



7. LES IMPULSIONS INTENSES ÉVOLUENT à chaque passage dans la cavité d'un laser à impulsions ultracourtes sous l'influence de plusieurs effets. Quand une impulsion (a) traverse un milieu amplificateur, des effets non linéaires ajoutent des ondes de fré-

quence supérieure aussi bien qu'inférieure, et la dispersion étale les différentes longueurs d'onde de lumière (b). Un système de prismes (c) peut réaligner tous les modes, produisant une impulsion plus courte.

est considérable (10^{18} watts par centimètre carré). À l'aide de ces lasers, on obtient des plasmas qui peuvent à leur tour produire des impulsions ultracourtes de rayons X mous et cohérents, utiles pour la microscopie et la lithographie. À l'intérieur de ces plasmas, les champs électriques sont très élevés et les électrons ont un comportement relativiste : des explorations de physique fondamentale sont envisageables.

De gros appareillages ont délivré des faisceaux qui ont déposé une puissance lumineuse de 2×10^{21} watts par centimètre carré sur des cibles, avec une puissance de quelques pétawatts (10^{15} watts), 1 000 fois supérieure à la puissance dissipée par un éclair. Par des effets de pression de radiation, notamment, ces lasers accélèrent la matière 10^{22} fois plus que la gravitation terrestre, ce qui correspond à une accélération bien supérieure à celle que des corps subiraient à proximité d'un trou noir de la masse du Soleil ! Ils procurent des températures et des pressions comparables à celles de l'intérieur d'une étoile, laissant envisager des études de dynamique stellaire. En travaillant avec des intensités focalisées de 10^{30} watts par centimètre carré, les physiciens espèrent créer des paires de particules et d'antiparticules, et ils prévoient d'étudier le domaine de l'électrodynamique quantique, qui décrit le comportement quantique de particules chargées et du champ électromagnétique quantifié.

D'autre part, les physiciens tirent parti de la brièveté des impulsions. Certains ont utilisé la large bande spectrale des impulsions de moins de dix femtosecondes pour la mesure précise des fréquences optiques. Les modes d'un laser en verrouillage de mode sont espacés uniformément, comme les dents d'un peigne (voir la figure 4). Ce

«peigne» peut servir de référence pour la mesure de fréquences difficiles à évaluer directement. L'utilisation de cette technique permet de mesurer des énergies de transition atomique optique avec une précision mille fois meilleure que tout ce qui se faisait jusqu'à maintenant. Certaines constantes de la physique peuvent ainsi être déterminées : une de ces expériences a déterminé la «constante de structure fine» qui caractérise l'intensité de la force électromagnétique avec une précision de 120 pour un milliard.

Le record de brièveté des impulsions est aujourd'hui inférieur à cinq femtosecondes : il est détenu par des lasers à saphir dopé au titane, à l'École polytechnique de Zurich et à l'Institut de technologie du Massachusetts. Jusqu'à présent, les impulsions ultracourtes étaient décrites par une théorie où l'enveloppe des impulsions variait lentement comparée aux oscillations de la lumière, mais l'enveloppe des impulsions de cinq femtosecondes ne contient que deux périodes : on atteint donc les limites de la théorie. Bientôt, la durée de l'impulsion sera inférieure à celle d'une période.

Les lasers à impulsions ultracourtes, avec une gamme de puissance qui s'étale sur plus de 17 ordres de magnitude, sont présents dans de nombreuses disciplines scientifiques et techniques, de l'imagerie en profondeur des tissus vivants à l'élucidation de questions fondamentales sur l'Univers. Il y a quelques années, les impulsions femtosecondes ont permis l'observation de mécanismes moléculaires et de mouvements d'atomes ; de même, les impulsions de quelques attosecondes (une attoseconde vaut un millième de femtoseconde) montreront les mouvements des électrons, des protons et des neutrons.

Les nouveaux lasers gagneront progressivement tous les domaines. Après la médecine avec l'imagerie biologique et la chirurgie, ils devraient conduire à des découvertes pharmaceutiques importantes, révélant par exemple les mécanismes de certains médicaments. En micro-électronique, ils assureront la commande cohérente du courant électrique dans les composants à semi-conducteurs et dans les réseaux de communications optiques numériques.

Quand le laser fut inventé, certains l'ont qualifié de «solution à la recherche d'un problème». Aujourd'hui, les lasers sont omniprésents dans les lecteurs de codes à barres des supermarchés, dans les lecteurs de disques compacts, etc. Depuis leur apparition au milieu des années 1960, les lasers à impulsions ultracourtes s'imposent également, du laboratoire à la vie courante. Ils sont aujourd'hui la meilleure solution à nombre de problèmes concrets et participeront demain à l'amélioration de la qualité de vie.

John-Mark HOPKINS est physicien à l'Université de Saint Andrews, en Écosse. Wilson SIBBETT est professeur dans la même université et membre du Conseil d'ingénierie et de sciences physiques du Royaume-Uni.

Gérard A. MOUROU, Christopher P.J. BARTY et Michael D. PERRY, *Ultra-high-Intensity Lasers : Physics of the Extreme on a Tabletop*, in *Physics Today*, vol. 51, n° 1, pp. 22-28, janvier 1998.

Henry KAPTEYN et Margaret MURNANE, *Ultrashort Light Pulses : Life in the Fast Lane*, in *Physics World*, vol. 12, n° 1, pp. 31-35, janvier 1999.

Don ARNONE, Craig CIESLA et Michael PEPPER, *Terahertz Imaging Comes into View*, in *Physics World*, vol. 13, n° 4, pp. 35-40, avril 2000.



Mathématiques et philosophie

JEAN-PAUL DELAHAYE

Quelles leçons philosophiques peut-on tirer des mathématiques? Les résultats difficiles à démontrer mathématiquement sont-ils utiles?

Les rapports entre science et philosophie sont ambigus. La philosophie adopte souvent une attitude normalisatrice envers la science, fixant les critères de ce qui est «scientifique» : le philosophe se propose d'aider la science en lui donnant des conseils.

La philosophie a pu rendre d'authentiques services à la science, et de grands savants comme Albert Einstein, Kurt Gödel, Max Planck ou Jacques Monod ont accordé de l'importance à la pensée philosophique qui les a aidés à formuler et à défendre les audacieuses théories qu'ils proposaient.

Hélas, trop souvent, les conceptions avancées par la philosophie pour rendre compte de la science ont freiné ou retardé les nouveautés plutôt qu'elles ne les ont favorisées. Lors des développements de la théorie de l'évolution, de la théorie de la relativité, de la mécanique quantique et de la logique mathématique, la philoso-

phie a constitué un obstacle plus qu'elle n'a été une aide à la découverte.

Cette affirmation provocante nécessiterait de longues analyses pour être pleinement justifiée. Évoquons simplement Henri Bergson, qui, au nom d'une certaine intuition du temps s'opposa à la théorie de la relativité et se mit dans l'impossibilité de la comprendre. Pensons aussi aux conceptions *a priori* de ce que sont les mathématiques : Henri Poincaré et d'autres refusèrent les progrès de la logique mathématique – en particulier, de la théorie des ensembles, aujourd'hui universellement adoptée et dont aucun mathématicien ne peut se passer.

Pensons encore aux difficultés rencontrées par la théorie de l'évolution, au XIX^e siècle un peu partout, puis au XX^e siècle dans les pays communistes (dans l'affaire Lyssenko, c'est au nom d'une science prolétarienne fondée sur un matérialisme dialectique qu'on condamna la

génétique moderne). Aujourd'hui encore, aux États-Unis, des idées philosophiques fausses sur la vie interdisent à la pensée scientifique de faire valoir ses vues et en entravent la diffusion.

Rappelons aussi que la conception de l'espace que défendait Kant est incompatible avec celle aujourd'hui universellement admise en physique, où l'on considère que la nature de la géométrie (euclidienne, hyperbolique ou sphérique) doit se déterminer par l'observation et l'expérimentation, et non par la simple analyse *a priori* des données immédiates de la raison.

La vérité est que la science enrichit la philosophie et la renouvelle, plus que l'inverse.

Ce constat, que certains philosophes acceptent presque (voir, par exemple, *La philosophie du non*, de Gaston Bachelard), fait apparaître la philosophie comme une entrave à la science, en même temps qu'elle rend inacceptables les prétentions de certains philosophes à dire aux chercheurs comment ils doivent travailler.

1. Science et philosophie

La science fait de la philosophie en remettant en cause les conceptions du sens commun. La philosophie ne peut se permettre de telles remises en cause, car son support concret est limité, ce qui nuit à sa force de persuasion et lui interdit une audace que la science est, quant à elle, contrainte de mettre en œuvre pour franchir les obstacles qu'elle rencontre. Ces audaces de la science constituent des avancées dont les conséquences philosophiques sont parfois importantes.

Voici quatre exemples de champs philosophiques qui ont été bouleversés par des progrès scientifiques :

- la conception de la vie et de l'homme, par la théorie Darwinienne ;
- la conception du temps et de l'espace, par la théorie de la relativité ;
- la conception du déterminisme et des objets physiques, par la mécanique quantique ;

- la conception du raisonnement, de ses propriétés et de ses limitations, la conception du cerveau et de l'intelligence, par les avancées de la logique mathématique.

Bachelard avait perçu cette importance philosophique de la science : «Les progrès de la pensée scientifique contemporaine ont déterminé des transformations dans les principes mêmes de la connaissance.»

DE LA PHILOSOPHIE AUX MATHÉMATIQUES

En mathématiques, en logique et en théorie de la calculabilité, des problèmes considérés comme philosophiques deviennent, à la suite d'un progrès scientifique, des problèmes techniques – en l'occurrence des problèmes mathématiques – dont les solutions (parfois inattendues) sont riches en contenus philosophiques ; l'impression qui se dégage est que la science fait de la philosophie et s'y substitue.

Parmi les avancées incontestables des mathématiques sur des sujets classés autrefois «purement philosophiques», il y a, bien sûr, celles concernant l'infini. Envisageant celui-ci comme un domaine réservé des philosophes ou même des théologiens, les mathématiciens ont réussi en plusieurs étapes (géométrie, théorie des nombres, calcul infinitésimal, théorie

cantorienne des ensembles, théorie des grands cardinaux) à nourrir la notion d'infini et à constituer une série de domaines mathématiques nouveaux où le concept d'infini dévoile une richesse que la philosophie n'avait su déceler.

Au début du xx^e siècle, la logique mathématique a précisé la notion de preuve mathématique et a permis à la pensée philosophique sur les mathématiques de s'appuyer sur une multitude de notions précises (systèmes formels, calcul propositionnel et calcul de prédicats, modèles, etc.) et de résultats profonds (théorèmes de complétude, théorèmes de limitation, etc.). La philosophie des mathématiques en a été transformée, et si le débat y est devenu plus technique, la réflexion des philosophes qui acceptent ces avancées mathématiques n'en a été que plus pertinente et plus incisive (voir, par exemple, *The Philosophy of Mathematics*, W. H. Hart ed., Oxford University Press, 1996).

L'éclaircissement de la notion de calcul mécanique vers 1936 (par K. Gödel, A. Church, A. Turing) a posé le socle d'une discipline nouvelle (appelée théorie de la récursivité ou théorie de la calculabilité) qui a récemment conduit à de miraculeuses applications dans le domaine de la philosophie des sciences. La théorie de la complexité de Kolmogorov, un développement récent de la théorie de la calculabilité, est, de ce point de vue, d'une remarquable efficacité. On lui doit nombre de propositions dont la portée philosophique est incontestable et qui, dans certains cas, ont résolu des problèmes posés par les philosophes eux-mêmes.

Avant de donner quelques détails sur l'une des dernières contributions de ces théories à l'étude de la question «est-ce que les résultats mathématiquement difficiles sont pratiquement utiles ?», question incontestablement philosophique et intéressante, nous allons survoler rapidement les idées de base de la théorie de la complexité de Kolmogorov.

LE COMPLEXE, LE SIMPLE, LE HASARD

Formulée par R. Solomonoff, A. Kolmogorov et G. Chaitin vers 1965, la théorie de la complexité algorithmique, dénommée aujourd'hui complexité de Kolmogorov, a pour ambition de définir ce qu'est un objet simple, et propose une mesure absolue de la complexité.

L'idée est de donner un sens à l'évidence : la suite 010101010101010101 est plus simple que la suite 10000100110101110110. Pourquoi donc ? Parce que la première suite peut se définir brièvement, c'est «dix fois 01», alors que la seconde n'est pas exprimable avec la même concision : pour la décrire, on ne

2. Inutilité des résultats mathématiques difficiles

Dans la grande majorité des cas, les résultats mathématiques possédant des preuves compliquées sont d'une faible utilité pratique. Les résultats que l'on n'a pas encore prouvés aujourd'hui (qu'on dénomme des conjectures) n'ont sans doute pas de preuves simples. Malgré la fascination qu'exercent ces énigmes sur les mathématiciens et les amateurs, on ne peut attendre que peu de retombées concrètes de leurs solutions. Parmi les conjectures les plus étudiées dont l'inutilité pratique est presque certaine, indiquons :

- la conjecture de Goldbach : tout nombre pair est somme de deux nombres premiers (un million de dollars à gagner) : $24 = 11 + 13$;
- la conjecture des nombres premiers jumeaux : il existe une infinité de paires de nombres premiers espacés de deux unités (comme 11 et 13 ou 17 et 19) ;
- la conjecture des nombres parfaits impairs : il n'existe aucun nombre parfait impair (un nombre parfait est un nombre comme $6 = 1 + 2 + 3$ ou $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, qui est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même). C'est sans doute la plus vieille de toutes les conjectures mathématiques.
- la conjecture de l'équirépartition des chiffres de π : la fréquence de chacun des chiffres dans le développement décimal de π est 1/10.

Plus étrange, il semble que la démonstration de la grande conjecture de l'informatique « $P = NP$?» (qui concerne la classification des problèmes en fonction de la difficulté de leur résolution et qui a été dotée de un prix d'un million de dollars cette année) n'aurait pas de conséquences concrètes. Si on démontre que P est différent de NP (ce que les spécialistes pensent en général), aucun algorithme nouveau n'en résultera. Si l'on montre que $P = NP$, il apparaît probable que cela se fera d'une telle façon que rien de concrètement utile n'en sortira.

pourra guère faire mieux que d'en énumérer les éléments : «1, puis 0, puis 0, puis 0, etc.», ce qui est beaucoup plus long.

La théorie de la calculabilité, pour définir plus précisément la simplicité en termes de programmes, utilise les machines de Turing universelles, qui sont des sortes d'ordinateurs abstraits dont chaque ordinateur réel est une réalisation particulière, à un détail près : l'ordinateur réel ne possède qu'une mémoire de travail finie, alors que la machine de Turing est munie d'un ruban de mémoire indéfiniment extensible. La théorie suggère de choisir une machine de Turing universelle, U , et de dire qu'un objet O , représenté sous forme d'une suite de 0 et de 1 (ce qui est toujours possible comme l'informatique le démontre chaque jour), est simple s'il existe un programme court P pour la machine U qui engendre l'objet O . Un objet sera complexe si, au contraire, aucun programme court pour U ne donne O .

Cette définition ne dépend pratiquement pas de la machine U choisie, ce qui est rassurant et garantit l'invariance de la notion. La complexité de Kolmogorov de O , $K(O)$, est la taille (mesurée en nombre de chiffres binaires) du plus petit programme qui permet à la machine U d'engendrer O .

Cette idée très naturelle : «est simple ce qui s'exprime brièvement» a en particulier permis de définir la notion de suite aléatoire, problème que la théorie des probabilités avait contourné en utilisant une notion collective de probabilité qui interdisait qu'on puisse dire, d'une suite don-

née, qu'elle est aléatoire. La définition individuelle d'objet aléatoire avait été longuement recherchée par les philosophes, et par exemple Karl Popper, dans son ouvrage fondamental de 1934, *La logique de la découverte scientifique* (que Jacques Monod admirait beaucoup) y consacre plusieurs pages.

D'après la théorie de la complexité de Kolmogorov, une suite infinie de chiffres binaires est aléatoire si, par définition, à chaque fois qu'on en prend n chiffres, on obtient un objet dont la complexité de Kolmogorov est approximativement n . Dit autrement encore, il est impossible de comprimer les données contenues dans $(a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots)$: être aléatoire, c'est être incompressible.

Des liens ont alors été établis entre l'incompressibilité et l'imprévisibilité : une suite aléatoire est, par nature, imprévisible, et donc incompressible. Ces définitions ont donné un sens mathématique à tout un ensemble d'idées philosophiques vagues, et ce succès remarquable est apparu comme un petit miracle après les nombreuses tentatives infructueuses passées.

La théorie de la complexité de Kolmogorov a atteint une remarquable maturité dans les années 1990, et les lecteurs intéressés trouveront un tour d'horizon complet de cette merveilleuse théorie dans le livre profond et synthétique de Ming Li et Paul Vitanyi cité en bibliographie, et une présentation plus concise se trouve dans mon ouvrage *Information, complexité et hasard*, également cité en bibliographie. Parmi les progrès philosophiques que la