



Un guide fractal du jeu de ticktacktoe

IAN STEWART

Une forme familière en logique et en théorie des jeux.

Je suis obnubilé par une fractale ! Dans un article récent de cette rubrique (*Le triangle omniprésent*, *Pour la Science*, septembre 1999, p. 100), j'ai décrit plusieurs apparitions de la fractale nommée triangle de Sierpinski, que l'on obtient en éliminant successivement des triangles équilatéraux de plus en plus petits d'un triangle initial. Depuis, beaucoup d'entre vous m'ont signalé de nouvelles apparitions de cette structure. Patrick Grim et Paul Saint-Denis, de l'Université de Stony Brook, viennent de m'en indiquer un nouvel avatar, en logique mathématique.

Une fractale est une forme que l'on peut diviser en parties qui sont des versions réduites de la forme initiale. Une véritable fractale, tel le triangle de Sierpinski, a une structure exactement identique à toutes les

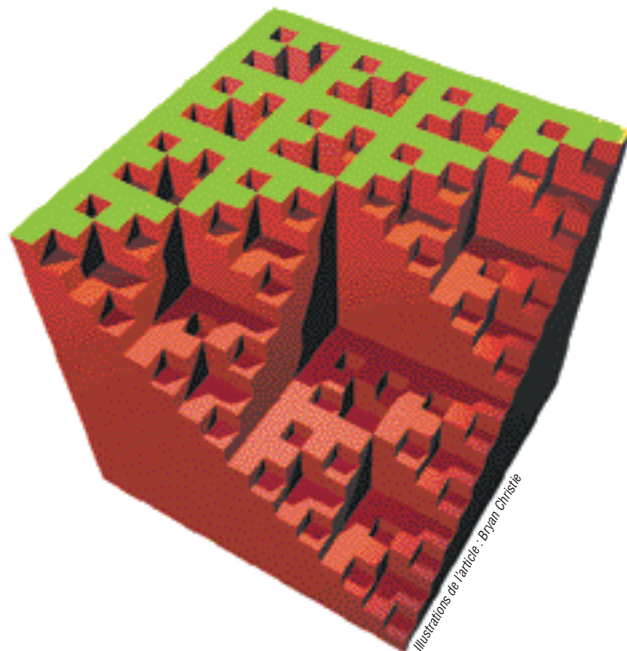
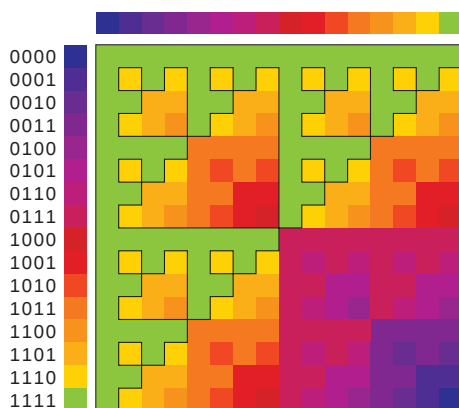
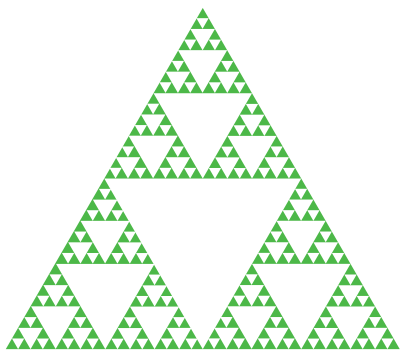
échelles ; chacune de ses parties ressemble au tout. En revanche, une quasi-fractale est une approximation d'une fractale : elle a une structure détaillée, mais seulement à certaines échelles. La structure d'une quasi-fractale ne se prolonge pas indéfiniment à des échelles de plus en plus petites, mais, comme l'œil humain ne distingue pas les tout petits détails, les quasi-fractales ont une allure fractale très convaincante. P. Grim et P. Saint-Denis ont mis au point un diagramme quasi fractal qui représente les jeux de ticktacktoe (*Fractal Images of Formal Systems*, in *Journal of Philosophical Logic*, vol. 26, n° 2, 1997, pages 181-222).

Le jeu de ticktacktoe est une variante du jeu de morpion qui se joue sur un réseau carré de trois cases de côté. À tour de rôle, deux joueurs marquent res-

pectivement une croix et un rond dans les cases, et le premier qui marque trois cases alignées (horizontalement, verticalement ou diagonalement) a gagné. Généralement, le joueur X a le trait, et une stratégie sans faille conduit à une partie nulle.

Combien de parties sont-elles possibles ? Au premier coup, le joueur X a neuf possibilités ; puis le joueur O en a huit, etc., de sorte que le nombre total de parties possibles est $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, soit factorielle 9 (ce que l'on note 9!), égal à 362 880.

Pour obtenir une quasi-fractale qui représente ces parties, partons d'une grand quadrillage de trois cases de côté, et divisons chaque case en un quadrillage de trois cases de côté (voir la figure 2). Le joueur X a neuf ouvertures possibles ; chacune sera repré-



1. Le triangle de Sierpinski (en haut à gauche) se retrouve en logique mathématique. En utilisant les numéros de ligne et de colonne des cases d'un quadrillage de 16 cases de côté, et en appliquant l'opérateur NAND, on obtient un nombre qui code des couleurs. Le quadrillage a alors une structure quasi-fractale. De même pour un codage par l'élévation des points (ci-dessus).

sentée par un des neuf sous-quadrillages. Par exemple, la partie qui commence par un marquage de la case supérieure gauche, par le joueur X, est représentée par un sous-quadrillage où la case supérieure gauche est marquée d'un X. Ce sous-quadrillage montre donc la partie après le premier coup. Chaque sous-quadrillage porte ainsi une croix dans une case particulière.

Examinons maintenant le sous-quadrillage où une croix apparaît dans le coin supérieur gauche. Le joueur O peut marquer n'importe laquelle des huit cases restantes. Aussi subdivise-t-on le sous-quadrillage en neuf sous-sous-quadrillages, afin de représenter les huit coups possibles du second joueur ; évidemment, ces sous-sous-quadrillages ont tous une croix dans la case supérieure gauche, et un O dans des cases différentes.

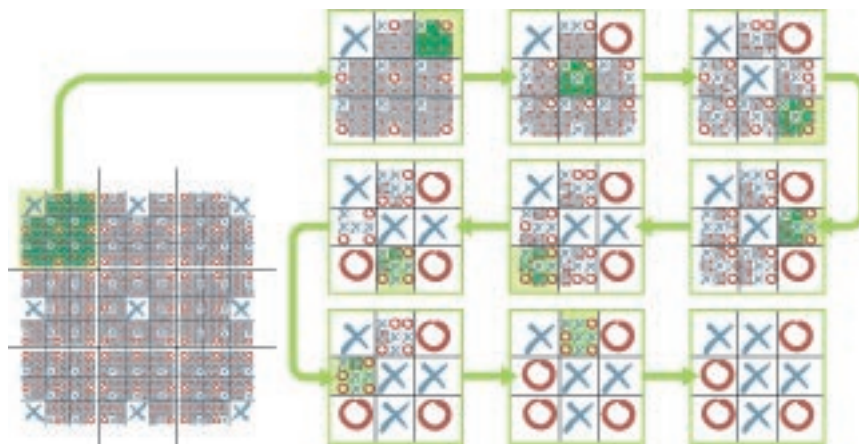
On peut continuer ainsi, en marquant tous les coups possibles dans des quadrillages de plus en plus petits. La figure finale a une structure quasi fractale, car les règles de construction sont récursives : les coups possibles à chaque étape sont les coups précédents. La fractalité n'est pas parfaite, car le jeu s'achève après un nombre fini de coups.

Examinons maintenant l'aspect logique. La forme la plus simple de logique mathématique classique est le calcul des propositions, qui considère des propositions qui sont vraies (on les note 1) ou fausses (0). Par exemple, la proposition P «Les poules ont des dents» a une valeur de vérité 0, car elle est fausse ; en revanche, la proposition Q «L'Afrique est un continent» a la valeur de vérité 1. On compose des propositions à l'aide d'opérateurs logiques tels que ET et OU. Avec les propositions P et Q précédentes, la proposition P ET Q est : «Les poules ont des dents et l'Afrique est un continent» ; elle est fausse (sa valeur de vérité est 0). On représente ainsi les valeurs de vérité de P ET Q par un tableau :

P	Q	P ET Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

On change la valeur de vérité d'une proposition quand on lui applique l'opérateur NON : NON P est une proposition fausse si la proposition P est vraie, et *vice versa*.

Il existe 16 tables de vérité possibles, pour deux propositions. On peut les désigner par des nombres à quatre chiffres binaires : 0000, 0001, 0010, 0011, etc. jusqu'à 1111 (en notation décimale, ces



2. Les parties possibles au jeu de ticktacktoe se représentent par une structure quasi fractale. Le quadrillage principal est subdivisé en quadrillages, eux-mêmes subdivisés, et ainsi de suite.

nombres sont 0, 1, 2, ..., 15). Cette liste conduit à une autre quasi-fractale. Pour la dessiner, on dessine un quadrillage de 16 cases de côté et on ajoute une bordure au-dessus de la ligne supérieure, afin d'identifier les colonnes avec les 16 nombres binaires (voir la figure 1). Puis on ajoute une bordure analogue sur la gauche, afin de numéroter les lignes. On choisit 16 couleurs différentes pour représenter les 16 nombres binaires, et on colorie les bordures. Choisissons maintenant un opérateur logique : par exemple, la barre de Sheffer, qui est représentée par le symbole « $|$ ». En informatique, cet opérateur est nommé NAND, car $P | Q$ est égal à NON(P ET Q). Sa table de vérité est :

P	Q	$P Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Pour chacune des cases du quadrillage 16×16 , utilisons pour la proposition P le numéro (à quatre chiffres binaires) de la ligne de la case, pour la proposition Q le numéro de la colonne de la case. Puis appliquons l'opération NAND, et cherchons les valeurs de vérité correspondantes. On obtient un nombre à quatre chiffres binaires, dont on cherche la couleur correspondante, que l'on utilise pour marquer la case du quadrillage 16×16 .

Par exemple, considérons la case de la cinquième ligne et de la onzième colonne. En notation binaire, ces numéros sont 0101 et 1011. En les utilisant respectivement pour P et Q , dans la table de vérité de $P | Q$, on obtient :

P	Q	$P Q$
0	1	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Le nombre de la dernière colonne est 1110, soit 14 en notation décimale. On colorie la case de la cinquième ligne et de la onzième colonne avec la couleur numéro 14.

Le résultat de ces calculs laborieux est représenté sur la figure 1. Les cases vertes, correspondant au nombre 1111, engendrent une forme très similaire à la structure de Sierpinski. Au lieu de colorier la figure, on peut aussi former une surface en codant le nombre calculé par une élévation. Par exemple, la hauteur de la case de la cinquième colonne et de la onzième ligne serait 0,875 (on divise 14 par 16 pour obtenir des valeurs comprises entre 0 et 1). De telles surfaces sont ce que l'on nomme des solides de valeurs. Dans le solide associé à l'opérateur de Sheffer, on voit clairement une structure de Sierpinski. La raison est simple : tout système formel qui se fonde sur la récursivité, jeu ou table de vérité, est à la base d'une quasi-fractale.

Réactions

En réponse à mon article sur les bœufs du soleil, Chris Rorres, de l'Université Drexel, me signale une solution de A. Nygrén, de l'Université d'Oulu (Finlande). A. Nygrén a décrit un algorithme qui décrit le problème en moins de cinq secondes, sur un ordinateur personnel équipé d'un microprocesseur *Pentium II*, où l'on exécute les programmes *Mathematica* ou *Maple*. Le site de C. Rorres conduit à cet algorithme (www.mcs.drexel.edu/~crrorres/Archimedes/Cattle/Solution2.html).



Marchons avec entrain

ROLAND LEHOUCQ

Le marcheur économise son énergie lorsque le balancement des jambes tire parti de l'action de la gravité.

Dis papa, c'est encore loin? «Tais-toi et marche!». Ainsi gourmands, les enfants perçoivent la marche comme une activité pénible et ennuyeuse. Ce mouvement, qui nous paraît naturel, ne l'est pas pour les bébés qui en acquièrent les compétences : la maîtrise de cette perte d'équilibre rattrapée de justesse demande des mois d'entraînement. En grandissant, l'enfant marche de manière plus naturelle, avec une régularité de mouvement analogue à celle d'un pendule. Par une analyse de sa mécanique, nous comprendrons mieux l'intérêt d'un pas pendulaire, «naturel», économe en énergie.

La jambe est assimilable à une tige rigide qui pivote autour de la hanche. Sous le seul effet de la gravité, ce pendule oscille avec sa période propre, le temps mis pour faire un aller-retour, période proportionnelle à la racine carrée de la longueur. Galilée avait constaté ce phénomène, nommé isochronie, exact pour des petites oscillations du pendule.

Comme pour la plupart des phénomènes régis par la gravité, la masse de la jambe n'intervient pas (si l'on néglige les frottements). En effet, la variation de

l'énergie cinétique ($\frac{1}{2}mv^2$, où m est la masse et v la vitesse) est égale à celle de l'énergie potentielle (mgh , g étant l'accélération de la pesanteur et h la hauteur dont s'élève le pendule par rapport à sa position au repos), de sorte que la masse m s'élimine.

Une jambe de 90 centimètres a une période d'oscillation pendulaire d'environ 1,6 seconde. En marchant au rythme d'un pas toutes les demi-périodes, soit 0,8 seconde, on laisse la gravité faire l'essentiel du travail nécessaire au mouvement de la jambe, ce qui apparaît le plus économique. Si le rythme réel de la marche est plus difficile à définir, car il dépend de nombreux facteurs (la forme de la jambe, le mouvement des articulations, le temps de contact avec le sol), il est facile de se convaincre que le balancement naturel de nos jambes adopte une cadence voisine de la demi-période pendulaire.

Quelle est la vitesse d'un marcheur? C'est le quotient de la longueur a du pas et du temps mis pour l'effectuer ($v = a/T$). La longueur du pas, qui dépend évidemment de la longueur de la jambe, c'est-à-dire de la taille du marcheur, est le pro-

duit de la longueur de la jambe et de l'amplitude de l'angle qu'elle balaie. Ainsi, le pas d'un habitant de Brobdingnag, les géants de plus de 20 mètres de haut rencontrés par Gulliver lors de ses voyages, mesure environ 9 mètres, à peu près douze fois le pas moyen d'un homme (0,75 mètre). Comme la période du balancement varie comme la racine carrée de la longueur de la jambe, la vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la dimension de la jambe.

Les personnes de grande taille ont donc une vitesse de marche naturelle supérieure. Les enfants en font l'expérience tous les jours : deux fois plus petits qu'un adulte, ils marchent 1,4 fois moins vite. Autre exemple : une mouche se déplace au sol à environ 10 centimètres par seconde. En marchant à 5 kilomètres par heure, nous parcourons 1,4 mètre en une seconde, 14 fois plus que la mouche. Notre allure serait identique à celle de la



Les grands marchent plus vite que les petits, car la vitesse de marche «naturelle» varie comme la racine carrée de la longueur de la jambe. En



revanche, la vitesse de course ne dépend pas de la longueur, mais de la section de la jambe : grands et petits courent à la même vitesse.