

une partie des jours pluvieux de cet été et vous en consolera.

Tout nombre carré se décompose comme somme de nombres impairs successifs, car $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, ce qu'on voit géométriquement tout de suite quand on découpe un carré en L emboîtés (voir la figure 4). Ce découpage est dénommé la «L-décomposition» du carré de côté n .

La question posée par Joe Fields est : étant donné un triplet pythagoricien (x, y, z) , peut-on toujours rassembler les pièces des L-décompositions du carré de côté x et du carré de côté y pour obtenir un assemblage du carré dont le côté est z ?

Tous les essais faits semblent montrer que oui. Quelqu'un saura-t-il le démontrer ou trouver un contre-exemple?

Erich Friedman conjecture un résultat encore plus fort : toute somme de carrés donnant un carré (ainsi, par exemple, $7^2 + 7^2 + 1^2 + 1^2 = 10^2$) conduit de la même façon à des L-décompositions des petits carrés permettant de reconstruire le grand.

PARTITIONS DE CARRÉS ET DE CUBES

Résoudre le problème suivant de découpage de carrés constitue un agréable passe-temps qui pourrait vous occuper une partie d'après-midi pluvieuse cet été en vacances. Il n'est pas très difficile et peut intéresser même les enfants.

Un carré ne peut pas être divisé en deux carrés, ni en trois. En revanche, un carré peut être divisé en quatre carrés, et c'est évident en le découpant par le milieu verticalement et horizontalement.

De même, il est évident qu'un carré peut être divisé en 9 carrés, en 16 carrés en 25 carrés, etc. Ce qui est moins évident, c'est qu'on peut diviser aussi un carré en six carrés plus petits : on trace des traits comme pour le découpage en 9, mais on laisse groupés quatre carrés, ce qui fournit donc un découpage du carré initial en six carrés (un moyen et cinq petits).

La question posée est : pour quelles valeurs de n peut-on ainsi découper un carré en n carrés plus petits (pas nécessairement de tailles différentes)? La réponse, dont je vous laisse trouver la démonstration, est : pour tout nombre n supérieur ou égal à 6.

La même question est posée pour les cubes et, si la pluie n'a pas cessé, il devrait vous occuper au moins jusqu'au dîner : pour quelles valeurs de n peut-on ainsi découper un cube en n cubes plus petits (lesquels ne sont pas nécessairement de tailles différentes)? La réponse est cette fois un peu plus compliquée : 1, 8, 15, 20, 22, 27, 29, 34, 36, 38, 39, 41, 43, 45, 46

et tout n supérieur à 48. La figure 5 donne la solution pour n égal à 54 : elle a été publiée en 1977 par Richard Guy.

UN VÉRITABLE DOMAINE DE RECHERCHE

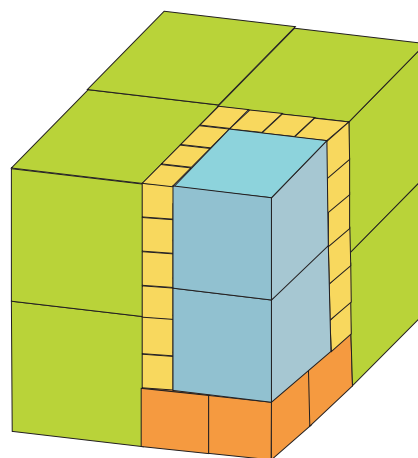
Le problème général du découpage d'un carré en carrés plus petits soulève un grand nombre de problèmes qui sont encore incomplètement résolus et que les amateurs de jeux géométriques, éventuellement aidés de leur ordinateur, devraient pouvoir faire avancer.

Si n est un entier donné, Erich Friedman propose de considérer tous les découpages d'un carré de côté n en plusieurs carrés plus petits, chacun de côté entier. Il y a bien sûr le découpage trivial en n^2 petits carrés de côté 1, mais il en existe de plus économiques, et peut-être certains utilisent-ils des carrés de côté plus grand que 2 ou 3 ou plus grand encore.

Nous appellerons taille du carré minimum et noterons $f(n)$ le plus grand entier tel que le carré de côté n puisse être découpé en carrés de côté supérieur ou égal à $f(n)$. La valeur $f(11)$ égale à 2, par exemple, signifie que le carré de côté 11 peut être découpé en carrés de côté au moins 2 et que l'on ne connaît pas de découpage n'utilisant que des carrés de côté tous plus grand que 2.

La suite des valeurs de $f(n)$ est répertoriée sous le numéro A036445 dans la célèbre *Encyclopedia of Integer Sequences* de N. Sloane que vous trouverez à : www.research.att.com/~njas/sequences/index.html

La figure 6 présente quelques dessins qui justifient les valeurs de $f(11)$, $f(13)$, $f(17)$, $f(19)$, $f(23)$, $f(29)$ et $f(31)$. On a un

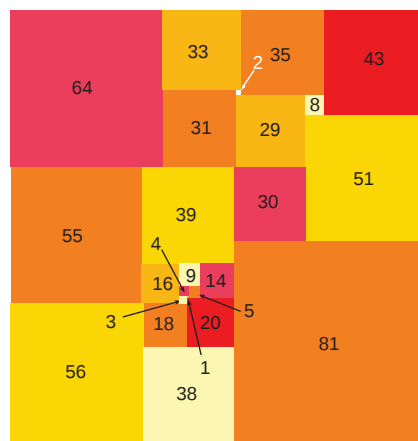
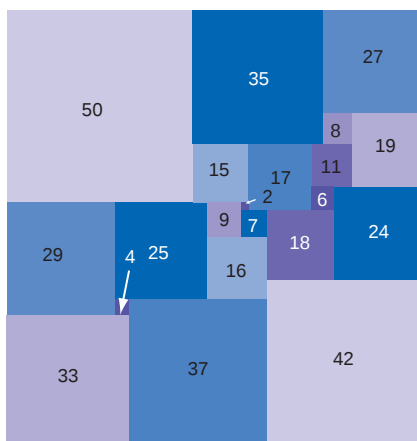


6. Pour quelles valeurs de n peut-on découper un cube en n cubes plus petits? La réponse est : 1, 8, 15, 20, 22, 27, 29, 34, 36, 38, 39, 41, 43, 45, 46 et tout n supérieur à 48. En 1977, tous les cas avaient été traités (par un découpage ou par un raisonnement montrant l'impossibilité), sauf le cas de n égal à 54 qui a été résolu par le découpage suivant.

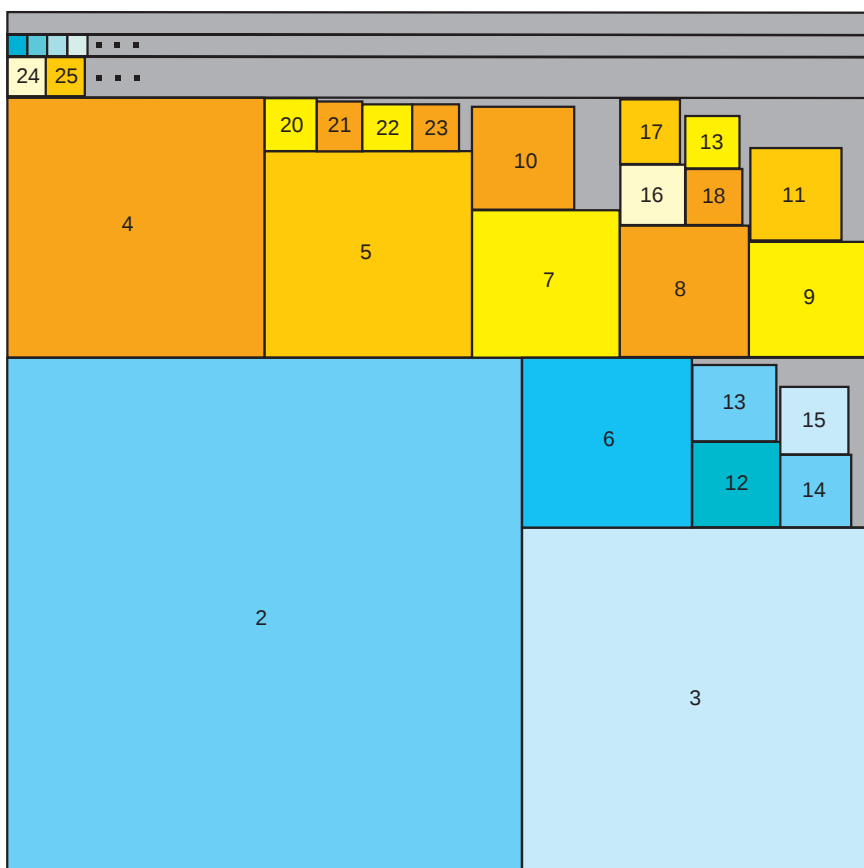
peu étudié la suite $f(n)$. On voit facilement que, lorsque n est composé, $f(n)$ est plus grand que q , le plus grand facteur propre de n , car on peut bien sûr placer un nombre entier de carrés de côté q dans le carré de côté n .

Joseph De Vincentis a démontré que, si n est supérieur à 8, alors $f(n)$ est plus grand que 1. Voici son raisonnement : on peut regrouper des carrés 2×2 et 3×3 pour former des rectangles 2×6 et 3×6 qui peuvent à leur tour être assemblés en rectangles $6 \times m$ pour tout m supérieur à 1.

En conséquence, tout carré de côté au moins 8 peut être découpé en quatre blocs (a) un carré 6×6 ; (b) un carré



7. Les découpages parfaits. Les découpages d'un carré en carrés tous différents (appelés découpages parfaits) sont difficiles à trouver. En 1939, R. Sprague proposa pour la première fois un découpage parfait d'un carré en 55 carrés plus petits. En 1948, un découpage parfait d'un carré en 24 carrés plus petits fut découvert par Willcocks. Enfin, en 1978, A. Duivestijn trouva un découpage parfait d'un carré en 21 carrés plus petits. On sait maintenant que ce record ne peut être battu, mais assez peu de choses sont connues sur ces découpages parfaits et, en particulier, sauf pour quelques valeurs de n , on ignore le nombre existant de découpages parfaits d'un carré en n carrés plus petits.



8. Un carré pour la somme des inverses des carrés. La série des inverses des carrés $1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$ vaut $\pi^2/6 - 1$. Le mathématicien Leo Moser, remarquant que cette somme était inférieure à $(5/6)^2$, proposa qu'on essaie de ranger tous les carrés de côté $1/2, 1/3, 1/4$, etc. dans le carré de côté $5/6$. Cela a été fait par Erich Friedman, qui a aussi rangé tous les carrés de côté $1, 1/2, 1/3, \dots$ (dont la surface totale est $\pi^2/6$) dans le rectangle : $1 \times (1 + 1/2 + 1/7 + 1/195) = 1,6479\dots$ supérieur à $1,64493\dots$, soit $\pi^2/6$, qui laisse moins de 0,2 pour cent de place inoccupée.

$(n - 6) \times (n - 6)$; (c) et deux rectangles $6 \times (n - 6)$, qui peuvent être eux-mêmes découpés en n'utilisant que des carrés de côté 2×2 et 3×3 . Donc, si n est supérieur à 8, on peut, en utilisant des carrés de côté 2, 3, 6 et $n - 6$, paver entièrement le carré de côté n , ce qui signifie que $f(n)$ est plus grand que 1.

Une généralisation de cette démonstration montre que si n est supérieur à $2k^2$, alors nécessairement $f(n)$ est supérieur à k , ce qui permet donc de savoir que $f(n)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. D'autres suites associées aux découpages d'un carré en carrés sont présentées à : www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1298.html

PARTITION PARFAITE D'UN CARRÉ EN CARRÉS

Dans les découpages précédents, nous autorisons l'utilisation de plusieurs exemplaires du même carré. Les découpages d'un carré en carrés tous différents (appelés découpages parfaits) sont bien plus difficiles à trouver et, à vrai dire, on a pen-

sé longtemps pensé qu'il n'en n'existerait pas. Si aucun regroupement des carrés du découpage en rectangles n'est possible, on dit que le découpage est simple.

C'est en 1939 que R. Sprague proposa pour la première fois un découpage parfait (et simple) pour un carré en 55 carrés plus petits. Un peu plus tard, en 1948, un découpage parfait d'un carré en 24 carrés plus petits fut découvert par Willcocks. Enfin, en 1978, A. Duijvestijn trouva un découpage parfait d'un carré en 21 carrés plus petits (voir la figure 7).

On sait aujourd'hui que le découpage parfait du carré en 21 est unique et qu'aucun nombre inférieur à 21 ne convient. Le découpage en 21 se note [50, 35, 27], [8, 19], [15, 17, 11], [6, 24], [29, 25, 9, 2], [7, 18], [16], [42], [4, 37], [33] (on regroupe les carrés adjacents ayant un de leurs côtés supérieurs alignés, en faisant l'énumération de haut en bas et de gauche à droite).

On a découvert trois découpages parfaits d'un carré de côté 110. Ce sont (en utilisant la notation précédente) : [60, 50], [23, 27], [24, 22, 14], [7, 16], [8, 6], [12, 15], [13], [2, 28], [26], [4, 21, 3], [18], [17], soit 22 carrés, découpage décou-

vert par A. Duijvestijn. Le second découpage est : [60, 50], [27, 23], [24, 22, 14], [4, 19], [8, 6], [3, 12, 16], [9], [2, 28], [26], [21], [1, 18], [17], soit 22 carrés, découvert par Willcocks, et enfin le troisième, [44, 29, 37], [21, 8], [13, 32], [28, 16], [15, 19], [12, 4], [3, 1], [2, 14], [5], [10, 41], [38, 7], [31] (23 carrés, découvert par A. Duijvestijn).

L'utilisation des ordinateurs a permis de savoir que le nombre de découpages parfaits et simples en 21 est 1 (unicité, comme nous l'avons mentionné), en 22 est 8, en 23 est 12, en 24 est 26, en 25 est 160 et 26 est 441 (cette suite est, bien sûr, l'une des suites répertoriées par N. Sloane dans son encyclopédie). Au-delà, les valeurs ne sont pas connues. Qui les calculera ?

UN DÉCOUPAGE INFINI DE CARRÉS

Pour terminer, voici un problème assez difficile de rangement infini. Chacun sait que la série des inverses des carrés $1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots$ est convergente et que sa somme vaut $\pi^2/6 - 1$. Cela suggère de ranger tous les carrés de côté $1/2, 1/3, 1/4$, etc., dans un grand carré de côté le plus petit possible. Leo Moser, remarquant que $1/2^2 + 1/3^2 + \dots$ est égal à $\pi^2/6 - 1$, inférieur à $(5/6)^2$, qui vaut $0,69444\dots$, proposa qu'on essaie de ranger tous les carrés de côté $1/2, 1/3, 1/4$, etc. dans le carré de côté $5/6$. Cela a été fait par Erich Friedman, qui a aussi réussi à ranger tous les carrés de côté $1, 1/2, \dots$ dans le rectangle : $1 \times (1 + 1/2 + 1/7 + 1/195) = 1,6479\dots$ supérieur à $1,6449\dots$ ($\pi^2/6$). Ces deux records ne demandent qu'à être battus...

Bernard DUVILLIÉ, *Sur les traces de l'Homo mathematicus. Les mathématiques avant Euclide*, Ellipse, Paris, 2000.

Greg FREDERICKSON, *Dissection Plane and Fancy*, Cambridge University Press, 1997.

Erich FRIEDMAN, *Integer square tilings* ; www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1298.html

Erich FRIEDMAN, *Harmonic Series of Polygons* : www.stetson.edu/~efriedma/harmonic/

Joe FIELDS, *A Small Puzzle* : www.math.uic.edu/~fields/puzzle/puzzle.html

Eric WEISSTEIN, *Perfect Square Dissection* : mathworld.wolfram.com/PerfectSquareDissection.html

Greg Frederickson, *Geometric dissections on the web* : www.cs.purdue.edu/homes/gnf/book/webdiss.html

David Eppstein, *The Geometry Junkyard, Dissection* : www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/dissect.html

