

5. La loi de l'inutilité des preuves complexes

Vladik Kreinovich et Luc Longpré ont prouvé, en utilisant les concepts et méthodes de la théorie de la complexité, que :

- Si un résultat est potentiellement utile, alors il n'est pas possible qu'il possède une preuve complexe.

Leur travail a comporté plusieurs étapes.

- Formulation d'une définition mathématique de la notion de résultat potentiellement utile. Selon eux, un résultat est utile s'il permet de prouver le bon fonctionnement d'un algorithme et qu'on ne peut pas substituer à cet algorithme un algorithme probabiliste (c'est-à-dire fonctionnant avec un risque d'erreur aussi petit qu'on le souhaite) dont le bon fonctionnement soit simple à établir.

- Formulation d'une définition mathématique de la notion de preuve complexe. Leur définition prend en compte à la fois le nombre d'étapes élémentaires de raisonnement de la preuve et les possibilités de simplification dues à d'éventuelles parties répétitives. Pour eux, une preuve complexe est une preuve longue, et qui le reste même après exploitation des parties répétitives.

- Utilisation de la théorie de la complexité pour prouver leur affirmation.

Le résultat de Kreinovich et Longpré est un exemple récent provenant de la théorie de la complexité de résultats mathématiques ayant un contenu philosophique intéressant et inattendu. Il est probable qu'il déplaira aux mathématiciens qui aiment justifier leurs travaux, même les plus difficiles, en évoquant de possibles applications futures.

tentons tout de même de le présenter, il en vaut la peine.

Les deux chercheurs, pour arriver à leur résultat, ont d'abord donné une définition mathématique de la notion de résultat potentiellement utile.

Pour eux, un tel résultat est un énoncé S , qui permet d'établir une formule du type «pour tout x , $P(x)$ », où $P(x)$ est facilement vérifiable (par exemple, une formule du type «si la somme des chiffres de x est un multiple de 9, alors x est un multiple de 9»).

Leur définition est justifiée, car ce sont les résultats de ce type qui assurent que les méthodes algorithmiques fonctionnent correctement : algorithmes de codage, algorithmes de recherche dans une base de données, algorithmes de tri de données, algorithmes de calcul numérique, algorithmes de simulation, etc.

Ensuite les deux chercheurs définissent une preuve complexe d'une manière fine et subtile (voir la figure 5).

Leur résultat, formulé avec plus de précision, est : si S n'a que des preuves complexes et permet de montrer que «pour tout x $P(x)$ », alors pour la quasi-totalité des données de taille raisonnable (les seules qu'on rencontre en pratique) $P(x)$ est vrai indépendamment de S . En quelques mots : si S est complexe, et que $S \Rightarrow$ (pour tout x $P(x)$) alors, sauf de manière exceptionnelle, on n'a pas besoin de S pour savoir que $P(x)$ est vrai.

En très court, si S est complexe, alors ce n'est pas un résultat potentiellement utile.

Ce résultat s'applique en particulier à la conjecture de Riemann (un résultat qui concerne la répartition des nombres pre-

miers et qui est considéré comme l'énoncé mathématique irrésolu le plus recherché des mathématiques aujourd'hui). Il a été prouvé par G. Miller et E. Bach que, si une forme généralisée de l'hypothèse de Riemann était vraie, alors il existait un algorithme efficace (l'algorithme de Miller et Bach) pour tester la primalité des nombres entiers en temps polynomial, c'est-à-dire efficacement. Cette situation a conduit de nombreux mathématiciens à croire que les recherches sur l'hypothèse de Riemann étaient utiles, même dans une optique d'applications pratiques.

EST-IL VRAIMENT UTILE DE DÉMONTRER RIEMANN ?

La situation créée par l'algorithme de Miller est qu'on dispose sans doute d'un algorithme efficace de test de primalité dont le bon fonctionnement dépend de la vérité de l'hypothèse de Riemann généralisée. Ce qu'énonce le résultat de Vladik Kreinovich et Luc Longpré est : si vraiment l'hypothèse de Riemann généralisée ne possède pas de preuve simple, alors l'algorithme de Miller pour des entiers de tailles raisonnables fonctionne correctement pour la quasi-totalité des cas qu'on peut lui soumettre. On n'a donc pas besoin en pratique de la démonstration de l'hypothèse de Riemann généralisée si l'on désire utiliser cet algorithme.

Cette inutilité pratique de l'hypothèse de Riemann dans le cas des tests de primalité est d'ailleurs corroborée par l'usage informatique réel : dans les applications cryptographiques où l'utilisation des nombres premiers est intensive, on se sert le plus souvent des méthodes probabi-

listes de test de primalité, c'est-à-dire de méthodes dont le bon fonctionnement est justifié par un raisonnement relativement simple, mais qui ne donnent un résultat que d'une manière probabiliste, autrement dit avec un risque, jugé négligeable, d'erreur.

TOUT N'EST PAS TERMINÉ

Notons, pour l'amusement, que le résultat de Vladik Kreinovich et Luc Longpré possède une démonstration assez courte (environ une page) : il n'est donc pas impossible, d'après ce qu'il nous apprend, qu'il soit un résultat concrètement utile !

Notons aussi qu'en toute rigueur, malgré les longues recherches faites à son sujet, il n'est pas logiquement exclu que la conjecture de Riemann possède une démonstration simple. Si c'est le cas, l'hypothèse de Riemann pourrait être pratiquement utile. Nous devons continuer à en rechercher la preuve, même si l'intérêt mathématique pur ne nous semble pas une raison suffisante de nous y intéresser.

Précisons que, même si, après une traduction mathématique sous une certaine forme particulière, on a réussi à établir que le difficile est inutile, il ne faut pas donner une importance excessive au résultat de Vladik Kreinovich et Luc Longpré qui fixent, dans leurs définitions, le sens des mots peut-être un peu rapidement.

Dans le cœur de tous les mathématiciens est inscrite la conviction que plus c'est difficile, plus c'est beau et important, et donc utile au moins par l'approfondissement et une meilleure vision que cela procure à notre perception du monde des entités abstraites. «Le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain», écrivait le mathématicien Jacobi dans une lettre adressée à son collègue Legendre en 1830. Il est peu vraisemblable que le formalisme mathématique s'empare un jour de cette vérité philosophique-là !

G. BACHELARD, *La philosophie du non*, Presses Universitaires de France, Paris, 1940.

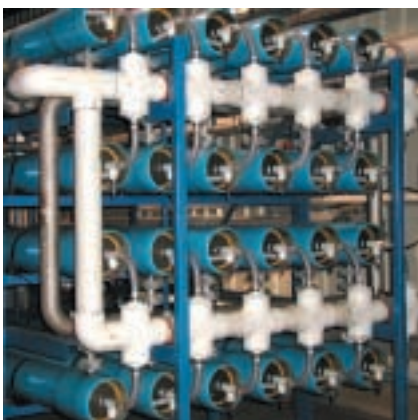
W. H. ZUREK, *Algorithmic Randomness and Physical Entropy*, in *Physical Review A*, n° 8, vol. 40, pp. 4731-4751, 1989.

The Philosophy of Mathematics, sous la direction de W. H. Hart, Oxford University Press, 1996.

Ming Li et Paul VITANYI, *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1997.

J.-P. DELAHAYE, *Information, complexité et hasard*, Hermès, Paris, 1999.

V. KREINOVICH et L. LONGPRÉ, *How Important Is Theory for Practical Problems ?*, in *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science (EATCS)*, n° 71, pp. 160-164, 2000.



Le droit au mélange

BERNARD CABANE • SYLVIE HÉNON

L'eau se déplace à travers les membranes par osmose. Ce phénomène permet de détruire les bactéries par déshydratation ou, en l'inversant, de dessaler l'eau de mer.

Aux temps héroïques de l'exploration pétrolière des régions tropicales, on protégeait de la gangrène les plaies infectées en les recouvrant de sucre, traitement encore utilisé aujourd'hui à l'hôpital pour les plaies profondes. Le sucre préserve aussi les confitures des proliférations bactériennes et le sel conserve viandes et poissons. Comment sel et sucre empêchent-ils la croissance bactérienne ? Par le phénomène d'osmose, important dans les mécanismes biologiques et industriels.

La plupart des bactéries sont des organismes unicellulaires. Remplies d'une solution aqueuse d'ions, d'acides aminés et de protéines, elles ne sont protégées de l'extérieur que par une membrane constituée d'une mince couche de lipides et de protéines, perméable à l'eau. Lorsque les bactéries sont plongées dans un milieu aqueux, l'eau entre et sort de la cellule à travers la membrane.

Plongeons une bactérie dans du sucre : comme il y a beaucoup plus de molécules de sucre à l'extérieur de la bactérie que de molécules à l'intérieur, la quasi totalité de l'eau traverse la membrane afin de diluer le sucre. La bactérie se déshydrate et meurt. En effet, selon le second principe de la thermodynamique, la situation la plus favorable est celle où les molécules d'eau se mélan-

gent équitablement avec toutes les autres molécules (les molécules internes à la bactérie et le sucre externe).

Inversement, le contact avec l'eau pure est dangereux pour les cellules de notre corps, parce qu'elles contiennent des liquides salés. Dans notre corps, elles sont en contact avec les fluides physiologiques, salés eux aussi. Si nous introduisons de l'eau pure dans un de ces fluides, nous déclenchons un transfert d'eau vers l'intérieur des cellules. Par exemple si, pour nettoyer nos yeux ou nos lentilles de contact, nous utilisons de l'eau pure au lieu d'une solution saline, en vertu de son «droit au mélange», l'eau passe dans les cellules de la cornée, ce qui crée un œdème.

L'ÉQUILIBRE OSMOTIQUE

Pour éviter que nos cellules ne gonflent ou ne dégonflent par des transferts d'eau intempestifs, les mélanges de l'eau avec les sels, à l'intérieur et à l'extérieur des cellules, doivent être équilibrés. Comme le métabolisme des cellules produit de l'eau, une régulation est nécessaire afin que notre teneur en eau n'augmente pas : cette régulation est assurée par les reins.

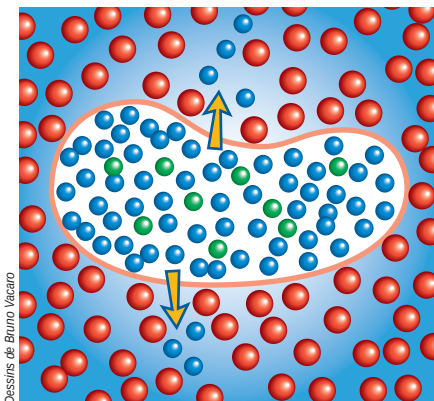
Si l'eau passe facilement à travers les membranes des cellules, le pas-

sage des sels et des molécules plus grosses est restreint. Ainsi, l'important pour l'équilibre osmotique n'est pas que les fluides interne et externe contiennent les mêmes composés en solution, mais que la proportion d'eau, en nombre de molécules, soit égale des deux côtés de la membrane. Par exemple, l'équilibre osmotique doit être assuré pour le sérum utilisé lors des perfusions, afin que les globules rouges du sang n'éclatent pas : on utilise des solutions salées, ou des solutions de glucose, qui nourrissent l'organisme tout en assurant son équilibre en eau.

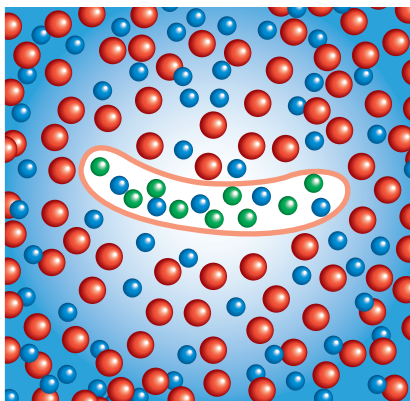
Loin du monde médical, la culture des tomates dans le désert illustre le maintien de l'équilibre osmotique ; comme l'eau douce y est rare, on arrose les plantations avec des saumures. La forte concentration en sels à l'extérieur des cellules végétales pourrait entraîner la sortie de l'eau cellulaire : afin d'éviter la déshydratation, les cellules végétales sécrètent une grande quantité de sucres ou d'acides aminés qui équilibrent les concentrations en eau à l'intérieur et à l'extérieur des cellules. Les tomates ainsi cultivées dans le désert sont plus sucrées que celles qui sont alimentées avec de l'eau douce.

Les cellules végétales diffèrent toutefois des bactéries ou de nos propres cellules car leur concentration interne en espèces dissoutes reste supérieure à celle du milieu extérieur : l'eau externe devrait alors entrer dans les cellules et les faire gonfler, mais la pression à l'intérieur de la cellule, supérieure à la pression extérieure, l'en empêche. L'application d'une pression s'oppose ainsi à l'osmose.

Peut-on reproduire ce phénomène à grande échelle ? Oui, à l'aide de membranes qui laissent passer l'eau, mais ni le sel, ni le sucre. Imaginons un récipient rempli d'eau pure divisé par une membrane en deux compartiments. Ajoutons du sucre dans un compartiment. L'eau se déplace alors vers le compartiment sucré toujours en vertu du «droit au mélange».



Dessins de Bruno Vacaro



Quand une bactérie est plongée dans une solution sucrée, la proportion d'eau à l'extérieur est inférieure à la proportion à l'intérieur (à gauche) : les molécules d'eau (boules bleues) traversent la paroi cellulaire jusqu'à rétablir l'équilibre. La bactérie se déshydrate et meurt (à droite).

Le niveau dans le compartiment sucré monte. À une certaine hauteur, la colonne d'eau soulevée crée une surpression qui s'oppose au flux des molécules d'eau diffusant dans le compartiment sucré. En appliquant au compartiment sucré cette même surpression, on s'oppose au passage de l'eau. Cette surpression mesure la force qu'il faut exercer pour équilibrer celle du mélange de l'eau et du sucre : c'est la pression osmotique de la solution de sucre, qui dépend de sa concentration.

Quelle est la valeur de cette pression? En ajoutant une pincée de sucre dans l'eau, peut-on soulever des colonnes d'eau sur de grandes hauteurs? Pour l'estimer il faut mesurer la variation d'une quantité thermodynamique dénommée entropie. L'entropie est une mesure du désordre et les systèmes évoluent vers une augmentation de cette grandeur. Initialement, elle était faible, car le sucre en forte concentration était confiné dans un compartiment : une égalisation des concentrations augmente le désordre, donc l'entropie. On calcule combien d'entropie l'ensemble des molécules gagne grâce au mélange.

On retrouve pour les solutions, ou pour le mélange de deux liquides, les mêmes formules que pour un gaz. La pression osmotique s'exprime ainsi, à faible concentration, par une sorte de loi des gaz parfaits. Pour un gaz, s'il y a une mole de molécules à 25 °C dans un volume de 24,5 litres, la pression est égale à une atmosphère. Pour une solution de sucre, s'il y a une mole de molécules de sucre (soit environ 360 grammes) dans un volume d'eau égal à 24,5 litres, la pression osmotique sera aussi de une atmosphère. Comme c'est le nombre de molécules d'espèces dissoutes qui compte, il suffit de mettre une demi-mole de sel (environ 30 grammes) dans 24,5 litres d'eau pour obtenir la même pression osmotique de une atmosphère, car le cristal de sel



Les liquides physiologiques contiennent plus de sels que l'eau douce, mais moins que l'eau de mer. Si notre peau était plus perméable à l'eau, un bain de mer nous déshydraterait. À l'inverse, en nous baignant dans une rivière, nous gonflerions rapidement.

se dissout en deux espèces ioniques Na^+ et Cl^- .

Dans notre corps la pression osmotique des fluides est élevée : en comptant tous les ions des sels, on arrive à une pression osmotique égale à plus de sept atmosphères, qui pourrait faire monter une colonne d'eau à 70 mètres de hauteur! Cette force énorme nous enjoint d'équilibrer les concentrations des fluides qui viennent en contact avec nos fluides internes. Nous pouvons toutefois nager dans une rivière ou dans la mer, mais nous sommes alors protégés par notre peau, qui est une barrière à travers laquelle l'eau passe trop lentement pour endommager nos cellules.

L'OSMOSE INVERSE

Au lieu de laisser monter la colonne d'eau, on peut pousser dessus. Si la pression appliquée est suffisante, l'eau quitte le mélange pour repasser à travers la membrane vers le compartiment non sucré, ou non salé. Ce mécanisme de passage forcé contre le droit au mélange est l'osmose inverse. Pourquoi ne pas dessaler l'eau de mer

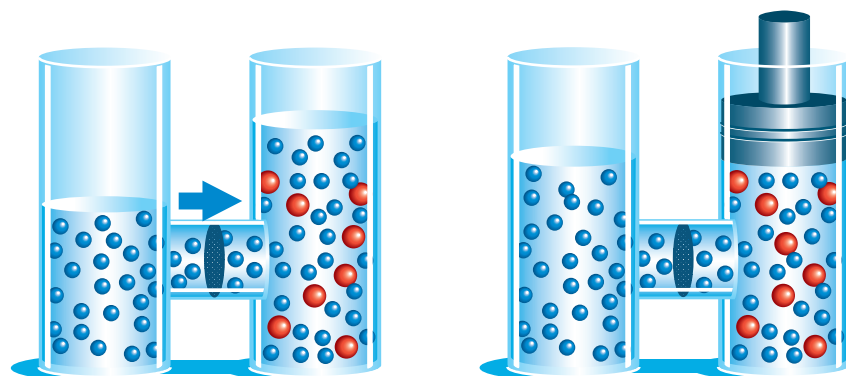
ainsi, en appuyant dessus? C'est l'une des méthodes utilisées, mais la pression à exercer est élevée, 25 atmosphères environ, car l'eau des mers contient encore plus d'ions que les fluides physiologiques (le cartouche représente une usine de dessalement). Le maintien de cette pression pour obtenir des quantités notables d'eau douce nécessite une énergie considérable. De surcroît, les membranes doivent résister au passage du sel sous des pressions de plusieurs dizaines d'atmosphères, tout en laissant passer un flux d'eau important. Aujourd'hui, on dispose de membranes en polymère organique qui laissent passer des flux d'eau bien supérieurs à ceux des membranes en boyaux utilisées par les chimistes du XIX^e siècle.

L'osmose inverse est l'une des méthodes les plus efficaces pour le dessalement de l'eau : l'énergie mécanique à fournir est environ dix fois inférieure à l'énergie thermique nécessaire pour vaporiser la même quantité d'eau. Le coût du dessalement par osmose inverse reste toutefois élevé, comparable à celui de la distillation qui utilise du pétrole, abondant et peu onéreux dans certains pays du Golfe. Mais les techniques évoluent : la production d'un mètre cube d'eau à partir d'eau de mer par osmose inverse nécessitait sept kilowatts heure il y a cinq ans, elle n'en requiert que trois aujourd'hui.

B. CABANE travaille au Laboratoire physique et mécanique des milieux hétérogènes de l'ESPCI (CNRS), **S. HÉNON**, au Laboratoire de biorhéologie et hydrodynamique physico-chimique à Jussieu.

R.P. RAND, *Raising water to New Heights*, in *Science*, vol. 256, p. 618, 1992.

C. BONNET-GONNET, L. BELLONI, B. CABANE, *Osmotic pressures of latex dispersions*, in *Langmuir*, vol. 10, p. 4012, 1994.



Dans deux récipients séparés par une membrane perméable à l'eau mais pas au sucre (en rouge), une différence de concentration de l'eau entraîne le passage de l'eau pour rétablir l'équilibre des concentrations : c'est l'osmose. L'eau traverse la membrane pour se mélanger au sucre, excepté si l'on applique une pression à la solution sucrée (à droite).



La sphère à cornes

ADRIEN DOUADY • LOÏC MANGIN

Une sculpture enchevêtrée nous entraîne dans les méandres de la topologie.

Dans le patio Sud du bâtiment du Centre de mathématiques et d'informatique de l'Université de Château-Gombert à Marseille trône une sculpture inhabituelle. Composée de matériaux polymères composites, elle est l'œuvre de Jean-Louis Lhermitte qui l'a nommée *La sphère à cornes*. Pourquoi une sphère, alors qu'elle ne ressemble en rien à la forme connue d'une orange ou de la Terre. Doit-on voir dans cette dénomination une bizarrerie d'artiste ? Non, elle est l'œuvre du mathématicien américain

James Alexander (1888 - 1971) qui a conçu cet objet en 1915.

D'une masse oblongue s'étendent deux prolongements, de la même façon que les bras prolongent le corps. Les deux extrémités de ces prolongements, en forme de portion d'anneaux, se ramifient également en deux plus petits arcs d'anneaux qui s'enlacent comme les doigts formant deux maillons ouverts d'une chaîne. À nouveau, les extrémités des "doigts" se ramifient, les extensions s'enlacent... (voir la figure 1), l'opération est répétée à l'infini pour l'objet théorique d'Alexander, d'un volume fini, qui a donc un caractère fractal : un agrandissement d'une région aux alentours d'un des points limites (les «extrémités ultimes» des ramifications) a la même apparence que l'ensemble tout entier. Dans la sculpture de J.-L. Lhermitte, les itérations à l'infini ne sont pas représentées, seules les cinq premières le sont : elles évoquent l'ensemble, comme toute représentation d'une fractale.

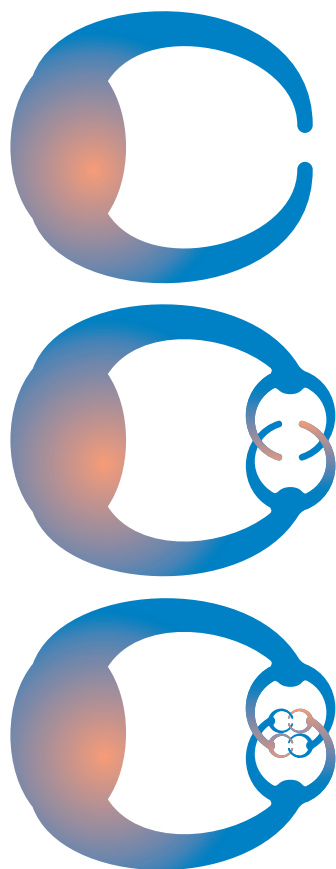
La topologie établit le rapport entre cet objet à l'allure végétale et une sphère ordinaire. La topologie est la science des objets en caoutchouc, donc déformables. Pour le topologiste, une chambre à air et une tasse à café sont équivalents ! Pourquoi ? Parce qu'il est possible de passer de l'une à l'autre par une transformation continue en poussant les parois en caoutchouc : le trou de la chambre à air devient l'anse de la tasse ; les deux objets sont des tores.

Dans des termes plus mathématiques, deux objets sont topologiquement équivalents (ou appartiennent à la même classe) lorsqu'il existe une bijection entre les points de la surface des deux objets : à chaque point de l'un correspond un point de l'autre. Cette définition est dite «intrinsèque», elle devient «plongée» quand une telle bijection existe aussi pour les régions délimitées — l'intérieur et l'extérieur — par les ensembles de points constituant les objets. Selon l'espace considéré, la première définition n'entraîne pas obli-

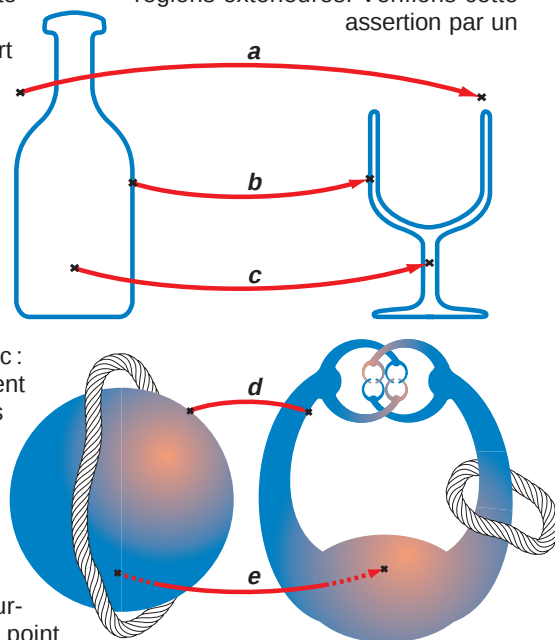
gatoirement la seconde : c'est ce que montre *La sphère à cornes*.

Dans un espace à deux dimensions, un plan, les deux définitions vont de pair. Cette alliance est au cœur du théorème de Jordan, du nom du mathématicien ardéchois Camille Jordan (1838 - 1922), qui stipule qu'une courbe fermée simple, c'est-à-dire sans croisement, sépare ce plan en deux régions. On peut établir une bijection entre les deux régions délimitées par la courbe et celles délimitées par un cercle. En apparence évidente, la démonstration de ce théorème est ardue. Dans un espace à trois dimensions, le théorème n'est plus vrai : la sphère à cornes en est une illustration.

La surface d'une sphère ordinaire est en bijection avec la surface de la sphère à cornes. La bijection existe aussi entre le volume renfermé par ces deux surfaces. En revanche, ce n'est plus vrai pour les régions extérieures. Vérifions cette assertion par un



1. LA SPHÈRE À CORNES est obtenue par déformation d'une sphère ordinaire dont deux extensions en arcs d'anneaux se ramifient, les ramifications se scindent à leur tour en deux, et ce jusqu'à l'infini : on obtient ainsi un objet fractal. En vignette à côté du titre, la représentation de la sphère à cornes symbolise les dédales du cerveau prolifique de James Conway, mathématicien à l'Université de Cambridge.



2. DEUX OBJETS, telles deux courbes fermées (en haut), sont topologiquement équivalents lorsqu'il existe une bijection entre leurs périmètres et les deux régions du plan qu'ils délimitent (a, b et c). Cependant, l'extérieur d'une sphère ordinaire n'est pas en bijection avec celui de la sphère à cornes (en bas) : une ficelle fermée peut être séparée de la première, mais pas de la seconde.