

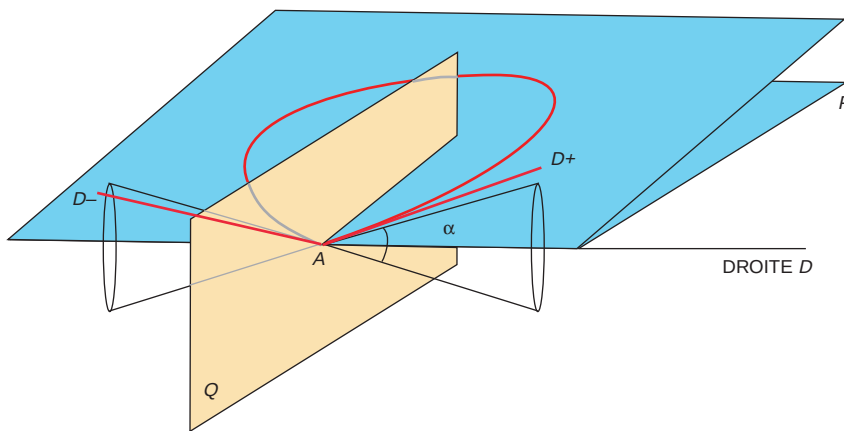
ser avec un doigt. La sphère s'aplatit alors d'elle-même sur un disque, chaque méridien prenant l'allure d'un demi huit horizontal, d'énergie très proche de celle du fil dépourvu de contraintes. C'est là que la libre rotation des méridiens sur les moyeux est cruciale. Sans elle, l'aplatissement serait impossible.

Au cours de cet aplatissement, le moyeu inférieur tourne de 90 degrés par rapport au moyeu supérieur. Puis, quand on impose, à l'aide de la poignée, une rotation supplémentaire de 90 degrés dans le même sens, un phénomène étonnant se produit : le disque se referme en une sphère deux fois plus petite que la sphère initiale. Soit le disque se referme sur la main du manipulateur, soit il se referme vers l'extérieur. Pour favoriser le second cas, il suffit, au moment où l'on impose la rotation supplémentaire, de pousser légèrement vers le haut le bord du disque formé par les méridiens aplatis.

La rotation totale de 180 degrés tend à donner à chaque méridien la forme d'un cercle, à ceci près que les deux extrémités ne sont pas exactement alignées puisqu'ils sont sur les deux moyeux décalés verticalement de l'épaisseur totale d'un moyeu. L'expérience montre que chaque méridien cherche une configuration plane, et celle-ci ne peut être que verticale, puisque le plan des orifices recevant les extrémités des méridiens est vertical. À partir du moment où une boucle entame son redressement, elle entraîne sa voisine dans le même mouvement et, de proche en proche, toutes suivent et viennent se bloquer dans la position verticale.

L'ensemble du mouvement qui part de la sphère engendrée par des demicercles méridiens jusqu'à la figure formée après translation et rotation relative de 180 degrés des moyeux décrit mécaniquement un modèle de gastrulation. En effet, la figure finale est une sphère deux fois revêtue, munie d'une ouverture à l'endroit où les méridiens s'entrecroisent. Chaque méridien décrit un cercle complet presque parfait, dont une moitié est un méridien de la sphère externe de la gastrula, et l'autre est un méridien de la sphère interne formant le système digestif.

Tout en maintenant l'angle de vissage de 180 degrés, on peut écarter légèrement les deux moyeux le long de la tige pour bien faire apparaître l'espace entre les deux sphères. Il suffit ensuite de dévisser un peu la poignée par rapport à la tige pour voir l'ouverture anale s'ouvrir et la gastrula régresser vers un bol. En continuant à dévisser et à écarter les deux pôles figurés par les moyeux, on retrouve la blastula.



4. Une boucle de fil bascule facilement quand l'angle α est petit.

Quel est l'intérêt d'un tel objet ? Il apparaît quand on considère la soudaineté de la fermeture et la création d'un espace enclos dans le réseau des fils d'acier. Ne pense-t-on pas à un piège et à une cage ? Imaginons que l'appareil soit maintenu dans la configuration du bol largement ouvert. Mettons un appât sur le sommet de la tige et attendons qu'un papillon rare se pose : on actionne le mécanisme, et l'insecte est emprisonné sans être blessé.

Notons que le même appareil pourrait être utilisé pour capturer des animaux marins. L'important est que le mécanisme de fermeture soit plus vif que l'animal et que le manche soit suffisamment long pour que la manipulation n'effraie pas la proie. D'autre part, si l'on dispose d'un long manche, on peut aussi utiliser le système pour attraper des fruits.

Le système a aussi des applications mathématiques, en raison de ses propriétés topologiques. Ce que l'on nomme le retournement de la sphère est une déformation qui permet de relier, par une famille continue de surfaces, une sphère dont l'intérieur est de couleur rouge et l'extérieur de couleur bleue, à la sphère retournée, rouge à l'extérieur et bleue à l'intérieur. Toute la question réside dans les règles imposées à la déformation : on ne doit jamais déchirer la surface et la courbure doit toujours rester limitée ; en revanche, la surface peut se traverser elle-même (voir *Le retournement de la sphère*, par Bernard Morin et Jean-Pierre Petit, *Pour la Science*, mai 1979).

Le modèle construit précédemment montre une manière de retourner la sphère : la gastrulation décrit un procédé pour passer d'une sphère à une sphère doublement revêtue (la gastrula). Au cours de cette déformation, le cercle équatorial de la sphère se contracte en un point et l'un des hémisphères (par exemple, l'hémisphère Nord) passe à l'intérieur de la sphère double, tandis que l'hémisphère Sud reste à l'extérieur. En échangeant les rôles des deux hémisphères

et en effectuant une « dégastrulation », on obtient une sphère retournée.

Le problème n'est alors pas complètement résolu, car si l'étape qui va de la sphère initiale à la sphère double est mathématiquement admissible, ainsi que l'étape symétrique, qui commence juste après la sphère double pour arriver à la sphère retournée, le passage par la sphère double viole certaines règles : la courbure cesse d'être bornée au moment où le cercle équatorial se contracte en un point.

Dans ces conditions, pourquoi ne pas se contenter d'aplatir la sphère sur un disque double, comme on le fait avec le modèle mécanique avec une rotation de 90 degrés des moyeux ? On échangerait alors les deux faces du disque et l'on regonflerait la sphère retournée. Là encore, l'opération n'est pas admissible, car, lors de l'échange des faces, la courbure deviendrait infinie en tous les points du bord du disque double, qui formerait une arête de rebroussement.

Malgré l'insuffisance de l'opération de gastrulation, un argument géométrique plaide pour l'utilisation de cette opération afin de retourner la sphère : au cours d'un retournement, le plan tangent en un point doit effectuer un tour complet sur lui-même, ce qui ne se produit pas avec le passage par le disque double ; on imagine donc que, même en le perturbant un peu, on n'obtiendra pas un retournement acceptable. En revanche, on a vu que les deux moyeux (et les plans tangents correspondants) subissent une rotation relative de 180 degrés pendant la gastrulation, et donc une rotation d'un tour entier au cours du retournement complet. Voilà ce qui incite à chercher un retournement de la sphère acceptable au voisinage de la gastrulation... Mais cela est une autre histoire.

François APÉRY est topologiste à l'Université de Haute-Alsace (Mulhouse).



Un guide fractal du jeu de ticktacktoe

IAN STEWART

Une forme familière en logique et en théorie des jeux.

Je suis obnubilé par une fractale ! Dans un article récent de cette rubrique (*Le triangle omniprésent*, *Pour la Science*, septembre 1999, p. 100), j'ai décrit plusieurs apparitions de la fractale nommée triangle de Sierpinski, que l'on obtient en éliminant successivement des triangles équilatéraux de plus en plus petits d'un triangle initial. Depuis, beaucoup d'entre vous m'ont signalé de nouvelles apparitions de cette structure. Patrick Grim et Paul Saint-Denis, de l'Université de Stony Brook, viennent de m'en indiquer un nouvel avatar, en logique mathématique.

Une fractale est une forme que l'on peut diviser en parties qui sont des versions réduites de la forme initiale. Une véritable fractale, tel le triangle de Sierpinski, a une structure exactement identique à toutes les

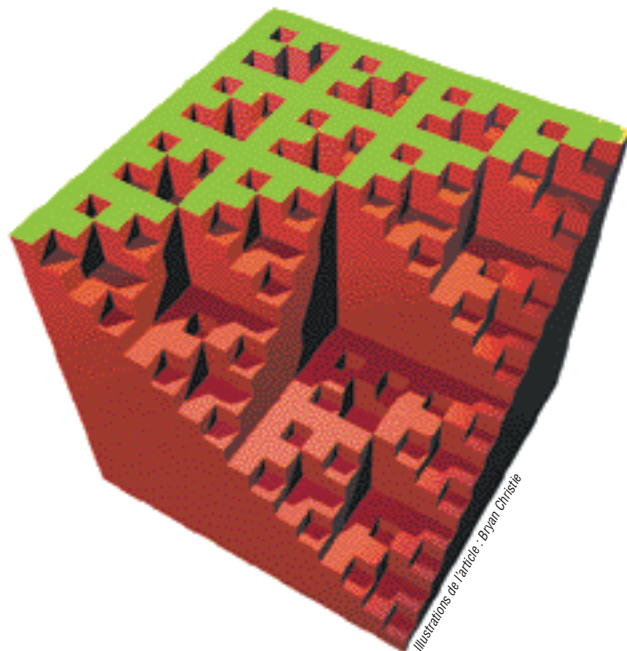
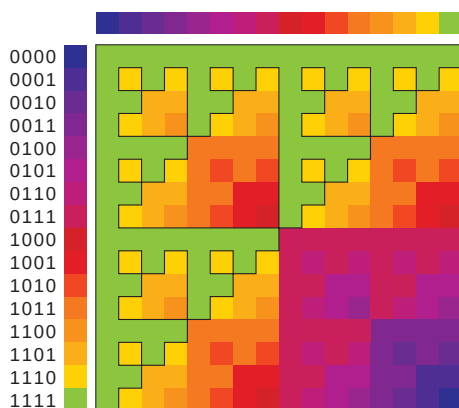
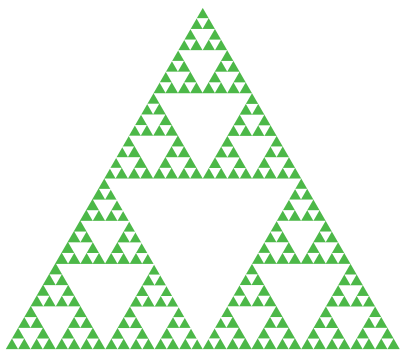
échelles ; chacune de ses parties ressemble au tout. En revanche, une quasi-fractale est une approximation d'une fractale : elle a une structure détaillée, mais seulement à certaines échelles. La structure d'une quasi-fractale ne se prolonge pas indéfiniment à des échelles de plus en plus petites, mais, comme l'œil humain ne distingue pas les tout petits détails, les quasi-fractales ont une allure fractale très convaincante. P. Grim et P. Saint-Denis ont mis au point un diagramme quasi fractal qui représente les jeux de ticktacktoe (*Fractal Images of Formal Systems*, in *Journal of Philosophical Logic*, vol. 26, n° 2, 1997, pages 181-222).

Le jeu de ticktacktoe est une variante du jeu de morpion qui se joue sur un réseau carré de trois cases de côté. À tour de rôle, deux joueurs marquent res-

pectivement une croix et un rond dans les cases, et le premier qui marque trois cases alignées (horizontalement, verticalement ou diagonalement) a gagné. Généralement, le joueur X a le trait, et une stratégie sans faille conduit à une partie nulle.

Combien de parties sont-elles possibles ? Au premier coup, le joueur X a neuf possibilités ; puis le joueur O en a huit, etc., de sorte que le nombre total de parties possibles est $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, soit factorielle 9 (ce que l'on note 9!), égal à 362 880.

Pour obtenir une quasi-fractale qui représente ces parties, partons d'une grand quadrillage de trois cases de côté, et divisons chaque case en un quadrillage de trois cases de côté (voir la figure 2). Le joueur X a neuf ouvertures possibles ; chacune sera repré-



1. Le triangle de Sierpinski (en haut à gauche) se retrouve en logique mathématique. En utilisant les numéros de ligne et de colonne des cases d'un quadrillage de 16 cases de côté, et en appliquant l'opérateur NAND, on obtient un nombre qui code des couleurs. Le quadrillage a alors une structure quasi-fractale. De même pour un codage par l'élévation des points (ci-dessus).

sentée par un des neuf sous-quadrillages. Par exemple, la partie qui commence par un marquage de la case supérieure gauche, par le joueur X, est représentée par un sous-quadrillage où la case supérieure gauche est marquée d'un X. Ce sous-quadrillage montre donc la partie après le premier coup. Chaque sous-quadrillage porte ainsi une croix dans une case particulière.

Examinons maintenant le sous-quadrillage où une croix apparaît dans le coin supérieur gauche. Le joueur O peut marquer n'importe laquelle des huit cases restantes. Aussi subdivise-t-on le sous-quadrillage en neuf sous-sous-quadrillages, afin de représenter les huit coups possibles du second joueur ; évidemment, ces sous-sous-quadrillages ont tous une croix dans la case supérieure gauche, et un O dans des cases différentes.

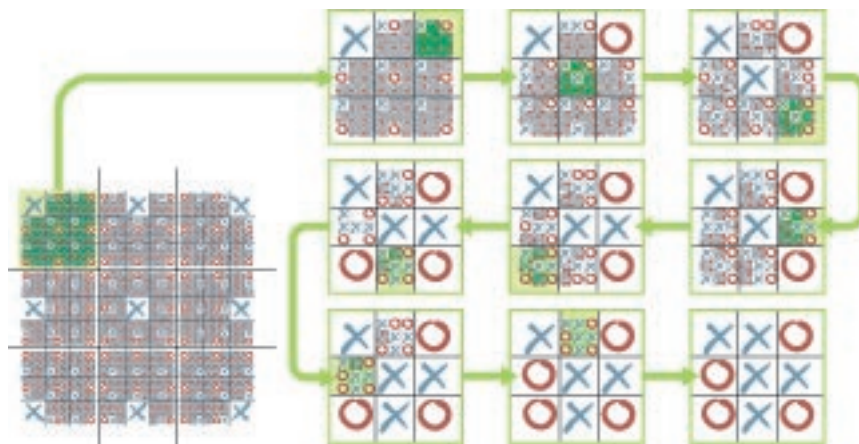
On peut continuer ainsi, en marquant tous les coups possibles dans des quadrillages de plus en plus petits. La figure finale a une structure quasi fractale, car les règles de construction sont récursives : les coups possibles à chaque étape sont les coups précédents. La fractalité n'est pas parfaite, car le jeu s'achève après un nombre fini de coups.

Examinons maintenant l'aspect logique. La forme la plus simple de logique mathématique classique est le calcul des propositions, qui considère des propositions qui sont vraies (on les note 1) ou fausses (0). Par exemple, la proposition P «Les poules ont des dents» a une valeur de vérité 0, car elle est fausse ; en revanche, la proposition Q «L'Afrique est un continent» a la valeur de vérité 1. On compose des propositions à l'aide d'opérateurs logiques tels que ET et OU. Avec les propositions P et Q précédentes, la proposition P ET Q est : «Les poules ont des dents et l'Afrique est un continent» ; elle est fausse (sa valeur de vérité est 0). On représente ainsi les valeurs de vérité de P ET Q par un tableau :

P	Q	P ET Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

On change la valeur de vérité d'une proposition quand on lui applique l'opérateur NON : NON P est une proposition fausse si la proposition P est vraie, et *vice versa*.

Il existe 16 tables de vérité possibles, pour deux propositions. On peut les désigner par des nombres à quatre chiffres binaires : 0000, 0001, 0010, 0011, etc. jusqu'à 1111 (en notation décimale, ces



2. Les parties possibles au jeu de ticktacktoe se représentent par une structure quasi fractale. Le quadrillage principal est subdivisé en quadrillages, eux-mêmes subdivisés, et ainsi de suite.

nombres sont 0, 1, 2, ..., 15). Cette liste conduit à une autre quasi-fractale. Pour la dessiner, on dessine un quadrillage de 16 cases de côté et on ajoute une bordure au-dessus de la ligne supérieure, afin d'identifier les colonnes avec les 16 nombres binaires (voir la figure 1). Puis on ajoute une bordure analogue sur la gauche, afin de numéroter les lignes. On choisit 16 couleurs différentes pour représenter les 16 nombres binaires, et on colorie les bordures. Choisissons maintenant un opérateur logique : par exemple, la barre de Sheffer, qui est représentée par le symbole « $|$ ». En informatique, cet opérateur est nommé NAND, car $P | Q$ est égal à NON(P ET Q). Sa table de vérité est :

P	Q	$P Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Pour chacune des cases du quadrillage 16×16 , utilisons pour la proposition P le numéro (à quatre chiffres binaires) de la ligne de la case, pour la proposition Q le numéro de la colonne de la case. Puis appliquons l'opération NAND, et cherchons les valeurs de vérité correspondantes. On obtient un nombre à quatre chiffres binaires, dont on cherche la couleur correspondante, que l'on utilise pour marquer la case du quadrillage 16×16 .

Par exemple, considérons la case de la cinquième ligne et de la onzième colonne. En notation binaire, ces numéros sont 0101 et 1011. En les utilisant respectivement pour P et Q , dans la table de vérité de $P | Q$, on obtient :

P	Q	$P Q$
0	1	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Le nombre de la dernière colonne est 1110, soit 14 en notation décimale. On colorie la case de la cinquième ligne et de la onzième colonne avec la couleur numéro 14.

Le résultat de ces calculs laborieux est représenté sur la figure 1. Les cases vertes, correspondant au nombre 1111, engendrent une forme très similaire à la structure de Sierpinski. Au lieu de colorier la figure, on peut aussi former une surface en codant le nombre calculé par une élévation. Par exemple, la hauteur de la case de la cinquième colonne et de la onzième ligne serait 0,875 (on divise 14 par 16 pour obtenir des valeurs comprises entre 0 et 1). De telles surfaces sont ce que l'on nomme des solides de valeurs. Dans le solide associé à l'opérateur de Sheffer, on voit clairement une structure de Sierpinski. La raison est simple : tout système formel qui se fonde sur la récursivité, jeu ou table de vérité, est à la base d'une quasi-fractale.

Réactions

En réponse à mon article sur les bœufs du soleil, Chris Rorres, de l'Université Drexel, me signale une solution de A. Nygrén, de l'Université d'Oulu (Finlande). A. Nygrén a décrit un algorithme qui décrit le problème en moins de cinq secondes, sur un ordinateur personnel équipé d'un microprocesseur Pentium II, où l'on exécute les programmes *Mathematica* ou *Maple*. Le site de C. Rorres conduit à cet algorithme (www.mcs.drexel.edu/~crrorres/Archimedes/Cattle/Solution2.html).