40, 41).

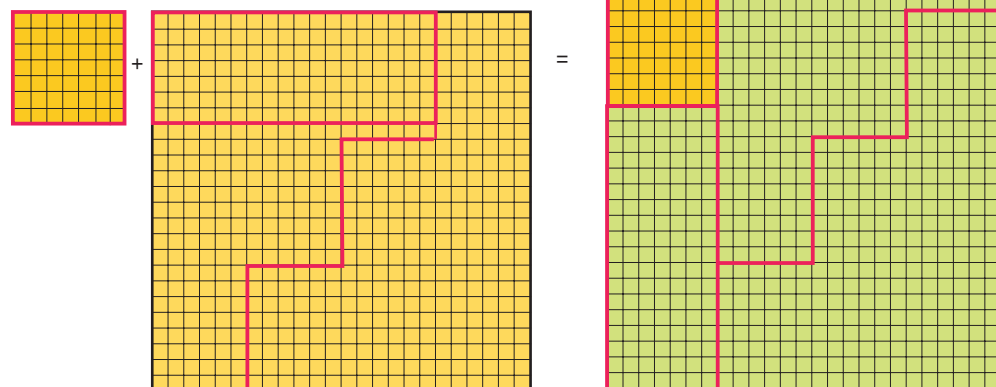
Platon, toujours d'après Proclus, aurait identifié une autre formule générale : $(2m, m^2 - 1, m^2 + 1)$, m entier quelconque, qui pour $m = 2$ donne le triplet (4, 3, 5). À l'ordre près, c'est le triplet (3, 4, 5). Pour $m = 3$, on obtient (6, 8, 10) (le double du triplet (3, 4, 5)) et, pour $m = 4$, le triplet (8, 15, 17). Aucune de ces deux formules n'est absolue : certains triplets pythagoriciens échappent à la formule de Pythagore, d'autres échappent à celle de Platon.

Certains triplets pythagoriciens échappent même aux deux formules à la fois (même en prenant en compte leurs multiples). Ainsi le triplet pythagoricien (20, 21, 29) qui n'est le multiple d'aucun autre puisque les nombres qui le composent n'ont pas de diviseurs communs, ne provient ni de la formule de Pythagore ni de la formule de Platon, car l'écart entre les deux plus grands entiers n'est ni 1 comme dans la for-

a

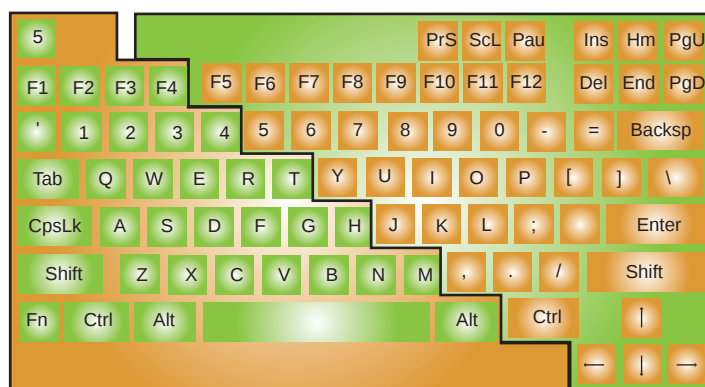
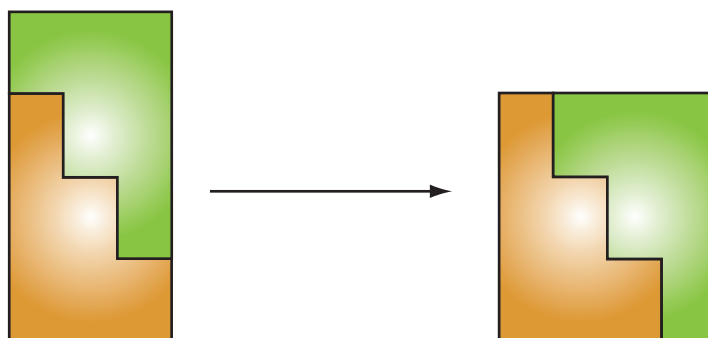
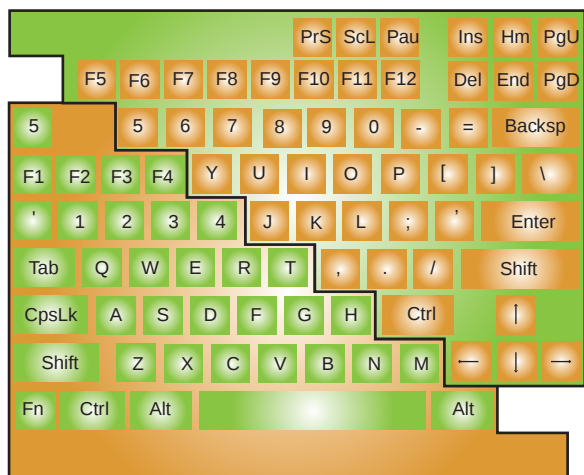


b



1. Un découpage général (a) en quatre pour les triplets donnés par la formule de Pythagore ; pour ces triplets donnés par $(x, y, z) = (2m + 1, 2m^2 + 2m, 2m^2 + 2m + 1)$, on connaît un procédé général permettant de passer du carré de côté z découpé en quatre morceaux à deux carrés de côté x et de côté y . Ce découpage provient de la généralisation d'un découpage proposé par Sam Loyd pour le triplet (5, 12, 13) en 1899. D'autres découpages (b) en quatre sont parfois possibles, comme celui-ci fondé sur l'identité $7^2 + 24^2 = 25^2$ et publié en 1924 par E. Richard.

2. La technique de l'escalier fait passer, par un découpage en deux pièces, d'un rectangle de côtés $2a$ et $3b$ à un rectangle de côtés $3a$ et $2b$, ou d'un rectangle de côtés $3a$ et $4b$ à un rectangle de côtés $4a$ et $3b$. Cette idée a été reprise pour des claviers d'ordinateurs à double configuration, ce qui gagne de la largeur et permet de replier le clavier contre l'écran. Le clavier de l'ordinateur *ThinkPad 701c* d'*IBM* est conçu ainsi. L'ingénieur John Karidis, auteur de cette « invention » l'aurait trouvée sans rien savoir de son utilité comme technique classique dans les problèmes de découpages.



mule de Pythagore, ni 2 comme dans la formule de Platon. Il faut donc une autre formule. Finalement, la solution générale (découverte, en utilisant une méthode géométrique, proposée par Euclide dans sa proposition 29 du livre X des *Éléments*) est donnée par la formule : $(2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2)$, a et b étant deux entiers positifs, a étant supérieur à b .

Certains historiens des mathématiques soupçonnent que les Babyloniens connaissaient déjà des formules équivalentes à celle d'Euclide et qu'ils savaient, il y a plus de 3 500 ans, trouver l'ensemble de tous les triplets pythagoriciens. Ces triplets pythagoriciens, présents dès les premiers balbutiements des mathématiques, suggèrent d'amusement problèmes géométriques qui sont loin d'être tous résolus.

DÉCOUPAGES PYTHAGORIENS

Un triplet pythagorien (x, y, z) étant donné, il est naturel de se poser la question : peut-on découper un carré de côté z de manière à ce qu'en déplaçant les morceaux on puisse reconstruire deux carrés, l'un de côté x , l'autre de côté y ?

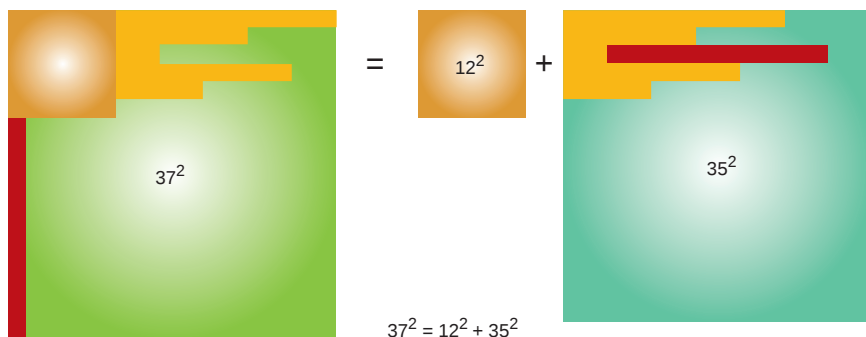
La réponse est, bien sûr, oui, car, en découpant le carré de côté z en z^2 petits carrés de côté 1, on pourra rassembler ceux-ci de façon à avoir, d'une part, un carré de côté x et, de l'autre, un carré de côté y . Le problème ne devient intéressant que si l'on cherche un découpage possédant un nombre aussi petit

que possible de pièces intermédiaires. Un découpage général trouvé en 1873 par l'amateur de récréations géométriques Henry Périgal, montre que cinq pièces suffisent toujours. Périgal, qui était commerçant à Londres, était si fier de son découpage qu'il l'avait fait imprimer sur sa carte de visite et avait demandé qu'il soit gravé sur sa tombe. Ce découpage, dessiné à droite du titre de cet article, a été utilisé par les élèves de seconde du lycée Scheurer-Kestner de Thann sous la direction de leurs professeurs, Alice Kwasny et Bernard Courtois, pour réaliser la figure de gauche célébrant l'an 2000, année des mathématiques. Nous remercions le journal *L'ouvert* de Strasbourg de nous avoir autorisé à reproduire cette illustration.

Si cinq pièces suffisent toujours pour passer d'un carré de côté z aux deux car-

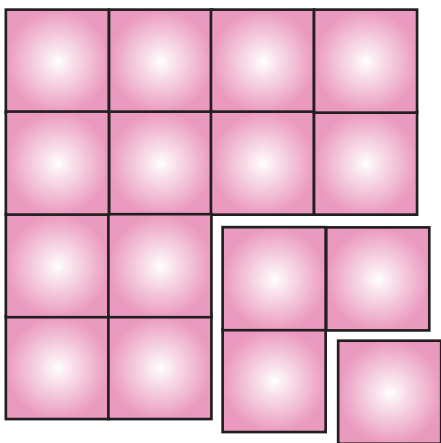
rés de côtés x et y lorsque $x^2 + y^2 = z^2$, il est facile de voir que trois pièces ne suffiront jamais. Si trois pièces suffisaient, l'une d'entre elles comporterait deux coins du grand carré. Ces deux coins ne pourraient pas être des coins d'un petit carré, ils devraient donc être « noyés » dans un des petits carrés, ce qui demande au moins deux pièces de plus, et ne laisse aucune pièce libre pour le dernier carré. Le problème est donc devenu : est-ce que quatre pièces suffisent pour passer d'un grand carré de côtés z à deux petits de côté x et y lorsque (x, y, z) est un triplet pythagorien ?

La réponse est connue pour les triplets donnés par la formule de Pythagore $(2m + 1, 2m^2 + 2m, 2m^2 + 2m + 1)$. Elle provient de la généralisation d'un découpage proposé par Sam Loyd pour le triplet $(5, 12, 13)$ en 1899 (voir la figure 1).

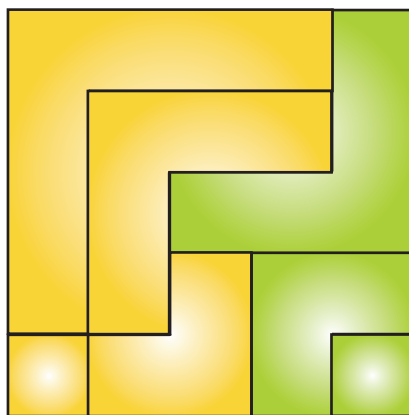


3. Un découpage général en quatre pour les triplets donnés par la formule de Platon. Harry Lindgren (1912-1992) affirma en 1964 qu'il n'existait de découpages en quatre pièces que pour les triplets donnés par la formule de Pythagore. C'était une erreur comme le découpage suivant de Greg Frederickson le prouve. Ce découpage se généralise à tous les triplets pythagoriciens donnés par la formule de Platon : $(2m, m^2 - 1, m^2 + 1)$, m étant un entier quelconque.

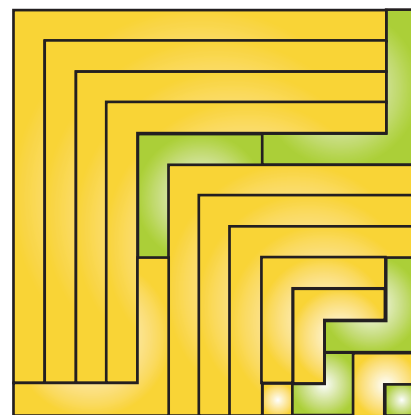
L-DÉCOMPOSITION



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



$$5^2 + 12^2 = 13^2$$



4. L-décompositions et triplets pythagoriciens. Tout nombre carré se décompose comme somme de nombres impairs successifs, car $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, ce dont on se persuade par un dessin. Ce découpage est la L-décomposition du carré de côté n . La question posée

par Joe Fields est : étant donné un triplet pythagoricien (x, y, z) , peut-on toujours réassembler les pièces de la L-décomposition du carré de côté x et du carré de côté y pour obtenir le carré de côté z ? La réponse définitive à cette question n'est pas connue aujourd'hui.

Ce découpage utilise la «technique de l'escalier», dont l'origine est assez ancienne : Girolamo Cardano (Cardan) avait proposé cette méthode en 1557 pour passer par un découpage en deux pièces d'un rectangle de côtés $2a$ et $3b$ à un rectangle de côtés $3a$ et $2b$, ou d'un rectangle de côtés $3a$ et $4b$ à un rectangle de côtés $4a$ et $3b$ (voir la figure 2). Elle aurait été connue de Léonard de Vinci.

Le grand expert en découpages géométriques Harry Lindgren (1912-1992) affirma, en 1964, qu'il n'existait de découpage en quatre pièces que pour les triplets donnés par la formule de Pythagore (laquelle, rappelons-le, ne donne pas tous les triplets pythagoriciens, contrairement à ce que son nom pourrait laisser croire!). Greg Frederickson, le spécialiste mon-

dial actuel des découpages géométriques a découvert que l'affirmation de Lindgren est fautive : il a en effet proposé un découpage général pour la classe de Platon qui utilise à nouveau la technique de l'escalier mais d'une manière assez subtile (voir la figure 3).

La question posée aujourd'hui est donc : existe-t-il d'autres triplets pythagoriciens qui ne seraient donnés ni par la formule de Pythagore ni par la formule de Platon (comme le triplet (20, 21, 29)) et pour lesquels on pourrait trouver un découpage en quatre morceaux pour passer du carré de côté z aux carrés de côté x et de côté y ? Un lecteur proposera-t-il une solution?

D'autres découpages souvent très astucieux et s'appliquant parfois à des

classes infinies d'identités, comme précédemment, ont été découverts par Greg Frederickson. Vous les trouverez décrites dans son merveilleux livre *Dissection Plane and Fancy* (Cambridge University Press, 1997). Avant de le consulter, essayez pour le plaisir de trouver les découpages en cinq pièces associées aux identités :

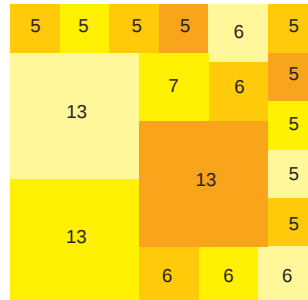
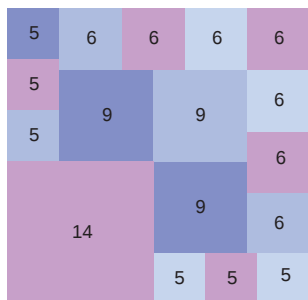
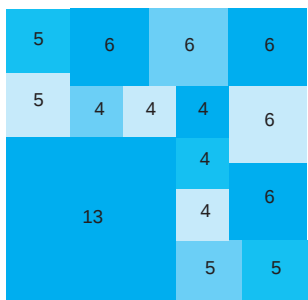
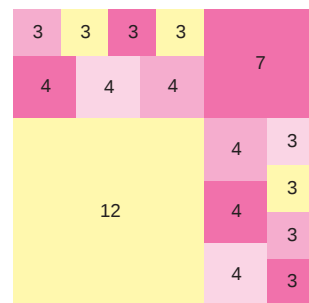
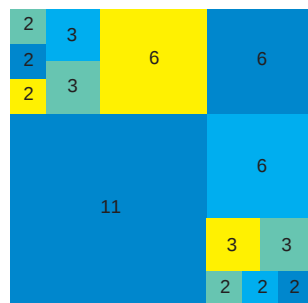
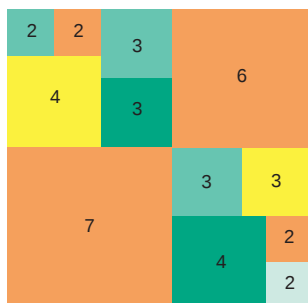
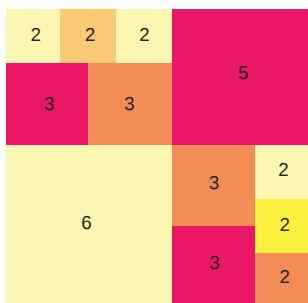
(a) $10^2 + 23^2 = 25^2 + 2^2$

(b) $10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2$

(c) $12^2 + 34^2 = 36^2 + 2^2$

DÉCOUPAGES EN PILES DE L

Récemment un étrange problème lié aux triplets pythagoriciens a été posé par Joe Fields ; ce problème occupera peut-être



$f(n)$ pour n de 2 à 99										
UNITÉS DE n										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
DIZAINES DE n	0	1	1	2	1	3	1	4	3	3
1	5	2	6	2	7	5	8	2	9	3
2	10	7	11	4	12	5	13	9	14	5
3	15	5	16	11	17	7	18	7	19	13
4	20	6	21	7	22	15	23	7	24	9
5	25	17	26	8	27	11	28	19	29	9
6	30	10	31	21	32	13	33	10	34	23
7	35	11	36	11	37	25	38	14	39	13
8	40	27	41	12	42	17	43	29	44	14
9	45	14	46	31	47	19	48	14	49	33

5. La suite d'Erich Friedman : $f(n)$ est le plus grand entier tel qu'il existe un découpage du carré de côté n en carrés plus petits ayant chacun un côté d'au moins $f(n)$ unités ; $f(19) = 3$ signifie que le carré de côté

19 peut être «au mieux» découpé en carrés de côté 3 unités ou plus (pas de carrés plus petits). Les dessins suivants justifient les valeurs de $f(11)$, $f(13)$, $f(17)$, $f(19)$, $f(23)$, $f(29)$ et $f(31)$.

une partie des jours pluvieux de cet été et vous en consolera.

Tout nombre carré se décompose comme somme de nombres impairs successifs, car $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, ce qu'on voit géométriquement tout de suite quand on découpe un carré en L emboîtés (voir la figure 4). Ce découpage est dénommé la «L-décomposition» du carré de côté n .

La question posée par Joe Fields est : étant donné un triplet pythagoricien (x, y, z) , peut-on toujours rassembler les pièces des L-décompositions du carré de côté x et du carré de côté y pour obtenir un assemblage du carré dont le côté est z ?

Tous les essais faits semblent montrer que oui. Quelqu'un saura-t-il le démontrer ou trouver un contre-exemple?

Erich Friedman conjecture un résultat encore plus fort : toute somme de carrés donnant un carré (ainsi, par exemple, $7^2 + 7^2 + 1^2 + 1^2 = 10^2$) conduit de la même façon à des L-décompositions des petits carrés permettant de reconstruire le grand.

PARTITIONS DE CARRÉS ET DE CUBES

Résoudre le problème suivant de découpage de carrés constitue un agréable passe-temps qui pourrait vous occuper une partie d'après-midi pluvieuse cet été en vacances. Il n'est pas très difficile et peut intéresser même les enfants.

Un carré ne peut pas être divisé en deux carrés, ni en trois. En revanche, un carré peut être divisé en quatre carrés, et c'est évident en le découpant par le milieu verticalement et horizontalement.

De même, il est évident qu'un carré peut être divisé en 9 carrés, en 16 carrés en 25 carrés, etc. Ce qui est moins évident, c'est qu'on peut diviser aussi un carré en six carrés plus petits : on trace des traits comme pour le découpage en 9, mais on laisse groupés quatre carrés, ce qui fournit donc un découpage du carré initial en six carrés (un moyen et cinq petits).

La question posée est : pour quelles valeurs de n peut-on ainsi découper un carré en n carrés plus petits (pas nécessairement de tailles différentes)? La réponse, dont je vous laisse trouver la démonstration, est : pour tout nombre n supérieur ou égal à 6.

La même question est posée pour les cubes et, si la pluie n'a pas cessé, il devrait vous occuper au moins jusqu'au dîner : pour quelles valeurs de n peut-on ainsi découper un cube en n cubes plus petits (lesquels ne sont pas nécessairement de tailles différentes)? La réponse est cette fois un peu plus compliquée : 1, 8, 15, 20, 22, 27, 29, 34, 36, 38, 39, 41, 43, 45, 46

et tout n supérieur à 48. La figure 5 donne la solution pour n égal à 54 : elle a été publiée en 1977 par Richard Guy.

UN VÉRITABLE DOMAINE DE RECHERCHE

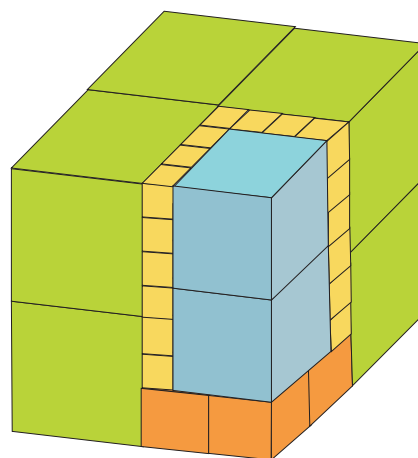
Le problème général du découpage d'un carré en carrés plus petits soulève un grand nombre de problèmes qui sont encore incomplètement résolus et que les amateurs de jeux géométriques, éventuellement aidés de leur ordinateur, devraient pouvoir faire avancer.

Si n est un entier donné, Erich Friedman propose de considérer tous les découpages d'un carré de côté n en plusieurs carrés plus petits, chacun de côté entier. Il y a bien sûr le découpage trivial en n^2 petits carrés de côté 1, mais il en existe de plus économiques, et peut-être certains utilisent-ils des carrés de côté plus grand que 2 ou 3 ou plus grand encore.

Nous appellerons taille du carré minimum et noterons $f(n)$ le plus grand entier tel que le carré de côté n puisse être découpé en carrés de côté supérieur ou égal à $f(n)$. La valeur $f(11)$ égale à 2, par exemple, signifie que le carré de côté 11 peut être découpé en carrés de côté au moins 2 et que l'on ne connaît pas de découpage n'utilisant que des carrés de côté tous plus grand que 2.

La suite des valeurs de $f(n)$ est répertoriée sous le numéro A036445 dans la célèbre *Encyclopedia of Integer Sequences* de N. Sloane que vous trouverez à : www.research.att.com/~njas/sequences/index.html

La figure 6 présente quelques dessins qui justifient les valeurs de $f(11)$, $f(13)$, $f(17)$, $f(19)$, $f(23)$, $f(29)$ et $f(31)$. On a un

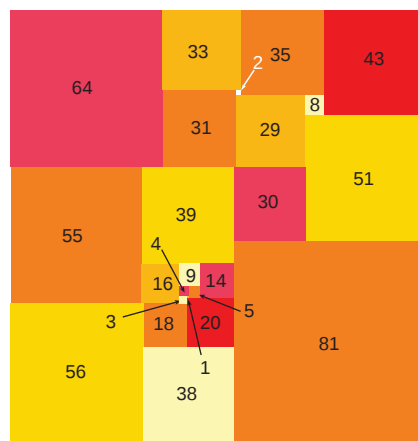
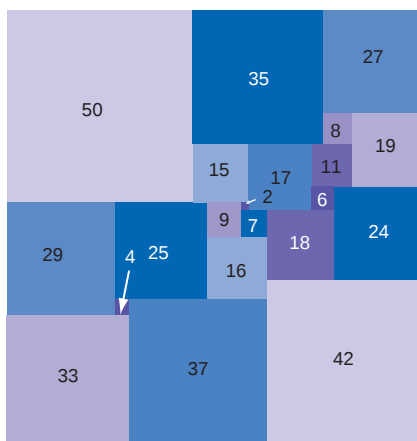


6. Pour quelles valeurs de n peut-on découper un cube en n cubes plus petits? La réponse est : 1, 8, 15, 20, 22, 27, 29, 34, 36, 38, 39, 41, 43, 45, 46 et tout n supérieur à 48. En 1977, tous les cas avaient été traités (par un découpage ou par un raisonnement montrant l'impossibilité), sauf le cas de n égal à 54 qui a été résolu par le découpage suivant.

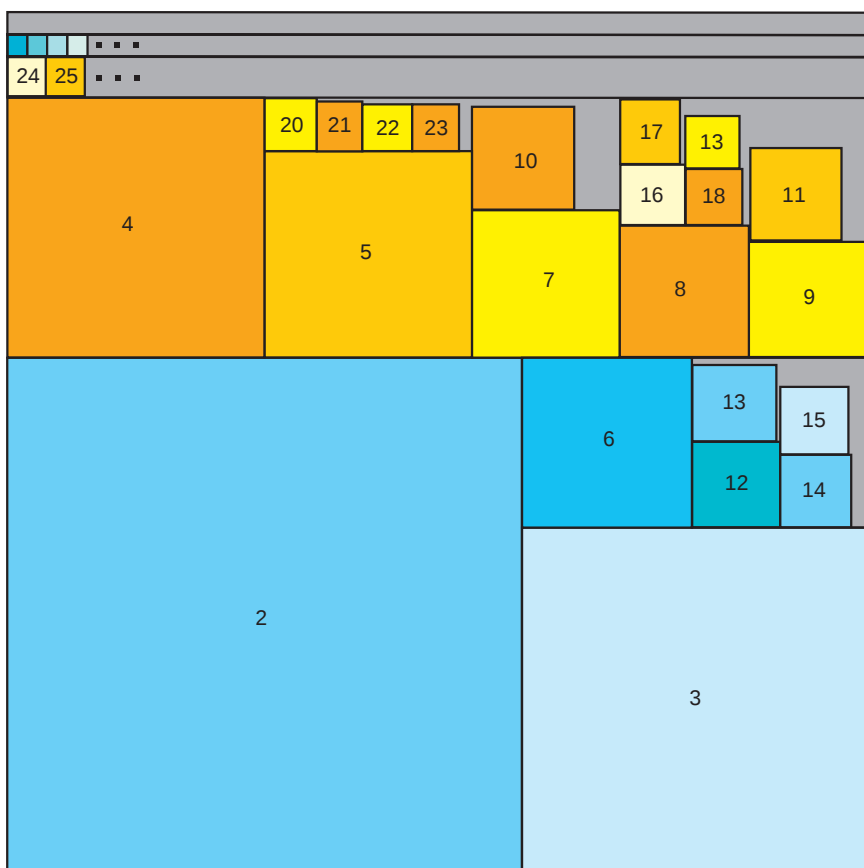
peu étudié la suite $f(n)$. On voit facilement que, lorsque n est composé, $f(n)$ est plus grand que q , le plus grand facteur propre de n , car on peut bien sûr placer un nombre entier de carrés de côté q dans le carré de côté n .

Joseph De Vincentis a démontré que, si n est supérieur à 8, alors $f(n)$ est plus grand que 1. Voici son raisonnement : on peut regrouper des carrés 2×2 et 3×3 pour former des rectangles 2×6 et 3×6 qui peuvent à leur tour être assemblés en rectangles $6 \times m$ pour tout m supérieur à 1.

En conséquence, tout carré de côté au moins 8 peut être découpé en quatre blocs (a) un carré 6×6 ; (b) un carré



7. Les découpages parfaits. Les découpages d'un carré en carrés tous différents (appelés découpages parfaits) sont difficiles à trouver. En 1939, R. Sprague proposa pour la première fois un découpage parfait d'un carré en 55 carrés plus petits. En 1948, un découpage parfait d'un carré en 24 carrés plus petits fut découvert par Willcocks. Enfin, en 1978, A. Duijvestijn trouva un découpage parfait d'un carré en 21 carrés plus petits. On sait maintenant que ce record ne peut être battu, mais assez peu de choses sont connues sur ces découpages parfaits et, en particulier, sauf pour quelques valeurs de n , on ignore le nombre existant de découpages parfaits d'un carré en n carrés plus petits.



8. Un carré pour la somme des inverses des carrés. La série des inverses des carrés $1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$ vaut $\pi^2/6 - 1$. Le mathématicien Leo Moser, remarquant que cette somme était inférieure à $(5/6)^2$, proposa qu'on essaie de ranger tous les carrés de côté $1/2, 1/3, 1/4$, etc. dans le carré de côté $5/6$. Cela a été fait par Erich Friedman, qui a aussi rangé tous les carrés de côté $1, 1/2, 1/3, \dots$ (dont la surface totale est $\pi^2/6$) dans le rectangle : $1 \times (1 + 1/2 + 1/7 + 1/195) = 1,6479\dots$ supérieur à $1,64493\dots$, soit $\pi^2/6$, qui laisse moins de 0,2 pour cent de place inoccupée.

$(n - 6) \times (n - 6)$; (c) et deux rectangles $6 \times (n - 6)$, qui peuvent être eux-mêmes découpés en n'utilisant que des carrés de côté 2×2 et 3×3 . Donc, si n est supérieur à 8, on peut, en utilisant des carrés de côté 2, 3, 6 et $n - 6$, paver entièrement le carré de côté n , ce qui signifie que $f(n)$ est plus grand que 1.

Une généralisation de cette démonstration montre que si n est supérieur à $2k^2$, alors nécessairement $f(n)$ est supérieur à k , ce qui permet donc de savoir que $f(n)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. D'autres suites associées aux découpages d'un carré en carrés sont présentées à : www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1298.html

PARTITION PARFAITE D'UN CARRÉ EN CARRÉS

Dans les découpages précédents, nous autorisons l'utilisation de plusieurs exemplaires du même carré. Les découpages d'un carré en carrés tous différents (appelés découpages parfaits) sont bien plus difficiles à trouver et, à vrai dire, on a pen-

sé longtemps pensé qu'il n'en n'existerait pas. Si aucun regroupement des carrés du découpage en rectangles n'est possible, on dit que le découpage est simple.

C'est en 1939 que R. Sprague proposa pour la première fois un découpage parfait (et simple) pour un carré en 55 carrés plus petits. Un peu plus tard, en 1948, un découpage parfait d'un carré en 24 carrés plus petits fut découvert par Willcocks. Enfin, en 1978, A. Duijvestijn trouva un découpage parfait d'un carré en 21 carrés plus petits (voir la figure 7).

On sait aujourd'hui que le découpage parfait du carré en 21 est unique et qu'aucun nombre inférieur à 21 ne convient. Le découpage en 21 se note [50, 35, 27], [8, 19], [15, 17, 11], [6, 24], [29, 25, 9, 2], [7, 18], [16], [42], [4, 37], [33] (on regroupe les carrés adjacents ayant un de leurs côtés supérieurs alignés, en faisant l'énumération de haut en bas et de gauche à droite).

On a découvert trois découpages parfaits d'un carré de côté 110. Ce sont (en utilisant la notation précédente) : [60, 50], [23, 27], [24, 22, 14], [7, 16], [8, 6], [12, 15], [13], [2, 28], [26], [4, 21, 3], [18], [17], soit 22 carrés, découpage décou-

vert par A. Duijvestijn. Le second découpage est : [60, 50], [27, 23], [24, 22, 14], [4, 19], [8, 6], [3, 12, 16], [9], [2, 28], [26], [21], [1, 18], [17], soit 22 carrés, découvert par Willcocks, et enfin le troisième, [44, 29, 37], [21, 8], [13, 32], [28, 16], [15, 19], [12, 4], [3, 1], [2, 14], [5], [10, 41], [38, 7], [31] (23 carrés, découvert par A. Duijvestijn).

L'utilisation des ordinateurs a permis de savoir que le nombre de découpages parfaits et simples en 21 est 1 (unicité, comme nous l'avons mentionné), en 22 est 8, en 23 est 12, en 24 est 26, en 25 est 160 et 26 est 441 (cette suite est, bien sûr, l'une des suites répertoriées par N. Sloane dans son encyclopédie). Au-delà, les valeurs ne sont pas connues. Qui les calculera ?

UN DÉCOUPAGE INFINI DE CARRÉS

Pour terminer, voici un problème assez difficile de rangement infini. Chacun sait que la série des inverses des carrés $1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$ est convergente et que sa somme vaut $\pi^2/6 - 1$. Cela suggère de ranger tous les carrés de côté $1/2, 1/3, 1/4$, etc., dans un grand carré de côté le plus petit possible. Leo Moser, remarquant que $1/2^2 + 1/3^2 + \dots$ est égal à $\pi^2/6 - 1$, inférieur à $(5/6)^2$, qui vaut $0,69444\dots$, proposa qu'on essaie de ranger tous les carrés de côté $1/2, 1/3, 1/4$, etc. dans le carré de côté $5/6$. Cela a été fait par Erich Friedman, qui a aussi réussi à ranger tous les carrés de côté $1, 1/2, \dots$ dans le rectangle : $1 \times (1 + 1/2 + 1/7 + 1/195) = 1,6479\dots$ supérieur à $1,6449\dots$ ($\pi^2/6$). Ces deux records ne demandent qu'à être battus...

Bernard DUVILLÉ, *Sur les traces de l'Homo mathematicus. Les mathématiques avant Euclide*, Ellipse, Paris, 2000.

Greg FREDERICKSON, *Dissection Plane and Fancy*, Cambridge University Press, 1997.

Erich FRIEDMAN, *Integer square tilings* ; www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1298.html

Erich FRIEDMAN, *Harmonic Series of Polygons* : www.stetson.edu/~efriedma/harmonic/

Joe FIELDS, *A Small Puzzle* : www.math.uic.edu/~fields/puzzle/puzzle.html

Eric WEISSTEIN, *Perfect Square Dissection* : mathworld.wolfram.com/PerfectSquareDissection.html

Greg Frederickson, *Geometric dissections on the web* : www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book/webdiss.html

David Eppstein, *The Geometry Junkyard, Dissection* : www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/dissect.html