

principale faiblesse de son système : Archimède donne des noms à des ensembles de nombres, et non à des nombres eux-mêmes. Ainsi le nombre $\Pi = \Omega^\Omega$ est l'«unité de la deuxième période», et, même en français moderne, il est difficile d'écrire l'ordinal correspondant.

Un thé au harem d'Archimède

Archimède était très isolé, à Syracuse, ce qui explique son originalité : son invention de grands nombres n'a rien en commun avec les mathématiques de son temps. Son isolement est probablement responsable des petites incohérences de son texte : s'il avait pu discuter de son système avec un autre mathématicien, Archimède aurait probablement amélioré ses résultats. Cherchons donc les améliorations qu'Archimède – sans trop le vexer – aurait pu apporter à son «théorème».

Tout d'abord, il aurait dû donner des noms à ses grands nombres. Par exemple, s'il avait nommé Ω^Ω la période, alors Π^Π aurait été la périodième période, qu'Archimède aurait pu nommer, en extrapolant les ordinaux grecs existants. Ainsi le grand nombre Π^Π aurait été atteint.

Cependant, Archimède aurait dû commencer par donner des noms directement à tous ses nouveaux nombres. Une méthode directe aurait consisté à nommer *deuxième myriade* la myriade de myriades ; la *troisième myriade* aurait été la myriade de deuxièmes myriades ; et ainsi de suite jusqu'à la *myriadième myriade*. Cette notation pour les petits cas a été utilisée par Diophante. Elle simplifie la loi des exposants : le produit d'une m -ième myriade et d'une n -ième myriade est une $m+n$ -ième myriade.

Cependant, si le but est seulement de nommer de très grands nombres, et non de donner un système complet de numération, on peut aller beaucoup plus loin. On commence par nommer la myriadième myriade une *grande myriade*. On continue avec la grande myriadième grande myriade, qu'on nomme la *très grande myriade*. La très grande myriadième très grande myriade sera l'*énorme myriade*.

On utilise de nouveau la nomenclature d'Archimède en nommant la grande myriade la *période*, la très grande myriade la *deuxième période*, l'énorme période la *troisième période*. Le procédé conduit à la *périodième*

Le nombre de grains de sable dans l'Univers

Les hypothèses d'Archimède

- Au plus 10 000 grains de sable dans un grain de pavot (sphérique).
- Au plus 40 diamètres de grains de pavot sont contenus dans le diamètre d'un doigt.
- Au plus 10 000 diamètres d'un doigt – au plus – sont dans un stade (une mesure ancienne de distance de l'ordre de 200 mètres).
- La Terre est une sphère dont le périmètre est inférieur à trois millions de stades.
- La distance entre le centre de la Terre et le centre du Soleil est inférieure à 10 000 diamètres de la Terre.
- L'Univers est une sphère, le Soleil est au centre, et la Terre tourne autour du Soleil selon un cercle. Le rapport du diamètre de l'Univers au diamètre de l'orbite de la Terre autour du Soleil est inférieur au rapport entre le diamètre de l'orbite de la Terre et son diamètre.
- Le périmètre d'un cercle est supérieur au triple de son diamètre.
- Le volume d'une sphère est proportionnel au cube de son diamètre.

D'après les hypothèses d'Archimède, pourriez-vous trouver une borne supérieure pour le nombre de grains de sable dans un Univers rempli de sable ?

La réponse

1. Soit D_u le diamètre de l'Univers, D_o le diamètre de l'orbite de la Terre autour du Soleil, D_t le diamètre de la Terre.

La dernière hypothèse physique s'écrit : $D_u/D_o < D_o/D_t$.

L'avant-dernière hypothèse affirme que D_o/D_t est inférieur à 10 000, donc $D_u < 10^4 D_o$.

Encore une fois, l'hypothèse $D_o/D_t < 10^4$ donne : $D_u < 10^4 \cdot 10^4 \cdot D_t = 10^8 D_t$.

L'hypothèse sur le périmètre de la Terre donne :

$D_t < 10^6$ stades, en raison de l'avant dernière hypothèse.

Donc : $D_u < 10^8 \cdot 10^6$ stades = 10^{14} stades.

Puisqu'il y a moins de 10 000 diamètres de doigts dans un stade, on a :

$D_u < 10^4 \cdot 10^{14} \cdot D_d = 10^{18} D_d$, où D_d est le diamètre d'un doigt.

Puisqu'il y a moins de 40 diamètres de grains de pavot dans un doigt :

$D_u < 40 \cdot 10^{18} \cdot D_p = 4 \cdot 10^{19} D_p$, où D_p est le diamètre d'un grain de pavot.

D'après la dernière hypothèse, le volume V_u de l'Univers satisfait l'équation :

$V_u < (4 \cdot 10^{19})^3 V_p = 64 \cdot 10^{57} V_p < 10^{59} V_p$, où V_p est le volume d'un grain de pavot..

D'après la première hypothèse, un grain de pavot contient au plus 10^4 grains de sable, donc le nombre de grains de sable dans l'Univers est inférieur à $10^{59} \cdot 10^4$, soit 10^{63} .

Notons que le diamètre maximal de l'Univers, d'après Archimède, est égal à 10^{14} stades. Sachant qu'un stade est environ égal à 200 mètres, on obtient ainsi un rayon de 10^{12} kilomètres environ, soit une année-lumière.

période. Ces périodes croissent beaucoup plus vite que les périodes définies par Archimède, mais ces nouvelles périodes ne sont plus capables d'exprimer tous les nombres.

En notation moderne, une myriade correspond à $\mu = 10^4$, et une grande myriade à $\mu = \mu^\mu = 10^{4 \cdot 10^4}$: c'est la période π_1 . Soit π_2 la deuxième période. En utilisant la formule $(10^a)^b = 10^{ab}$, on trouve : $\pi_2 = \pi_1^{\pi_1} = 10^{4 \cdot 10^4 \cdot (10^4 + 1)}$, valeur supé-

rieure à 10 à la puissance 10 à la puissance 10 000. De même, la troisième période serait supérieure à 10 à la puissance 10 à la puissance 10 à la puissance 10 000. En général, la périodième période est d'un ordre de grandeur bien supérieur aux nombres conçus par Archimède. Ainsi, on peut calculer que la périodième période a une valeur supérieure à celle d'une tour de puissances de 10 à 40 000 étages.

Ilan VARDI est mathématicien à l'Institut des hautes études scientifiques, IHES, à Bures-sur-Yvette.

<http://www.ihe.fr/~ilan/archimedes.html>

Archimède, *Cœuvres*, texte établi et traduit par C. Mugler, Les Belles Lettres,

Paris, 1970-1971.

I. VARDI, *Archimedes' Cattle Problem*, in *American Mathematical Monthly*, vol. 105, pp. 305-319, 1998.

Le thé au harem d'Archimède, film de Mehdi Charef, 1985.

L'infini en Chine

JEAN-CLAUDE MARTZLOFF

Le calcul numérique a joué un rôle clé dans la perception que la Chine a eu de l'infini.



Wang Anjie, Jiezi yuan huazhuan (Manuel de peinture du jardin de grains de moutarde)

En Chine, l'infini et l'indéfiniment grand ou l'indéfiniment petit ont surtout été abordés à propos de problèmes de dialectique, de mathématiques, de cosmologie ou de synchronisation des cycles planétaires. À chaque fois, ces problèmes ont été traités pour eux-mêmes. Bien qu'il existe ailleurs, ce mode de perception de l'infini domine en Chine. Il s'oppose à celui des autres grandes civilisations de l'Antiquité et du Moyen Âge, qui ont plutôt abordé l'infini au travers de la métaphysique.

Au III^e siècle avant notre ère, les logiciens chinois élaborent des paradoxes qui rappellent les idées des sophistes grecs de la même époque. En Chine, ils sont les premiers à s'intéresser à la notion d'infini. Puis, au premier millénaire de notre ère, les traductions chinoises de centaines de textes indiens de théologie bouddhique propagent l'idée d'un monde infini, sans origine ni fin, qui évolue au rythme du cycle des réincarnations, répétées à l'infini. Les Chinois inventent des systèmes de notation pour représenter des nombres très grands ou très petits, correspondant aux intervalles de temps qui interviennent dans ce cycle.

Parallèlement, les mathématiciens chinois calculent la valeur approchée de π , établissent les formules de l'aire du cercle, du volume de la sphère et de la pyramide. Ils utilisent des raisonnements similaires à ceux, antérieurs, des mathématiciens grecs. On ignore si ces raisonnements sont issus exclusivement de la pensée chinoise ou empruntés à la civilisation hellénistique, dont les idées auraient atteint la Chine par la route de la soie, soit directement, soit indirectement, en passant d'abord par l'Inde.

Les cosmologistes, les astrologues et les astronomes s'interrogent sur l'infini spatiale ou temporelle de l'Univers. Pour déterminer la Grande Origine (l'origine commune des cycles solaires, lunaires, planétaires et calendaires), ils font des calculs avec de très grands nombres, qui rappellent la «grande année» platonicienne.

Sophistes et mathématiciens

La dynastie Zhou s'affaiblit à l'époque des «Royaumes Combattants» (de 403 à 222 avant notre

ère), marquée par des guerres incessantes. Pendant cette période troublée, des penseurs s'intéressent à la logique et à la dialectique. Des rhétoriciens, conseillers des princes, essaient de trouver les limites du langage à partir de paradoxes dont quelques-uns mettent en jeu l'infini, ou plus exactement l'illimité, le non-borné. À la fin du IV^e siècle avant notre ère, Hui Shi, Premier ministre du roi Hui de Wei, rhétoricien et auteur d'un code de lois aujourd'hui perdu, illustre l'infinie divisibilité spatiale d'un segment de droite par dichotomie : «Il restera toujours quelque chose d'un bâton d'un pied [de longueur] dont on prend chaque jour la moitié, même au bout de dix mille générations.» Son raisonnement est similaire à celui du sophiste grec Zénon d'Élée, selon lequel une flèche ne parvient jamais à son but, car elle doit d'abord parcourir la moitié de la distance qui l'en sépare, puis la moitié de la moitié, et ainsi de suite. Hui Shi affirme même qu'il est à la fois impossible et possible d'accumuler l'infiniment petit : «Ce qui n'a pas de dimension ne peut pas être accumulé,

1. PORTRAIT IMAGINAIRE du mathématicien Liu Hui, peint par Jiang Zhaohe, à Pékin, en 1980. Même s'il ne s'appuie sur aucun document historique, ce portrait donne un visage à un «héros national» : le père des mathématiques chinoises. Les Chinois se sont intéressés à l'infini par l'intermédiaire des grands nombres, tel le nombre de configurations possibles d'un échiquier de *weiqi*, ce dernier mot signifiant échecs par encerclement (un jeu plus connu sous son nom japonais de *go*, ci-dessus).



mais finit pourtant par atteindre un millier de li [le li est une unité de mesure chinoise].» Toutefois, il n'explique pas ce paradoxe. Les sinologues ont envisagé plusieurs contextes auxquels il pourrait se rapporter : un débat d'atomistes et de non-atomistes sur l'infinie divisibilité des objets du monde matériel, un débat de géomètres sur la dimension du point ou l'épaisseur du plan, une démonstration des limites du langage au moyen de phrases absurdes. Hui Shi entreprend peut-être une sorte de « déconstruction » du langage en juxtaposant des assertions dépourvues de sens, sans rapport les unes avec les autres. Ses phrases à propos de l'infini, rassemblées par Zhuangzi, le maître chinois de l'irrationnel, appuient cette dernière hypothèse : certaines sont effectivement absurdes et, de surcroît, sans rapport ni avec l'infini ni avec l'atomisme (par exemple, « la tortue est plus longue que le serpent » ou encore « un chien blanc est noir »).

À la fin du III^e siècle, l'infini apparaît pour la première fois en Chine, dans sa dimension mathématique, dans un texte de Liu Hui, qui commente les *Neuf Chapitres de procédés calculatoires*. Ce dernier ouvrage contient la synthèse des connaissances mathématiques jusqu'à l'époque des Han antérieurs (de 220 à 206 avant notre ère), la dynastie sous laquelle ils auraient été compilés pour la première fois.

Le mathématicien Liu Hui remarque que la racine carrée de certains nombres ne peut pas se calculer exactement et explique que l'opération se poursuit parfois indéfiniment. Il calcule cette racine chiffre par chiffre et parle des décimales du résultat en ces termes : « Les petits chiffres qui n'ont pas de nom [qui ne sont pas associés à un nom d'unité de mesure] correspondent à des numérateurs de fractions dont les dénominateurs valent successivement 10, 100, 1 000... » Ainsi, il aborde la notion d'infini par l'intermédiaire du calcul et du développement décimal illimité, qu'il a intuitivement découvert.

Liu Hui s'intéresse aussi à des processus algorithmiques susceptibles de se prolonger sans que l'on sache par avance s'ils vont s'arrêter. Sa méthode de calcul de l'aire du cercle et de la valeur de π en est un exemple. Elle consiste à encadrer le cercle entre deux suites illimitées de polygones et de roues dentées à $2n$ côtés, à partir de $n = 3$ (voir la figure 2). Liu Hui affirme qu'à la longue « le polygone se confond



2. L'AIRES DU CERCLE. Au III^e siècle, le mathématicien chinois Liu Hui, dans son commentaire des *Neufs Chapitres de procédés calculatoires* (reproduit ci-dessus), calcule l'aire du cercle en l'encadrant entre deux séries indéfinies de polygones réguliers inscrits (tel le polygone en bleu) et de « roues dentées » (telle la roue en vert). Si P_n = aire du polygone régulier inscrit à n côtés et R_n = aire de la roue dentée à n côtés, alors $P_n < \text{aire du cercle} < R_n = P_n + 2(P_{2n} - P_n)$. Quand n devient assez grand, étant donné les approximations que fait Liu Hui, R_n devient numériquement égal à P_n .

avec le cercle», sans préciser davantage sa pensée. Il veut probablement dire qu'en menant les calculs assez loin il obtient une valeur numérique de l'aire du polygone égale à celle de la roue dentée correspondante. Selon le nombre de chiffres avec lesquels les opérations intermédiaires sont effectuées, la valeur de π obtenue est plus ou moins précise : elle est de 157/50 (3,14) d'après les calculs de Liu Hui et de 355/113 (dont le développement décimal contient les six premiers chiffres de π) d'après ceux de Zu Xuan, fils du mathématicien Zu Chongzhi (429-500), qui utilise la même technique de calcul. En s'engageant dans de tels calculs, Liu Hui met le doigt sur un processus infini, ou plutôt indéfini (dont les limites ne sont pas connues à l'avance).

Nombres immenses et nombres infimes

Pour calculer l'aire du cercle, les démarches chinoise (celle de Liu Hui) et grecque (celle d'Archimède, voir *Les mathématiques, science de l'infini*, par Javier de Lorenzo Martínez, page 29) sont toutes les deux fondées sur des polygones dont le nombre de côtés double sans cesse, mais leur esprit s'oppose : Archimède s'appuie sur des pos-

tulats, des axiomes, des théorèmes et un raisonnement par l'absurde, tandis que Liu Hui se fonde exclusivement sur des calculs algorithmiques, justifiés de façon intuitive et visuelle.

Pour calculer des volumes, l'opposition est moins flagrante. Liu Hui établit le volume de la pyramide en la disséquant en une infinité d'éléments géométriques de plus en plus petits (voir la figure 3), à la manière d'Euclide dans le cinquième théorème du livre XII des *Éléments*, sans que sa technique dépende de calculs réitérés à précision variable, comme dans le cas de l'extraction de la racine carrée et du calcul de π . De même, dans le cas de la sphère, Liu Hui parvient au résultat un peu comme Archimède dans la *Méthode à Ératosthène*, en s'appuyant sur un cas particulier du principe de Cavalieri : pour déduire les volumes à partir des surfaces, la version chinoise de ce principe affirme que, si deux volumes de même hauteur sont tels que le rapport des surfaces de leurs sections reste constant, quel que soit le niveau auquel on effectue la coupe, alors ils sont égaux. Le volume est envisagé comme l'accumulation d'une infinité de tranches infiniment minces, ce qui rappelle le paradoxe de Hui Shi sur l'impossibilité d'accumuler ce qui est dépourvu de dimension.

Pour appréhender les nombres indéfiniment grands ou indéfiniment petits, les Chinois inventent des séries de termes inspirés des textes sanscrits indiens. Analogues à nos millions, milliards et billions, ces séries servent à nommer des puissances de dix de plus en plus grandes, mais elles se prolongent beaucoup plus loin. Les plus courantes commencent par 11 termes qui n'ont pas de signification particulière, mais se prolongent par *henghesha*, *buke-siyi*, *wuliangshu*, des expressions imagées qui signifient respectivement le «nombre de grains de sable du Gange», l'«impensable» et le «non-mesurable». Ces termes sont investis d'une connotation théologique éloignée des courants de pensée majoritaires dans le monde chinois (surtout du confucianisme), davantage préoccupés par des problèmes d'organisation politique de la société que de métaphysique.

Selon la façon d'attribuer une valeur à un terme donné de la série en fonction du terme précédent, les Chinois obtiennent trois séries dites «du degré inférieur», «du degré moyen» et «du degré supérieur» (les termes supérieurs à la myriade valent respectivement dix fois le terme précédent, 10^4 fois ce terme ou son carré).

Les Chinois ont aussi considéré des puissances de dix décroissantes jusqu'à *chana*, un mot d'origine sanscrite qui signifie «un instant», c'est-à-dire la plus petite unité de temps envisageable.

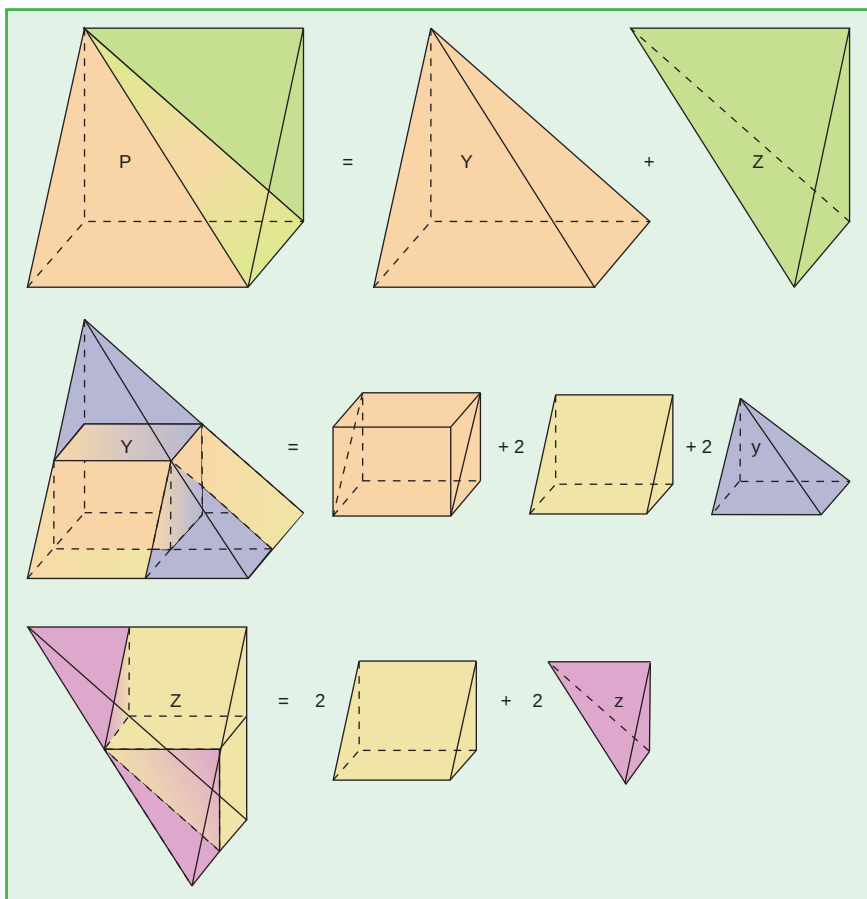
L'intérêt de ces représentations est purement théorique et spéculatif : aucune situation pratique ne nécessite de recourir à des nombres d'une taille aussi inhabituelle. Aussi l'on ne s'étonnera pas de constater que la représentation d'un nombre à l'aide des séries précédentes n'est pas immédiate, dès lors que la règle qui régit la succession

des puissances les unes à partir des autres est plus complexe qu'une simple multiplication par dix : cela n'a pas d'importance si l'on ne fait que réfléchir abstraitement sur l'existence de très grands ou très petits nombres. En revanche, les écrire explicitement est difficile. Dans un recueil de notes, le polygraphe Shen Gua (1031-1095) essaie d'exprimer par écrit la solution du problème combinatoire suivant : quel est le nombre de configurations possibles d'un échiquier de *weiqi*? Ce jeu, plus connu sous son nom japonais, le *go*, se joue sur les intersections d'un damier de 361 cases, chaque intersection pouvant recevoir soit un pion noir, soit un pion blanc, soit rien. Shen Gua ne parvient pas à effectuer complètement les calculs et à trouver la réponse exacte, soit $3^{(19 \times 19)} = 174\,089 \dots 7\,603$, qui se compose de 173 chiffres. En revanche, il imagine à cette occasion un système de représentation approchée des grands nombres, fondé sur la multiplication répétée du nombre 10 000 par lui-même.

Le problème de Shen Gua en rappelle un autre, célèbre en Europe depuis le Moyen Âge, où l'on cherche à déterminer le nombre total de grains de blé posés sur les cases d'un échiquier, le nombre de grains posés sur chaque case doublant à chaque nouvelle case remplie. La solution est égale à $2^{64} - 1$, un nombre très grand, mais encore petit comparé à celui de Shen Gua. Dans ces problèmes, c'est encore le calcul qui conduit à envisager l'infiniment grand et l'infiniment petit, plutôt que la métaphysique.

Les cycles astronomiques et la Grande Origine

Sous la dynastie des Han postérieurs (de 25 à 220), l'astronome Qi Meng est le premier à postuler que l'Univers est illimité dans le temps et dans l'espace. Pourtant, on ne trouve aucune réflexion substantielle sur l'infini dans la littérature scientifique ou philosophique chinoise postérieure aux Han. Au contraire, les Chinois semblent indifférents à la cosmologie. Pourtant, ils s'intéressent à l'astronomie pour déterminer la date de la conjonction du Soleil, de la Lune et des cinq planètes (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne). Cette conjonction bénéfique, en vertu des principes de l'astrologie chinoise, servait d'origine au décompte du temps dans le calendrier chinois. On la



3. LE VOLUME DE LA PYRAMIDE. Pour faire apparaître la pyramide Y, Liu Hui décompose le prisme P de sorte que $P = Y + Z$. Comme il connaît le volume du prisme $V_p = 1/2 \text{ largeur} \times \text{longueur} \times \text{hauteur}$, il lui suffit de montrer que $Y = 2Z$ pour prouver que le volume de la pyramide Y vaut $1/3 V_p$. Pour y parvenir, il dissèque Y et Z. Il constate ainsi que les divers éléments de la dissection sont dans la proportion du simple au double, mais avec un petit «reliquat», y et z, dont les éléments sont semblables à Y et Z, avec des dimensions divisées par deux, et pour lequel il faut vérifier à nouveau $y = 2z$. Pour y parvenir, il réitère la même décomposition indéfiniment, de façon à obtenir à chaque fois des reliquats de plus en plus petits. À la limite, $Y = 2Z$. La technique est intuitive, mais elle peut être présentée sous forme rigoureuse.

nomme la «Grande Origine». Elle était censée survenir à minuit, le jour du solstice d'hiver. À partir de cette date, les jours et les années étaient numérotés à l'aide du cycle de 60 (un nouveau cycle commence tous les 60 jours ou tous les 60 ans). Puis les Chinois ont voulu que la Grande Origine coïncide aussi avec le début du mois anomalistique (l'intervalle de temps qui sépare deux passages de la Lune à son périégée) et draconitique (l'intervalle de temps qui sépare deux passages de la Lune à son nœud ascendant, l'une des intersections de l'orbite lunaire avec l'écliptique terrestre). Dans le cas le plus complet, les Chinois ont calculé la date de la Grande Origine comme étant le point de départ de 11 cycles (cinq pour les planètes, un pour le Soleil, trois pour la Lune et deux pour le calendrier).

Ces préoccupations ont à nouveau fourni aux Chinois des raisons de s'intéresser aux très grands nombres : pour déterminer la date de la Grande Origine, ils ont calculé le plus petit multiple commun de certains ou de la totalité des cycles précédents. Les périodes correspondantes étant mutuellement incommensurables, ils ont reculé la Grande Origine de plus en plus loin dans le passé, il y a des milliers, puis des millions et enfin des centaines de millions d'années, dans le cas le plus complet. Avec la réforme de l'astronomie chinoise, promulguée en 1281, l'idée des cycles a été abandonnée et, dès lors, l'astronomie chinoise a cessé de taquiner les très grands nombres.

En dehors des exemples précédents, les quelques autres infinis de la culture chinoise ont presque tous émergé de processus calculatoires. Le plus frappant d'entre eux concerne les séries infinies de fonctions trigonométriques, introduites en Chine par les ouvrages mathématiques européens que les missionnaires jésuites ont apporté aux XVII^e et XVIII^e siècles. Les mathématiciens chinois du XVIII^e et du XIX^e siècle ont abordé le sujet à partir de calculs algébriques, sans lésiner sur la taille des nombres, qui atteignait parfois plus de 50 chiffres.

Si les sophistes et les logiciens de l'Antiquité avaient bénéficié d'une plus grande audience, si leurs théories n'avaient pas été associées aux charmes supposés fallacieux de la rhétorique, la notion d'infini en Chine s'en serait trouvée modifiée. L'importance croissante au cours du temps du confucianisme



4. LES MILLE BOUDDHAS de l'une des grottes du site de Dunhuang (au Nord-Ouest de la Chine) illustrent l'idée d'un monde infini, véhiculée par le bouddhisme en Chine à partir du premier millénaire de notre ère. Cette infinitude est symboliquement représentée par les très grands nombres (ici, par les mille bouddhas).

dans le monde chinois, surtout à partir du XI^e siècle, a probablement joué un rôle majeur à cet égard : dans ses *Entretiens familiers*, Confucius explique qu'il serait vain de s'intéresser aux dieux, aux esprits et plus généralement à la métaphysique et à tout ce qui paraît fonciè-

rement inconnaissable. Bien que la réflexion chinoise ne manque pas d'envolées spéculatives, ceux qui s'y sont essayés n'ont guère été suivis, et la question de l'infini n'a jamais retenu très longtemps l'attention des penseurs chinois, sauf des bouddhistes.

Jean-Claude MARTZLOFF est sinologue au Centre de recherche en civilisation chinoise du CNRS, à Paris.

Jacques GERNET, *Le monde chinois*, Armand Colin, Paris, 1999.

Jean-Claude MARTZLOFF, *A History of Chinese Mathematics*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

Jean-Claude MARTZLOFF, *Chinese Mathematical Astronomy*, in *Mathematics Across Cultures, The History of Non-Western Mathematics*, sous la direction d'He-

laine Selin, pp. 373-407, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

Joël BRENIER, *Notation et optimisation du calcul des grands nombres en Chine*, in *Nombres, astres, plantes et viscères*, sous la direction d'Isabelle Ang et Pierre-Étienne Will, Collège de France, Institut des hautes études chinoises, pp. 89-111, Paris 1994.

Kiyosi YABUUTI, *Une histoire des mathématiques chinoises*, Belin-Pour La Science, 2000.

Thābit ibn Qurra et l'infini numérique

TONY LÉVY

Face aux thèses d'Aristote, longtemps dominantes en philosophie, un savant arabe du IX^e siècle eut sur l'infini un point de vue aussi original qu'audacieux.



Jusqu'à la Renaissance, la conception d'Aristote a dominé tous les débats concernant l'infini. Commentée, précisée, expliquée, amendée par les uns, elle fut, plus rarement, récusée par d'autres. Sa portée est tout à la fois physique, cosmologique, mathématique, philosophique et théologique. Cet aspect de l'histoire de la notion d'infini est primordial : c'est dans l'unité de ces divers registres du savoir, dans les tensions qui les relient ou les opposent, que l'on saisit la dynamique du questionnement sur l'infini. Il nous faut donc retracer les grandes lignes de la théorie aristotélienne de l'infini et indiquer la nature des premières oppositions qu'elle a suscitées : on mesurera ainsi la nouveauté et la hardiesse du point de vue développé sur cette question par Thābit ibn Qurra, de Ḥarrān (836-901).

L'infini est inachèvement

La pensée d'Aristote s'enracine dans un questionnement sur la structure du monde. La science de la nature – la «physique» pour Aristote – et l'analyse du mouvement qui en est le socle conduisent à affronter la question de l'infini : l'infini existe-t-il ? Si oui, en quel sens ? Le mouvement, une grandeur physique (une longueur, par exemple) ou le temps sont autant de notions soumises à l'alternative : être limité ou échapper à la limite. Puisque «la nature est principe de mouvement»,

que le mouvement relève du continu et que la divisibilité du continu est «sans terme» (c'est-à-dire sans fin), la question de l'infini est posée. Retenons ce point essentiel, qui oppose Aristote aux écoles de pensée atomistes : la division d'une grandeur physique est sans terme ; il faut donc rendre compte de cette propriété qui caractérise la divisibilité d'une grandeur telle qu'une ligne, une surface ou un solide.

Dans une première description, qui n'est pas encore une définition, on dira avec Aristote : «est infini (*apeiron*)» ce qu'on peut «par nature parcourir, mais qui ne se laisse pas parcourir et n'a pas de fin (*peras*)». L'idée de «parcours», de «traversée», et la métaphore spatiale qu'elle charrie, nous pousse à camper l'analyse sur le territoire du quantifiable. C'est bien dans la catégorie de la quantité, du «combien», qu'Aristote entend inscrire sa définition de l'infini. Qui dit quantité dit grandeur ou nombre et, pour mesurer ou compter, il faut pouvoir distinguer le tout de ses parties, et poser ainsi, d'emblée, que le tout en question est «partageable», c'est-à-dire «divisible». L'infini concerne trois notions. La grandeur, qui est «divisible à l'infini» ; le nombre, qui est «composable à l'infini» (aussi grand que soit un nombre, il en est un qui est plus grand) ; le temps, qui est «composable et divisible».

La première conclusion d'Aristote est négative : l'infini n'existe pas comme totalité, comme «être actuel»,

comme forme achevée. Cette impossibilité vaut aussi bien pour une totalité corporelle que pour une totalité incorporelle, substance ou principe. En particulier, le monde en tant que grandeur physique est fini, clos par la «dernière» des sphères célestes.

Toutefois, pour Aristote, l'infini existe selon un autre mode : en puissance. Il s'agit d'un mode d'existence inférieur, subordonné à l'être actuel, mais qui n'en est pas moins réel. L'infini en puissance, qui est possibilité, virtualité, s'exprime dans cette propriété de la grandeur continue : aussi loin que je la divise, je peux encore poursuivre la division. Aristote écrit ainsi dans sa *Physique* : «Mais l'infini se trouve être le contraire de ce que l'on dit. En effet, il n'est pas ce qui n'a rien à l'extérieur de soi, mais c'est ce dont quelque chose est toujours à l'extérieur de lui : c'est cela, l'infini [...]. Est donc infini ce dont, quand on le prend selon la quantité, il est toujours possible de prendre quelque chose à l'extérieur.»

L'infini n'est qu'«en puissance»

Cette divisibilité sans terme du continu se double d'une autre propriété. On peut la formuler ainsi : divisez un segment de droite en deux, puis un des deux sous-segments ainsi obtenus (dont la longueur vaut alors la moitié de celle du segment initial) à son tour en deux, et ainsi de suite ; cette division ou dicho-

tomie n'a pas de terme, comme on l'a dit. Si, de plus, vous réunissez les sous-segments successivement produits par cette dichotomie, vous vous «rapprochez» du segment initial ; et plus le nombre des sous-segments est grand, plus vous vous rapprochez du segment fini initial. En s'écartant quelque peu de la lettre du texte d'Aristote, mais non de son esprit, on pourrait dire que l'infini ainsi conçu est un détour nous permettant de retrouver le fini (le segment initial), sans jamais toutefois épuiser le fini. Cela fait bien sûr songer à ce que nous nommons, aujourd'hui, la «convergence» d'une série géométrique : plus l'entier n est choisi grand dans la somme $S_n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n$, plus le résultat se rapproche de 1 ; on dit que la somme S_n converge vers 1, ou que la limite de S_n est 1. On se gardera toutefois d'attribuer à Aristote l'idée moderne de «limite», qui n'a rien à voir avec son propos.

S'agissant du nombre, il sera dit «augmentable à l'infini en puissance». Il suffit de penser au nombre de sous-segments produits par la division répétée d'un segment de droite : quel que soit le nombre (de sous-segments) considéré, on peut encore l'augmenter. Et de même que la division du segment ne s'achève jamais, il ne saurait y avoir un nombre ultime, un nombre «infini actuel».

Le troisième volet de l'analyse aristotélicienne concerne le temps, défini par le mouvement, et par ce biais, associé à la grandeur. Pour Aristote, le temps est à la fois divisible et augmentable. Le mouvement des sphères célestes est «sans commencement et sans fin», ce qui l'amène à faire apparaître l'infini «dans le temps et la génération des hommes». Ce thème, communément désigné comme celui de l'«éternité du monde» (le monde a toujours été là!), suscitera de nombreuses objections, surtout chez les partisans des religions révélées, soucieux de fonder philosophiquement l'idée de la création du monde par un acte divin. Soulignons que les premiers débats suscités par la théorie d'Aristote eurent un point de départ théologique.

Jean Philopon, un penseur chrétien d'Alexandrie (VI^e siècle), est à l'origine de plusieurs arguments dirigés contre l'idée de l'éternité du monde. Ces arguments, qui utilisent les définitions mêmes d'Aristote relatives à l'infini, visaient à ruiner les conclusions de ce dernier concernant l'infinité du temps,

pour en arriver à justifier l'idée d'un monde créé par la volonté souveraine de Dieu. Ce faisant, Jean Philopon mettait à l'épreuve la théorie aristotélicienne de l'infini, suscitant ainsi chez les partisans d'Aristote, surtout au Moyen Âge, amendements et développements nouveaux.

L'infini aristotélicien confronté à ses paradoxes

La principale critique de Philopon, au demeurant pertinente, exploitait le paradoxe suivant : l'éternité temporelle affirmée par Aristote ne réintroduit-elle pas par la fenêtre l'infini actuel qu'il prétend chasser par la porte ? À cette occasion, Philopon recourait fréquemment à l'un des arguments développés par Aristote pour récuser la possibilité d'un infini actuel. Précisons pourquoi il revêt

une portée considérable pour l'histoire qui nous concerne ici.

Supposons, le temps de la réflexion, qu'existe réellement une substance (voire un principe, comme le pensaient par exemple les pythagoriciens) dont la seule essence est d'être un infini. Pour Aristote, la définition d'un être en épuise la réalité ; autrement dit, la définition et la réalité d'une telle substance sont une seule et même chose. Si l'infini est une substance divisible, comment définir ses parties ? On répondra : de même que toute partie d'une substance comme l'air ne peut être définie que comme air, de même une partie de l'infini-substance ne peut être définie, à son tour, que comme de l'infini. Il en résulte que l'infini serait divisible en infinis. Arrivé à ce stade, Aristote conclut laconiquement : «Mais il est impossible que la même chose soit plusieurs infinis.»



1. DES SAGES AU TRAVAIL. Cette miniature arabe, qui date du XIII^e siècle, est l'œuvre du miniaturiste Al-Wasiti et fait partie des illustrations d'un classique de la littérature islamique, *Les séances d'Al-Hariri*.

Comment réfuter l'argument «un infini ne peut être plus grand qu'un infini»

«**N**ous l'avons aussi questionné au sujet de la proposition invoquée par nombre de commentateurs respectables, à savoir qu'un infini ne peut être plus grand qu'un infini. Il [Thābit] nous a montré la fausseté de cette proposition, encore une fois sur l'exemple du nombre.

En effet, le nombre en soi est infini, et dans le nombre, les nombres pairs, pris séparément, sont infinis ; et il en est de même pour les nombres impairs ; or ces deux catégories sont égales, et chacune d'elles est la moitié du nombre dans sa totalité. Leur égalité [la catégorie des nombres pairs et celle des impairs] se montre à partir de ce que, de deux nombres successifs, l'un est pair et l'autre est impair. Que le nombre [dans sa totalité] soit le double de chacune d'elles [la catégorie des nombres pairs et celle des impairs], cela vient de ce qu'elles sont égales et qu'elles l'épuisent [le nombre] et qu'il ne contient aucune partie en dehors d'elles. Chacune d'elles est donc bien la moitié du nombre [dans sa totalité].

Il est clair aussi qu'un infini peut être le tiers d'un infini, ou le quart ou le cinquième ou toute autre partie du nombre considéré en lui-même. En effet, les nombres qui ont un tiers [les entiers multiples de 3] sont infinis et ils représentent le tiers du nombre dans sa totalité. Et les nombres qui ont un quart [les entiers multiples de 4] représentent le quart du nombre dans sa totalité ; et les nombres qui ont un cinquième représentent le cinquième du nombre dans sa totalité. Et l'on procède de même pour les autres parties du nombre. Cela vient de ce que nous trouvons dans tout triplet de nombres consécutifs, l'un qui a un tiers [un entier multiple de 3] ; dans tout quadruplet de nombres consécutifs, l'un qui a un quart ; dans tout quintuplet, l'un qui a un cinquième ; et dans toute suite de nombres consécutifs, quel qu'en soit le nombre, on trouve que l'un d'entre eux a une partie désignée d'après le nombrement [dans toute suite de n nombres consécutifs, il y a un nombre qui a une n -ième partie, c'est-à-dire un entier multiple de n]...»

Bien des auteurs ont compris ainsi cet argument d'impossibilité : si un tout est infini, et qu'une partie de ce tout est aussi infinie, alors, le tout étant nécessairement plus grand que sa partie, nous aurions un infini plus grand qu'un infini ; voilà qui est absurde. Rapportée au cadre conceptuel fixé par Aristote, cette «absurdité» signifie que l'infini n'est pas une entité, que c'est un processus d'inachèvement ; à ce titre, il n'y a aucun sens à le traiter comme une quantité, à distinguer différents infinis, à comparer des infinis, bref à le manipuler comme une forme.

Quoi qu'il en soit, tous ceux qui se plaçaient sur le terrain de la théorie aristotélicienne, pour la défendre ou pour en récuser certaines conclusions, ont abondamment invoqué ce type d'argument. Si le monde est sans commencement, écrira ainsi Philopon, alors on doit dire que le nombre des hommes engendrés jusqu'au temps de Socrate est infini ; en y ajoutant le nombre des hommes engendrés depuis Socrate jusqu'à aujourd'hui, on obtiendrait «quelque chose plus grand que l'infini». Autre paradoxe énoncé par Philopon : quand le Soleil accomplit une révolution, la Lune en effectue 12 ; en supposant le monde sans commencement, on doit bien admettre, d'une

manière ou d'une autre, que les révolutions du Soleil sont infiniment nombreuses, et que, par conséquent, les révolutions de la Lune représentent un infini douze fois plus grand qu'un autre infini – autre «absurdité». On devine la conclusion de Philopon, à savoir que le point de départ de ce raisonnement doit être récusé, et que les aristotéliciens eux-mêmes doivent convenir que le monde a bien un commencement.

Les critiques de Philopon rencontrèrent un écho considérable dans les traditions grecque, arabe, hébraïque et latine ; elles donneront naissance à une foule d'arguments dérivés. Par exemple, certains théologiens musulmans opposeront aux philosophes arabes aristotéliciens un argument qui fera fortune dans les débats de la scolastique médiévale. Supposons le monde sans commencement. Alors le nombre des âmes séparées des corps après la mort, et qui survivent éternellement à ces corps, constitue bien un nombre infini, et actuel ; n'est-ce pas là une contradiction dans le raisonnement des philosophes (aristotéliciens), qui devrait les contraindre à reconnaître que la thèse de l'éternité du monde est (philosophiquement) intenable ? Maniant les outils logiques et conceptuels du discours philosophique avec

une efficacité souvent redoutable, ces théologiens concluaient, du reste, à l'impossibilité de toute espèce d'infini, potentiel comme actuel.

On s'en doute, les répliques des philosophes, soucieux de légitimer la cohérence de la pensée d'inspiration aristotélicienne, n'ont pas manqué ; et les arguments déployés à cette occasion ont nourri le débat sur l'infini, qui se prolongera dans les traditions théologiques et philosophiques d'expression latine et hébraïque. La critique du point de vue aristotélicien s'est aussi exercée dans d'autres directions. Beaucoup plus rarement, il est vrai, mais avec au moins autant de rigueur, certains ont adopté un infinitisme de principe, qui les a conduits à remettre en cause l'ensemble du dispositif conceptuel aristotélicien. C'est le cas de Thābit ibn Qurra.

Abū'l-Ḥassan Thābit ibn Qurra al-Ḥarrānī, le Sabéen (mort en 901) est l'un des plus prestigieux représentants de la science arabe du IX^e siècle. Originaire de Ḥarrān, en Anatolie, il fut remarqué pour ses dons exceptionnels par les trois frères Banū Mūsā, savants et mécènes de Bagdad, qui l'intégrèrent aux cercles de savants encouragés et financés par le calife. Traducteur du grec en arabe, d'œuvres d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, de Ptolémée, de Nicomaque de Gérase, Thābit est lui-même l'auteur de traités novateurs, voire fondateurs, dans divers domaines des mathématiques (géométrie infinitésimale, algèbre, arithmétique et théorie des nombres) et de l'astronomie. On lui attribue aussi des écrits médicaux. Il semble avoir supervisé des traductions du syriaque en arabe – la langue syriaque fut un très important relais de la culture grecque avant l'avènement de l'islam ; à Ḥarrān, centre syriaque important, dominait la religion syncrétiste des Sabéens, dont Thābit fut peut-être un dignitaire.

Comment Thābit ibn Qurra envisage l'infini actuel

Le texte de Thābit que nous allons commenter témoigne que ce dernier était, à côté de ses activités proprement scientifiques, pleinement engagé dans les débats philosophiques et théologiques de son temps, à propos desquels il affirmait avec autorité un point de vue original. Ce point de vue nous est parvenu sous la forme de réponses aux questions posées par un de ses disciples,

le chrétien Abū Mūsā 'Isā ibn Usayyid. De ce texte important, soulignons trois aspects qui fixent le cadre du débat : l'importance de la controverse théologique relative au dénombrement des âmes et à la connaissance par Dieu de l'infini des êtres singuliers ; l'expression nette d'un infinitisme de principe qui se réclame des propriétés mathématiques du nombre ; la défense d'une conception philosophique du nombre et des figures géométriques qui rompt radicalement avec les principes aristotéliens.

Le texte s'ouvre d'emblée sur la controverse dont nous avons souligné les enjeux : est-il contradictoire d'envisager que les âmes constituent une multiplicité infinie ? Bien que le texte ne le mentionne pas, il est certain que cette question était associée à celle de l'éternité du monde. Toutefois, l'angle sous lequel elle est présentée ici est celui de la nature de la connaissance divine : si celle-ci envisage chaque être dans sa singularité (chaque âme) et dans son devenir, ne porte-t-on pas atteinte à la simplicité absolue de cette connaissance ? N'est-il pas plus juste de postuler que Dieu ne connaît que les «universaux» (les principes généraux : «le» nombre, «la» grandeur, l'immortalité de l'âme), et non les «singuliers» (chaque nombre, chaque grandeur, chaque âme séparée) ?

Intervenant à la fois sur le plan théologique et philosophique, et commentant un exemple astronomique, celui des éclipses, Thābit entend souligner que, de toute manière, on est conduit à admettre la possibilité d'un infini numérique actuel : au cours de sa réponse à la question relative au problème des âmes (à savoir sont-elles en nombre fini ou non ?), Thābit a dit : «Je m'étonne de celui qui dit que Dieu – qu'Il soit béni et exalté – ne connaît pas les particuliers, mais connaît les universaux, et j'ignore ce qu'il dirait si on l'interrogeait sur Sa connaissance, par exemple, de l'éclipse : est-ce qu'Il en connaît la nature et l'existence seulement, ou bien Il connaît les éclipses qui ont

eu lieu au cours du passé, et celles qui auront lieu, une à une, et le moment déterminé où elles ont eu lieu et où elles auront lieu. S'Il ne connaît rien d'autre que la nature générale de l'éclipse, il en résulterait que Son savoir est moindre que le savoir des astronomes...»

On l'a compris, Thābit n'accepte pas les arguments de ceux qui jugent impossible pour la connaissance divine d'appréhender les «particuliers». Il rappelle que, même en acceptant cette thèse, on n'en est pas moins conduit à admettre l'idée d'un infini actuel : «De plus, si l'on acceptait, par esprit de conciliation, qu'Il ne connaît pas les particuliers, il n'en reste pas moins qu'il est des choses universelles qui sont des espèces infinies, et qu'Il connaît pour elles-mêmes, simultanément, en acte ; par exemple, les espèces des figures géométriques, dont Il connaît chacune, ses accidents, ses singularités, et tous ses autres

aspects ; et aussi les espèces des nombres ; et ces deux d'espèces sont infinies. Il est donc possible qu'une chose existe en acte, et infinie en nombre ; si cela est possible, alors il n'est pas impossible qu'il en soit de même pour les âmes...»

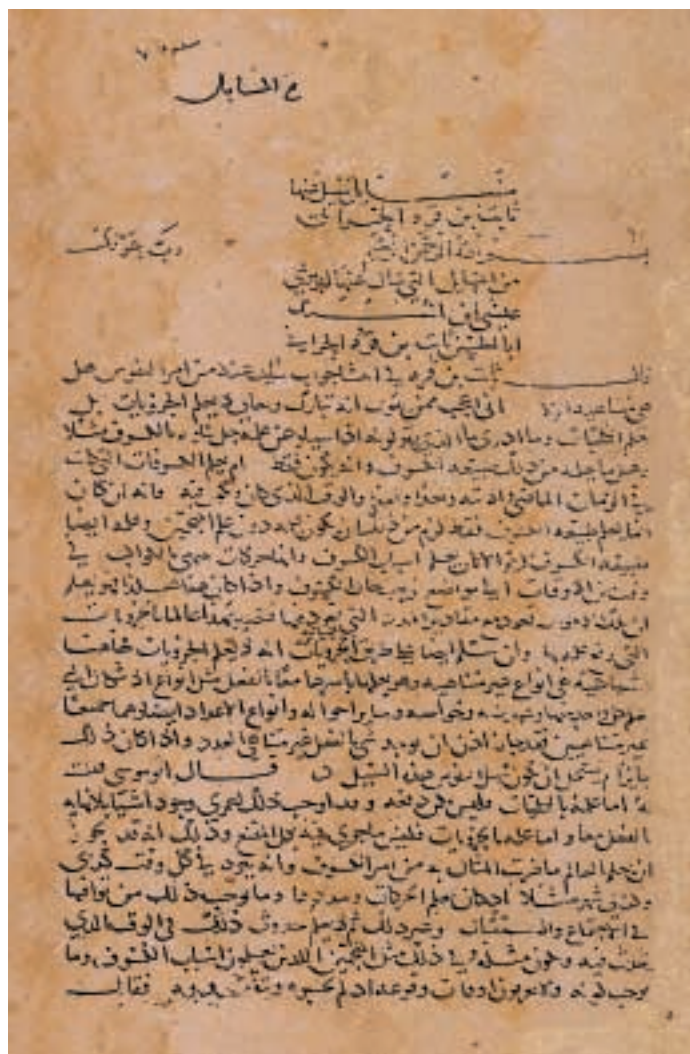
La comparaison des infinis numériques

Au terme de longs développements consacrés à ce problème de la connaissance divine, Thābit est invité par son questionneur à commenter l'argument si souvent invoqué dans les débats sur l'infini, selon lequel «un infini ne peut être plus grand qu'un infini».

Au-delà de quelques difficultés de lecture, l'argument exposé dans ce texte est aussi clair que novateur. C'est la première fois, à notre connaissance, qu'une véritable arithmétique de l'infini est ébauchée à partir des propriétés arithmétiques du nombre entier. Du reste,

une formulation mathématiquement cohérente n'interviendra que 1 000 ans après Thābit, avec les travaux de Georg Cantor et sa théorie du transfini.

Précisons le contenu de l'argument, pour en mesurer l'audace. Pour Thābit, de toute évidence, «il y a un nombre infini», et il s'agit bien d'un infini actuel. Aucune définition de cette notion n'est clairement énoncée, mais on comprend toutefois que l'infinie multiplicité des espèces numériques (on dirait aujourd'hui l'infinitude de l'ensemble des entiers) s'identifie à la nature même du «nombre en soi» (on dirait aujourd'hui l'infinitude du dénombrable). Répondant ici en mathématicien à l'argument classique : «un infini ne peut être plus grand qu'un infini», autrement dit, «il est absurde d'énoncer des relations d'ordre à propos de l'infini», Thābit réplique qu'il est



2. MANUSCRIT (premier folio) de Thābit ibn Qurra où il réfute qu'«un infini ne peut être plus grand qu'un infini».

parfaitement possible de donner un sens mathématique à une telle relation d'ordre. Le geste opératoire décisif de Thābit consiste, pour parler en termes modernes, à définir l'«égalité» de deux ensembles infinis (les nombres pairs et les nombres impairs) par leur équipotence : l'ensemble infini des pairs «est égal» à l'ensemble des impairs, car à tout entier pair on peut associer un entier impair, et réciproquement. À partir de là, il peut conclure que les entiers pairs représentent la moitié de tous les entiers : il y a autant d'entiers pairs que d'entiers impairs, et tous les entiers sont épuisés par cette partition.

En affirmant que l'infini des entiers est «double» de l'infini des entiers pairs, Thābit invalide le fameux argument discuté (il y a bien un infini plus grand qu'un autre infini). Il va même plus loin : en étendant la remarque relative aux pairs et impairs, il exhibe un infini «égal» au tiers de l'infini des entiers (les entiers de la forme $3p$, qui ont la même infinité que les entiers de la forme $3p + 1$ et que celle des entiers de la forme $3p + 2$, ce qui permet de diviser l'infini des entiers en trois infinis «égaux»), un infini «égal» au quart de l'infini des entiers, ..., un infini égal au n -ième de l'infini des entiers.

Opérations sur l'infini

L'égalité naïve, celle qui passe par l'énumération, inapplicable à l'infini, a été remplacée par un autre type de comparaison permettant d'évaluer les rapports de proportion entre «le nombre dans sa totalité» et certaines de ses parties : les nombres pairs et impairs, les multiples de 3, les multiples de 4, ..., les multiples de n .

Ce faisant, Thābit ne met pas en cause l'axiome selon lequel «le tout est plus grand que sa partie». L'infini des entiers, comme un tout, reste plus grand que l'infini des entiers pairs, puisqu'il en est le «double». D'autres

infinistes, après lui, sauront orienter leur réflexion en réévaluant le rapport du tout à sa partie, lorsque des quantités infinies sont en jeu. Au XIX^e siècle, Richard Dedekind, à la même époque que Cantor, définira ainsi précisément l'ensemble infini comme étant un ensemble «égal» à l'une de ses parties.

Le lecteur averti de la définition du transfini cantorien aura relevé que Thābit ne dégage pas, comme Cantor, l'idée d'une cardinalité infinie, propre à tout ensemble dénombrable ; dans cette perspective, tous les ensembles infinis que nous avons évoqués seraient «équipotents», c'est-à-dire égaux au sens de Cantor, ce qui n'est pas le cas pour Thābit. Ainsi, Thābit ne dit pas qu'il y a «autant» de nombres entiers que de nombres entiers pairs, dans la mesure où l'on peut faire correspondre à tout entier un entier pair et réciproquement. Pour autant, il n'est pas nécessaire de voir dans Thābit une «anticipation» de Cantor pour mesurer l'intérêt de la pensée du savant arabe.

En revanche, malgré le millénaire d'histoire qui les sépare, on pourrait rapprocher ces deux savants par le sentiment qui les habite tous deux quant au nécessaire élargissement de l'idée de nombre, telle qu'elle dominait les cultures respectives de leurs époques. Pour fonder cette remarque, il conviendrait d'analyser minutieusement les développements consacrés par Thābit au nombre des catégories de pensée, au nombre des espèces de la quantité, à la quantification de la qualité, au rapport du genre à l'espèce, au statut des accidents. Voilà qui dépasse largement notre propos. Contentons-nous de résumer l'originalité et l'audace théorique de Thābit : non seulement il «opère» sur des infinis, leur conférant ainsi un statut que leur refusait la tradition aristotélicienne, mais, ce faisant, il élargit la notion même de nombre et le cadre conceptuel constitutif de cette tradition.

Tony LÉVY est chercheur au CNRS, au Centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales (Paris-Villejuif).

Shlomo PINES, *Thābit ibn Qurra's Conception of Number and Theory of the Mathematical Infinite*, in Pines, *Studies in Arabic Versions of Greek Texts and in Mediaeval Science (The Collected Works of Shlomo Pines, vol. II)*, Édition Magnes Press, Jérusalem, et Brill, Leiden, 1986, pp. 423-429.

Tony LÉVY, *Figures de l'infini. Les mathématiques au miroir des cultures*, Éditions du Seuil, Paris, 1987, pp. 101-109.

Abdelhamid I. SABRA, *Thabit ibn Qurra on the Infinite and Other Puzzles. Edition and Translation of his Discussions with Ibn Usayyid*, in *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, vol. 11, pp. 1-33, 1997.

Abdelhamid I. SABRA, *Thabit ibn Qurra on the Infinite and Other Puzzles. Edition and Translation of his Discussions with Ibn Usayyid*, in *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, vol. 11, pp. 1-33, 1997.

L'univers infini de Bruno

GIULIO GIORELLO

Giordano Bruno, mort sur le bûcher le 17 février 1600, fut plus audacieux que Copernic : il envisageait un univers infini, sans horizon ni limite.



Giordano Bruno

Philosophe ou astronome ? Poète ou visionnaire ? Écrivain ou homme de sciences ? Qui était Giordano Bruno ? Il se présente lui-même dans *Le souper des Cendres*, écrit en 1584, confiant à Teofilo le soin de prononcer son propre éloge : «Voici apparaître l'homme qui a franchi les airs, traversé le ciel, parcouru les étoiles, outrepassé les limites du monde, dissipé les murailles imaginaires des première, huitième, neuvième, dixième et autres sphères qui auraient pu leur être ajoutées selon les vains calculs des mathématiciens et suite à l'aveuglement des philosophes vulgaires.»

Quelques lignes auparavant, il comparait les découvreurs de la «véritable nature» du ciel aux pionniers des explorations géographiques. Cette comparaison sera reprise par Galilée en 1623 dans les premières pages de *L'essayeur*. Galilée lisait Bruno, le paraphrasait, mais ne pouvait, en ces temps d'Inquisition, le citer explicitement.

Bruno est l'égal de navigateurs, tels Tiphys orientant Jason et les Argonautes vers la Colchide, pour conquérir la toison d'or, ou Christophe Colomb, le découvreur du Nouveau Monde. La comparaison s'arrête là : si les victimes des barbaries perpétrées par les Argonautes étaient des hommes, Bruno ne combattit que les croyances non fondées, transmises par tradition et jamais remises en cause. Le «philosophe de la nature», tel que Bruno se décrit dans *Le souper des Cendres*, découvre le moyen de monter au ciel, de parcourir la circonférence des étoiles et de laisser derrière lui la surface convexe du firmament.

Selon Bruno, notre raison n'est plus entravée par des sphères imaginées par les mathématiciens pour représenter l'Univers : il n'y a qu'un ciel, une immense région éthérée où brillent de magnifiques foyers lumineux. Dans *Le souper des Cendres*, les étoiles sont des corps enflammés représentant, aux yeux de Bruno, les ambassadeurs de l'excellence de Dieu, les «héralds de sa gloire et de sa majesté». D'après Bruno, nous sommes conduits à découvrir l'effet infini de la cause infinie, la trace vivante et véritable de la vigueur infinie. Dieu aux pouvoirs infinis ne pouvait créer qu'un Univers infini. La puissance divine place Dieu à l'intérieur de l'homme, indiquant ainsi que ce n'est pas hors de nous qu'il faut chercher la divinité, puisqu'elle est en nous, en notre for intérieur.

Même pour d'hypothétiques habitants d'autres mondes, tels les Sélénites, habitants de la Lune, la présence divine n'est pas à rechercher auprès de nous, mais en nous : Bruno affirme que la Lune n'est pas plus pour nous un ciel que nous ne sommes un ciel pour elle. Cette symétrie, évoquée dans *Le souper des Cendres*, est reprise avec force par Galilée en 1632 dans la Première Journée des *Dialogues des systèmes majeurs* ; elle est l'essence même de ce que nous nommons aujourd'hui le principe cosmologique copernicien : la Terre ne peut être au centre de l'Univers et occuper une situation privilégiée. En 1543, Copernic place non plus la Terre au centre de l'Univers, mais le Soleil ; les astres, y compris la Terre, décrivent des sphères autour du Soleil.

Le dépassement du principe copernicien

Au Teofilo du *Souper* correspond le Filoteo de *De l'infini, de l'univers et des Mondes*. Ensemble, ils reconnaissent à Copernic le mérite d'avoir détruit cette «très fausse supposition de la fixité de la Terre», les mouvements des astres de la voûte céleste ne sont pour Bruno que des apparences liées aux mouvements de l'astre où nous sommes et dont le mouvement ne nous est pas sensible. Cependant, Copernic en appelait aux «sphères ayant une surface concave et convexe» décrites par Bruno et aux «orbes déférents», autrement dit aux espaces circonscrits par l'orbite des astres. Dépasant Copernic, Bruno attribue un caractère d'infini à l'Univers et s'affranchit des sphères coperniciennes. Ainsi, la paternité du principe copernicien, tel qu'on l'énonce aujourd'hui, ne peut être attribuée au seul astronome polonais.

La principale objection faite à la doctrine copernicienne sur le mouvement terrestre reposait sur l'impossibilité qu'une pierre jetée verticalement en l'air retombât suivant la même trajectoire ; le très rapide mouvement de la Terre devrait nécessairement la laisser loin derrière, «du côté de l'Occident». Ce problème avait fait discourir nombre de philosophes du Moyen Âge. Dans le troisième dialogue du *Souper*, Teofilo balaie cette objection, affirmant que se meut avec la Terre tout ce qui se trouve sur Terre. Bruno décrit une situation similaire : une pierre lancée en l'air, verticalement, par une personne à bord

d'un bateau retombera en suivant la même ligne droite, quelle que soit la vitesse du navire, et à condition qu'il ne gêne pas. De cet exemple, Giordano Bruno explique que le mouvement régulier de la Terre rend impossible, à tout homme, l'observation de son mouvement, à moins qu'on ne l'observe de loin, du Soleil par exemple; ce qui semble difficilement réalisable!

La relativité des mouvements

L'idée de la relativité des mouvements affirmée par Bruno et reprise par Galilée dans la Seconde Journée du *Dialogue* ne présente rien d'original en soi. Il en existe de nombreux précédents. Bruno innove en postulant un mouvement relatif et en défendant la doctrine copernicienne, au sein d'un Univers sans limite. *De l'infini, de l'univers et des Mondes* nous décrit un ciel unique : un espace immense, un «contenant universel», une «région éthérée» où tout se déplace et se meut. Bruno évoque les sens qui nous montrent d'innombrables étoiles, astres, globes, soleils et terres, et la raison qui nous en fait admettre une infinité. Il affirme

que l'Univers immense et infini est composé de cet espace et de tous les corps qui le constitue.

Notre vision cosmologique est perturbée par nos sensations : spectateur immobile du théâtre de l'Univers, nous ne percevons pas les mouvements de la Terre. Le philosophe, tel le peintre, décrit l'Univers et en change notre connaissance. Cependant, nous lisons dans *Le souper* que le peintre peint un paysage où, pour conformer son art à la nature, il montre ici le palais d'un roi, là une forêt, ailleurs un morceau de ciel. Dans sa comparaison entre le peintre et le philosophe, Giordano Bruno explique que le peintre est toujours susceptible d'arrêter son travail, d'en examiner les défauts avec le recul et la distance que prennent d'ordinaire les maîtres de l'art. Le philosophe, quant à lui, fait partie intégrante du monde qu'il prétend décrire. Il ne peut en sortir, à moins de tomber dans les abîmes du néant. Il fait partie de cette réalité qu'il essaie de comprendre. Dans l'Univers infini de Bruno, cette vision du philosophe sur le monde qui l'entoure intègre Dieu : créateur étranger à ses propres créations, Dieu finit par se retrouver nulle part. Le Seigneur ne contemple pas son

œuvre du plus haut des cieux, il y habite, il habite en nous, et c'est peut-être l'unique raison pour laquelle nous pouvons dire «je suis».

La situation du philosophe peintre qui ne peut sortir de la scène qu'il dépeint ne constitue pas un frein à la connaissance, au contraire, elle est la condition même de sa possibilité. Bruno l'illustre par ses critiques de la séparation aristotélicienne entre la physique céleste et la physique terrestre : la Lune, qui dans les cosmologies traditionnelles est le premier des corps célestes parfait et immuable, est en réalité aussi imparfaite que la Terre. Seule la distance entre la Terre et la Lune interdit à nos sens de percevoir les aspérités lunaires. Bruno, dans *De l'infini, de l'univers et des Mondes*, souligne que, s'il y avait sur la Lune des habitants observant leurs cieux, ils verraient notre globe comme immuable et parfait.

L'ascension vers l'infini

En 1591, dans *De l'immensité*, Bruno imagine une ascension dans les cieux. Aux yeux du voyageur s'éloignant de la Terre, les détails des paysages terrestres s'estompent progressivement :



1. GIORDANO BRUNO a exploré le cosmos et découvert des mondes encore inconnus (gravure extraite de l'ouvrage de Camille Flammarion, *L'atmosphère : météorologie populaire*, publié en 1888).

les rivières, les forêts, les champs, les villes, tout finit par se confondre. Les seules différences perceptibles résultent de la réflexion de la lumière solaire sur les montagnes et sur les plaines. L'observateur lunaire voit la Terre tachetée, tout comme le terrien perçoit la surface lunaire. Bruno explique ainsi les taches lunaires comme des phénomènes optiques, en accord avec les critiques de la tradition héritée d'Aristote. Une position sur laquelle s'aligneront, au début du XVII^e siècle, Kepler et Galilée.

C'est parce que nous sommes éloignés des autres corps célestes que nous

les percevons immuables. À Galilée d'ajouter qu'il n'y a aucune qualité dans les cieux qui ne puisse se retrouver sur Terre. Quant à Bruno, il affirmait déjà qu'il n'y avait aucun point de vue privilégié.

Aujourd'hui, nous admettons aisément qu'il suffirait d'une très légère modification des constantes physiques ou des lois de la nature pour que l'Univers ne soit habité d'aucun «peintre», tel que le définissait Bruno, qui puisse le représenter. Bruno mentionne ainsi, dans *De l'infini*, que la plus petite erreur au commencement cause à la fin de

grandes différences ; un simple inconvénient se multiplie progressivement et se ramifie en une infinité d'autres, comme d'une racine minuscule naissent de grandes structures et des branches innombrables. Ces phénomènes évoqués par Bruno dans *De l'infini* sont aujourd'hui bien connus des spécialistes sous le qualificatif de système dépendant des conditions initiales.

Pour Giordano Bruno, c'est Dieu, ou peut-être le Diable, qui se cache derrière ces infimes détails, lourds de conséquences. L'infime perturbation des conditions initiales modifie-t-elle notre vision du monde ou le monde en lui-même ? Bruno montre que, si l'on admet la pluralité des mondes et des univers, alors l'homme apparaît comme un observateur doué d'intelligence, appartenant à un univers à un moment précis de son évolution, sans possibilité de revendiquer un quelconque point de vue privilégié.

Le philosophe se retrouve alors face à la question de penser cette «identité». Bruno le savait bien : son univers sans limite ni horizon, sans les «murailles imaginaires» des sphères célestes, apparaissait chaotique et confus à celui qui croyait que la Providence divine avait placé toute chose au bon endroit. Toutefois, aux yeux de Bruno, ce bel ordre et cette échelle de la nature ne sont qu'un songe, un conte pour enfants. Peut-être est-ce aussi pour cela que Bruno finit sur le bûcher le 17 février 1600. On raconte que, durant son incarcération à Rome, il n'a eu cesse d'enseigner à ses compagnons de cellule que tous ces points lumineux que nous appelons les étoiles et qu'ils devinaient à travers l'étroite fenêtre de leur cachot formaient des mondes tout aussi complexes que le nôtre.



The Bridgeman Art Library

2. L'ÉCHELLE DE JACOB extraite des «Chants royaux sur la Conception couronnée du Puy de Rouen» (début du XVI^e siècle). Ce manuscrit montre Jacob endormi qui rêve de l'échelle permettant d'accéder aux cieux. «Alors il vit en songe une échelle, dont le pied était appuyé sur la terre, et le haut touchait le ciel, et des anges de Dieu montaient et descendaient cette échelle.» À l'instar de Jacob, Giordano Bruno a gravi quelques marches d'une échelle : non pas celle qui menait au ciel, mais celle qui conduisait à la connaissance des cieux.

Giulio GIORELLO est professeur d'épistémologie à l'Université de Milan.

Giordano BRUNO, *Œuvres Complètes*, Les Belles Lettres, 1994, tome II, *Le souper des Cendres*, traduction de Y. Hersant, tome III, *De l'infini, de l'univers et des Mondes*, traduction J.-P. Cavaillé.

GALILÉE, *L'Essayer*, Les Belles Lettres, Paris, 1990.

Galilée, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*, Éditions du Seuil, 1992.

G. AQUILECCHIA, *Giordano Bruno*, Les Belles Lettres, Paris 2000.

P.-H. MICHEL, *La cosmologie de Giordano Bruno*, Hermann, Paris, 1962.

La science du mouvement au XVII^e siècle

MICHEL BLAY

À la fin du XVII^e siècle et au début du XVIII^e, les mathématiciens décrivent le mouvement et introduisent la notion de vitesse, en évitant les paradoxes qui résultaient de l'usage impropre et intuitif de l'infini.



Au V^e siècle avant notre ère, dans la ville grecque d'Élée, le philosophe Zénon bute sur un grave paradoxe quand il analyse le mouvement : pour atteindre un point donné, un mobile doit d'abord parcourir la moitié de la distance qui le sépare de ce but, puis la moitié de la distance restante, puis encore la moitié de la distance restante, et ainsi de suite à l'infini. Comment parcourir une infinité de moitiés en un temps fini ? Cet infini qui s'introduit dans l'analyse du mouvement troublera physiciens et mathématiciens jusqu'à la fin du XVII^e siècle. À cette époque, et au début du siècle suivant, la science du mouvement se clarifie enfin. Une partie notable des progrès est due au physicien français Pierre Varignon (1654-1722), qui publie plusieurs articles dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, autour des années 1700. Varignon se fonde sur les résultats mathématiques obtenus entre 1684 et 1686 par Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), puis par Isaac Newton (1642-1727) : ce « calcul différentiel et intégral » permet de déterminer mathématiquement la pente de la tangente à une courbe, ou l'aire entre

une courbe et un axe. L'utilisant, Varignon trouve une formule très simple, qui décrit le mouvement d'un corps sur lequel s'exerce une force, notamment dans le cas des forces centrales, c'est-à-dire des forces qui s'exercent entre un point, attracteur ou répulsif, et un mobile qui se déplace sur une droite.

L'impossible géométrie du mouvement

Comment le calcul différentiel a-t-il permis de résoudre les difficultés antérieures de la science du mouvement ? Pour le comprendre, revenons d'abord aux enjeux de la géométrisation de la science du mouvement au XVII^e siècle. Les physiciens voulaient alors comprendre les mouvements par des interprétations géométriques déductives, sur le modèle des *Éléments* d'Euclide. Les principales questions portaient sur la continuité des mouvements, sur leur début et sur leur fin. Comment expliquer la variété des mouvements accélérés ? Étaient-ils, comme l'avaient proposé certains philosophes, un mélange de mouvements et de repos ? Ces questions avaient troublé Galilée (1564-1642), Bonaventura

Cavalieri (1598-1647), Blaise Pascal (1623-1662) et d'autres savants du XVII^e siècle.

Dans une lettre adressée à Galilée en date du 21 mars 1626, Cavalieri souligne l'importance et la difficulté des problèmes posés, dans le cadre de la géométrisation, par le commencement et l'évolution continue du mouvement : « Lorsqu'on en arrive à devoir prouver que le mobile qui, du repos, doit passer à un degré quelconque de vitesse, [...] par les degrés intermédiaires, je ne trouve aucune raison qui me tranquillise, bien qu'il me semble que généralement il en soit ainsi. » La quête d'une raison qui tranquillise est à la fois un programme de travail et une attitude d'esprit ; c'est la volonté de comprendre le commencement et l'évolution continue du mouvement ; c'est aussi la volonté d'expliquer le mouvement par les mathématiques.

Cette étude est très difficile, car l'infini y apparaît immédiatement. Pascal le mentionne explicitement dans son petit traité intitulé *De l'esprit géométrique* : « Quelque prompt que soit un mouvement, on peut en concevoir un qui le soit davantage, et hâter encore ce dernier ; et ainsi toujours à l'infini,



Galileo Galilei (1564-1642)

sans jamais arriver à un qui le soit de telle sorte qu'on ne puisse plus y ajouter. Et au contraire, quelque lent que soit un mouvement, on peut le retarder davantage, et encore ce dernier ; et ainsi à l'infini, sans jamais arriver à un tel degré de lenteur qu'on ne puisse encore en descendre à une infinité d'autres, sans tomber dans le repos». En langage moderne, les questions sont : comment traiter mathématiquement de vitesses infiniment petites ? Comment traiter mathématiquement de vitesses infiniment grandes ?

Galilée rencontre les mêmes difficultés. Dans ses *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, publiés en 1638, il fait dire à son ami et porte-parole Salviati : « Vous ne refuserez pas, je crois, de m'accorder qu'une pierre, tombant de l'état

de repos, acquiert ses degrés successifs de vitesse selon l'ordre dans lequel ces mêmes degrés diminueraient et se perdraient, si une force motrice la reconduisait à la même hauteur ; et le refuseriez-vous que je ne vois pas comment la pierre, dont la vitesse diminue et se consume en totalité au cours de son ascension, pourrait atteindre l'état de repos sans être passée par tous les degrés successifs de lenteur. »

Galilée souligne la continuité caractérisant, selon lui, la croissance ou la décroissance de la

vitesse dans un mouvement naturellement accéléré, comme la chute d'un corps pesant (un « grave »). Dans un tel mouvement, « un grave ne demeure en aucun de ces degrés de vitesse pendant un temps fini ». Ce qui revient

encore à dire que, dans un mouvement accéléré ou retardé, un corps qui sort du repos ou qui y retourne passe par une infinité de degrés de vitesses dans un intervalle de temps qui, si petit qu'il soit, contient une infinité d'instants.

Les problèmes soulevés par cette analyse sont d'une extrême difficulté : s'il y a une infinité de degrés de lenteur pour atteindre le repos, ne faut-il pas un temps infini pour que cet arrêt du mouvement puisse s'accomplir, pour que le mobile animé d'un tel mou-

vement s'arrête en passant successivement par tous les degrés de lenteur ? À l'inverse, pour qu'un mouvement commence, en passant successivement par tous les degrés croissants de vitesse, ne faut-il pas, là aussi, un temps infini pour atteindre la moindre vitesse ? Dans un cas, le repos est impossible à atteindre ; dans l'autre, c'est le mouvement qui ne peut commencer. Or, bien évidemment, les mouvements commencent et finissent.

De l'état de repos à une vitesse finie

Une réponse consiste à rejeter l'idée d'un commencement non fini du mouvement ou, plutôt, à considérer que le mouvement de chute des graves commence, non pas à partir d'une vitesse nulle par accroissements successifs continus, mais à partir d'une vitesse finie. C'est ainsi qu'Edme Mariotte (1620-1684), dans son *Traité de la percussion ou choc des corps*, publié à Paris en 1673, refuse l'idée qu'un mouvement accéléré le soit dès le premier instant. Son argumentation repose sur un rappel des difficultés engendrées par les paradoxes de Zénon sur l'infini, et aussi sur diverses expériences en rapport avec l'écoulement des fluides. Il propose d'éliminer l'infini au début du mouvement en considérant qu'il n'y a pas, au sens strict, de début au mouvement. Dès le premier instant, le corps est animé d'une vitesse très petite, mais finie.

De même, le mathématicien allemand Hartsocker propose que le repos soit atteint sans que le mobile passe par tous les degrés de lenteur. Dans une lettre adressée à Leibniz le 6 janvier 1712, Hartsocker écrit : « Il y a une loi dans la Nature, dites-vous, Monsieur, qui porte qu'il n'y a aucun passage *per saltum* [par saut]. Je vous l'accorde dans un certain sens ; mais quand vous dites que cette loi ne permet pas qu'il n'y ait point de milieu entre le dur et le fluide, je n'y vois aucune nécessité. Si vous ne saviez pas par l'expérience, Monsieur, qu'un corps qui se meut avec



Isaac Newton (1642-1727)



Blaise Pascal (1623-1662)



Pierre Varignon (1654-1722)



Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

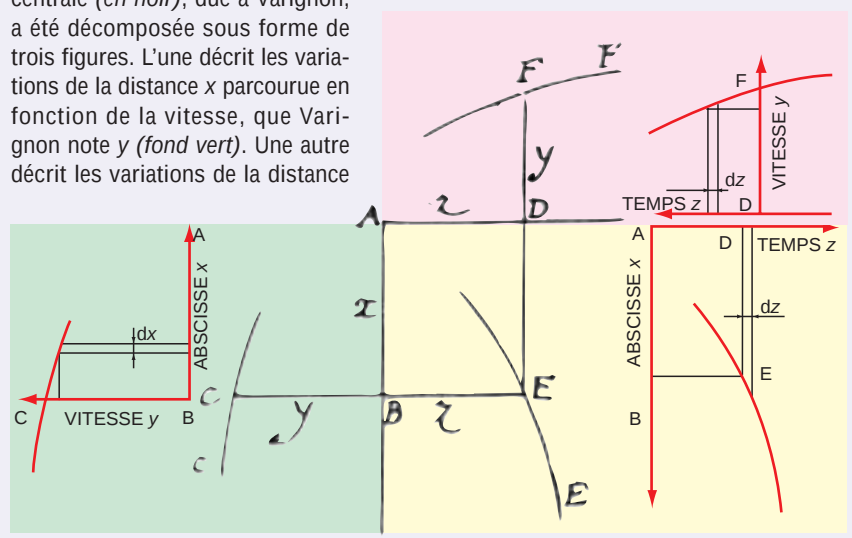


Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Le mémoire du 5 juillet 1698 de Varignon

Dans ce mémoire, Pierre Varignon explicite algébriquement les quantités finies et infiniment petites qui s'imposent pour la description des mouvements. La figure centrale (en noir), due à Varignon, a été décomposée sous forme de trois figures. L'une décrit les variations de la distance x parcourue en fonction de la vitesse, que Varignon note y (fond vert). Une autre décrit les variations de la distance

x parcourue en fonction du temps, que Varignon note z (fond jaune). La troisième décrit les variations de la vitesse en fonction du temps z (fond rose).



tout autant de vitesse qu'il vous plaira peut demeurer en repos dès l'instant du choc, sans perdre peu à peu et par degré son mouvement, ne diriez-vous pas par votre loi que cela est impossible?»

À ces approches, on peut associer celles de Pierre Gassendi (1592-1655) ou, plus tard, de son commentateur François Bernier, pour lesquels le mouvement varié est un mélange de repos et de mouvements, la continuité n'étant qu'apparente, en raison d'une certaine persistance des images rétinienne, pour parler en termes modernes. Toutefois ces approches n'offrent aucune prise réelle à la géométrisation. La pseudo-évidence expérimentale, de Mariotte en particulier, n'apprend rien.

Un premier effort de Leibniz

Alors qu'il ne développera son calcul différentiel et intégral qu'en 1676, Leibniz rédige en 1670 une *Théorie du mouvement abstrait*, qui a essentiellement pour objet d'édifier une théorie purement rationnelle du mouvement. Ce travail s'inspire de résultats mathématiques que Cavalieri avait exposés dans sa *Géométrie au moyen des indivisibles*, publiée à Bologne en 1635.

Leibniz considère que le mouvement est continu, c'est-à-dire qu'il n'est «nullement entrecoupé de petits repos», comme cela était parfois envisagé par les «atomistes», c'est-à-dire ceux qui acceptaient l'idée du discontinu dans

la matière, l'espace ou le temps. Continu, le mouvement est, non seulement divisible à l'infini, mais effectivement divisé, en ce sens qu'il y a des parties données en acte dans le continu et que «celles-ci sont infinies en acte». Leibniz introduit donc un infini «en acte» ou «actuel», c'est-à-dire qu'il pose effectivement un infini. Cependant, pour Leibniz, «il n'y a pas de minimum dans l'espace ou le temps», car un tel minimum «implique contradiction» : s'il existait un minimum, il y aurait autant de minimums dans le tout que dans la partie, puisque toute partie de même espèce que le tout est encore infiniment divisible. Il s'agit là, toujours, des paradoxes de Zénon : un segment, aussi petit que l'on veut, contient une infinité de points ; c'est un infini en acte.

Leibniz échappe à cette contradiction en adaptant la méthode de Cavalieri, méthode qui vise, en restant à l'intérieur des mathématiques euclidiennes, à traiter de questions qui engageraient la considération de sommes infinies. Pour cela, Cavalieri introduit la notion d'agrégat (on parlera ainsi, par exemple, de l'agrégat de toutes les lignes ou de tous les degrés de vitesse), et établit les rapports entre l'agrégat de toutes les lignes de deux figures et celui des aires de ces deux figures. Cette approche précise et rigoureuse sur le plan mathématique sera, le plus souvent, interprétée comme la mise en œuvre d'une simple somme

de points, de lignes, etc., ce qui, bien évidemment, repose avec acuité la question du continu et de l'infini.

Leibniz est plus préoccupé par l'analyse du mouvement et des trajectoires que par les pures questions de géométrie, qui reposent le problème de la composition du continu. Il introduit son concept d'«indivisible» afin de résoudre le problème du mouvement : «Des indivisibles ou inétendus sont donnés, sans quoi ni le commencement ni la fin du mouvement et du corps ne sont concevables.»

Pour Leibniz, le commencement appartient à l'espace, au temps, au mouvement, sans pour autant être divisible. Comme on l'a vu, la notion d'un commencement divisible est contradictoire. Il y a donc des indivisibles, constitutifs de l'espace, du temps et du mouvement et, cependant, hétérogènes à ce qu'ils constituent. Ce faisant, Leibniz introduit alors des êtres mathématiques pour le moins surprenants, que sont «le commencement du corps, de l'espace, du mouvement, du temps (à savoir le point, l'effort, l'instant)». C'est à Thomas Hobbes (1588-1679) que Leibniz emprunte, en le transformant, le concept d'effort pour en faire son indivisible de mouvement : «L'effort est au mouvement ce que le point est à l'espace, soit comme l'unité à l'infini, il est en effet le commencement et la fin du mouvement.» Il existe donc un indivisible de mouvement, l'«effort», qui, d'un certain point de vue, bloque la régression à l'infini, qui interdisait de penser le commencement ou la fin du mouvement.

Varignon et l'algorithme de la cinématique

Leibniz publie le texte fondateur du nouveau calcul différentiel et intégral en octobre 1684. Le titre de ce mémoire indique bien son objet : *Nouvelle méthode pour chercher les maxima et les minima, ainsi que les tangentes, méthode que n'embarrassent ni les expressions fractionnaires ni les expressions irrationnelles*. Leibniz écrit notamment : «Lorsqu'on connaît l'algorithme, si je peux dire, de ce calcul que j'appelle différentiel, on peut trouver par le calcul ordinaire toutes les autres équations différentielles, les maxima et minima, ainsi que les tangentes.»

La diffusion du nouveau calcul est lente et difficile. À partir des années 1690, les deux frères Jean (1667-1748)

et Jacques Bernoulli (1654-1705), en contact étroit (principalement épistolaire) avec Leibniz, appliqueront les nouvelles méthodes de ce dernier aux sujets les plus divers, l'occasion leur en étant souvent fournie par les défis mathématiques qu'ont l'habitude de se lancer les savants d'Europe.

Au cours de son séjour parisien, pendant l'hiver 1691-1692, Jean Bernoulli initie, par des *Leçons particulières*, le marquis Guillaume de L'Hospital (1661-1704) au calcul leibnizien. C'est lui qui saura lever les indéterminations du type $0/0$. Ces leçons, portant à la fois sur le calcul différentiel et sur le calcul intégral, constitueront la base à partir de laquelle L'Hospital rédigera le premier manuel de calcul différentiel. Celui-ci sera publié à la fin du mois de juin 1696 sous le titre *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. L'introduction des nouvelles méthodes se trouve ainsi grandement facilitée.

Malgré les vives polémiques que suscitent ces méthodes à l'Académie royale des sciences de Paris jusqu'à la fin des années 1710, Varignon assimile rapidement les principaux éléments du nouveau calcul, et il s'attache, entre les années 1695 et 1705 à reprendre l'étude du mouvement. Le travail de Varignon s'effectue en deux phases : d'abord, il introduit le concept de «vitesse dans chaque instant» ; puis il définit la «force accélératrice dans chaque instant». Observant les formules qu'il vient de construire à l'issue de cette double construction, Varignon en déduit ce que l'on nomme aujourd'hui l'«algorithme de la cinématique».

Dans deux mémoires, lus aux séances de l'Académie royale des sciences, respectivement le samedi 5 juillet et le samedi 6 septembre 1698, Varignon donne un nouveau départ à la science du mouvement,

en élaborant d'abord le concept de «vitesse dans chaque instant». Le premier mémoire donne une expression générale de la vitesse susceptible de traiter tous les mouvements dans le cas de trajectoires rectilignes, quel que soit le mode de variation de la vitesse ; il est intitulé *Règle générale pour toutes sortes de mouvements de vitesses quelconques variées à discrétion*.

Varignon considère comme uniforme la vitesse d'un corps pendant chaque instant de son mouvement. Il définit tout d'abord un certain nombre de variables à partir desquelles la mise en place conceptuelle peut être réalisée : «Soient $AB = x$ (voir l'encadré page ci-contre) les espaces parcourus en quelque sens qu'on voudra, $BE = z$ les temps employés à les parcourir, et $BC = y = DF$ les vitesses à chaque point

B de ces espaces.» Les variables, espace, temps et vitesse, étant maintenant représentées par les «axes», ou segments de droite, AB , BE et BC (ou DF), il associe ces variables deux à deux, afin d'engendrer ce qu'on nommerait, en termes modernes, un diagramme des espaces EE , et deux diagrammes des vitesses CC et FF : «De manière que la courbe EE (quelle qu'elle soit) formée par tous les points E , exprime les espaces par ses abscisses AB , et les temps employés à les parcourir, par ses ordonnées correspondantes BE ; la courbe CC (quelle qu'elle soit aussi) formée par tous les points C exprime de même les espaces par les abscisses AB , et les vitesses à chaque point B de ces espaces, par ses ordonnées correspondantes BC ; enfin la courbe FF (quelle qu'elle soit encore) exprime aussi par ses ordonnées DF ces mêmes vitesses comparées aux temps BE ou AD qui leur servent d'abscisses.»

«Cela posé, les instants seront notés dz ; l'espace parcouru dans chaque instant, dx ; et la vitesse avec laquelle dx aura été parcouru sera noté y .» Ainsi, dans un instant égal à dz , l'espace parcouru par le mobile sera égal à dx , tandis que la vitesse de ce mobile sera égale à y . Varignon affirme alors que cette vitesse, dans chaque instant, peut «être regardée comme uniforme : de sorte que $y \pm dy = y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = dx/dz$ pour la règle de tous les mouvements variés comme on voudra, c'est-à-dire quelque rapport d'espace, de temps ou de vitesse, qu'on suppose ; la vitesse de chaque instant étant toujours et partout égale au quotient de l'espace parcouru dans chaque instant divisé par cette même différentielle de temps» (aujourd'hui les notations ont changé : le temps s'exprime

par t et non plus par z , et la vitesse par v et non plus par y).



EDME MARIOTTE (1620-1684) a établi avec Robert Boyle la loi de compression des gaz, qu'il étudie ici expérimentalement. Il publia également un *Traité de la percussion ou choc des corps*, où il refusait l'idée qu'un mouvement accéléré le soit dès le premier instant. Il proposait que, dès le début d'un mouvement, le corps est animé d'une vitesse très petite, mais finie.

La règle générale de Varignon

Il est important de souligner, comme Varignon le fera explicitement dans un mémoire en date du 6 juillet 1707, intitulé *Des mouvements variés à volonté, comparés entre eux et avec les uniformes*, que «l'espace et le temps étant des grandeurs hétérogènes, ce n'est point proprement elles qu'on compare ensemble dans le rapport qu'on appelle vitesse, mais seulement les grandeurs homogènes qui les expriment, lesquelles sont ici, et seront toujours dans la suite ou deux lignes, ou deux nombres, ou deux autres grandeurs homogènes qu'on voudra». Ainsi, Varignon fait un pas décisif en montrant que l'on peut dépasser le débat sur les grandeurs homogènes en comparant non pas directement les grandeurs, mais les nombres qui les expriment en fonction des unités préalablement définies.

Le raisonnement qui conduit Varignon au concept de vitesse dans chaque instant repose directement sur les procédures du calcul des différences mises en œuvre en particulier dans l'*Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, publiée à Paris en 1696 par L'Hospital. «On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite ; ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle puisse être considérée comme demeurant la même.» Ce qui conduit Varignon à confondre $v \pm dv$ avec v . Cette vitesse v peut alors être «considérée comme demeurant la même» pendant l'intervalle de temps dt au cours duquel la longueur dx a été parcourue ; en conséquence, «la notion seule des vitesses uniformes» donne bien, immédiatement, l'expression de la vitesse v dans chaque instant : $v = dx / dt$.

Ayant caractérisé la vitesse dans chaque instant, Varignon donne, dans son mémoire du 5 juillet 1698, une «Règle générale». Celle-ci n'est qu'une reprise de sa caractérisation, sous trois aspects différents, privilégiant successivement, à la faveur de manipulations algébriques, les vitesses, les temps et les espaces :

«Règle générale Des vitesses, Des temps, Des espaces ($v = dx / dt$ ou $dt = dx / v$ ou $dx = v dt$).»

De ces trois formules, il suit bien évidemment que, «quels que soient présentement la vitesse d'un corps

(accélérée, retardée, en un mot variée comme on voudra), l'espace parcouru et le temps employé à le parcourir, deux de ces trois choses étant données à discrétion, il sera toujours facile de trouver la troisième par le moyen de cette règle, même dans les variations de vitesse les plus bizarres qui se puissent imaginer».

La construction du concept de vitesse dans chaque instant résulte donc finalement d'un double travail conceptuel : l'un autorisant, par le dépassement du débat classique sur les grandeurs homogènes, d'exprimer le concept de vitesse sous la forme d'un quotient ; l'autre permettant de faire intervenir aisément les concepts du calcul leibnizien, par l'introduction de l'idée selon laquelle la vitesse peut être considérée comme constante dans un instant de temps. L'énoncé de la Règle générale clôt la première partie du mémoire du 5 juillet 1698. La deuxième partie s'attache, à travers cinq exemples, à la mise en œuvre de cette règle générale.

Deux mois plus tard, le 6 septembre 1698, Varignon complète cette première étude par un deuxième mémoire consacré aux mouvements qui suivent des trajectoires incurvées : «Application de la Règle générale des vitesses variées, comme on voudra, aux mouvements par toutes sortes de courbes, tant mécaniques que géométriques. D'où l'on déduit encore une nouvelle manière de démontrer les chutes isochrones dans la cycloïde renversée.»

En possession du concept de vitesse dans chaque instant, Varignon utilise le calcul leibnizien, valable tant pour les mouvements rectilignes que pour les mouvements curvilignes. Puis, en 1700, s'appuyant sur la conceptualisation de la force accélératrice proposée par Isaac Newton dans le Lemme X de la section I du Livre I des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Varignon obtient l'expression de la «force accélératrice dans chaque instant», à savoir « $y = ddx / dt^2$ ou $y = dv / dt$ ». Il énonce alors ce qu'il nomme les Règles générales des mouvements en lignes droites (il généralisera au cas des trajectoires curvilignes peu après) : $v = dx / dt$ et $y = dv / dt = ddx / dt^2$.

Ces règles nous révèlent que les expressions des concepts de vitesse dans chaque instant et de force accélératrice dans chaque instant peuvent être déduites l'une de l'autre par un simple calcul qui met en œuvre les algorithmes

leibniziens. Pour reprendre Auguste Comte (1798-1857) : «Toutes les questions relatives à cette théorie préliminaire du mouvement varié se réduiront immédiatement à de simples recherches analytiques, qui consisteront ou dans des différentiations ou, le plus souvent, dans des intégrations.»

Les enjeux de la physique mathématique

Au début de cet article, nous nous demandions comment la conceptualisation différentielle de la science du mouvement avait favorisé la réorganisation et le développement de cette science et permis de surmonter les difficultés antérieures. Varignon apporte des réponses ou du moins des éléments de réponse.

Il apparaît clairement que la conceptualisation différentielle de la science du mouvement au début du XVIII^e siècle n'est pas le résultat d'une simple transposition, en termes différentiels, des concepts et des démarches de la science du mouvement tels qu'ils s'exprimaient auparavant ; c'est plutôt le résultat d'une reconstruction conceptuelle qui a conduit à une réorganisation du champ de la science du mouvement autour des concepts de vitesse dans chaque instant et de force accélératrice dans chaque instant.

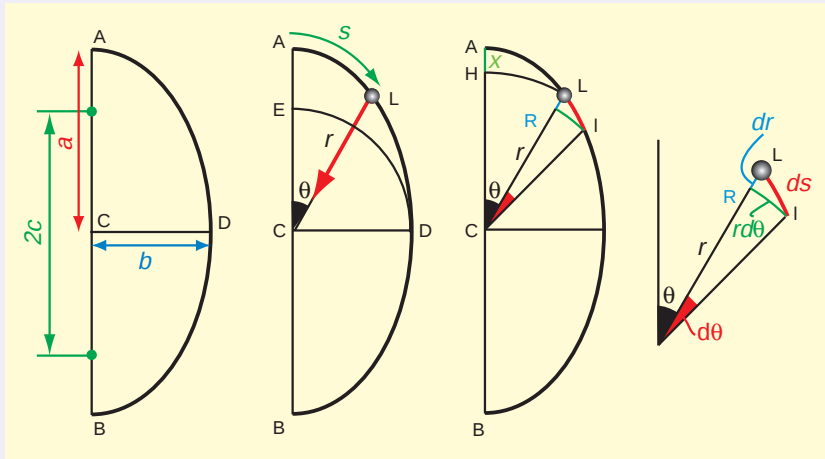
Cette reconstruction conceptuelle est riche d'enseignements : en utilisant le nouveau calcul leibnizien pour donner au concept de vitesse dans chaque instant ou, en modernisant légèrement, de «vitesse instantanée», une expression explicite et opérante, Varignon montre *a contrario* qu'on ne pouvait pas, avant, penser efficacement cette vitesse instantanée. En outre, et d'un point de vue plus général, le travail conceptuel de Varignon témoigne également que les mathématiques ont avec la physique un rapport de constitution, car c'est de leur couplage que se trouvent engendrés les nouveaux concepts, en l'occurrence ceux de vitesse dans chaque instant et de force accélératrice dans chaque instant.

Cette reconstruction permet alors de comprendre l'extraordinaire développement de la science du mouvement au XVIII^e siècle ; celui-ci résulte, d'une part, de la très grande généralité des deux nouveaux concepts mis en place par Varignon et, d'autre part, du fait que les expressions de ces concepts sont susceptibles de se

L'algorithme de la cinématique

Varignon calcule la force centrale y dans le cas où un corps décrit une ellipse, le centre de force étant confondu avec le centre de l'ellipse, cas qu'Isaac Newton examinait dans la proposition 10, problème 5, livre I de ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*.

Varignon détermine d'abord la longueur ds d'un petit arc. Nous transcrivons ici son raisonnement et sa figure en termes modernes. Il considère une ellipse ABD de centre C, de grand axe $AB=2a$. Il définit le petit axe $CD=b$ et la distance $2c$ qui sépare les foyers. Puis il nomme p le paramètre de l'ellipse et lui donne implicitement la valeur $2b^2/a$.



La première étape du calcul est la détermination de $ds=LI$. L'abscisse curviligne s est égale à AL . Soit H le point de l'axe AC , à la distance $r=CL$ de C .

L'équation de l'ellipse est : $r^2 = b^2/(1 - e^2 \cos^2 \theta)$, où e est l'excentricité de l'ellipse, égale à c/a et θ l'angle ACL . Cette équation s'écrit également : $b^2/r^2 = 1 - e^2 \cos^2 \theta$, qui donne, par différentiation, $-(b^2/r^3)dr = e^2 \cos \theta \sin \theta d\theta$. Or, d'après l'équation de l'ellipse $\cos^2 \theta = (r^2 - b^2)/e^2 r^2$. On en déduit, d'une part, $\cos \theta$ et, d'autre part, la valeur de $\sin^2 \theta = 1 - (r^2 - b^2)/e^2 r^2$.

Nous obtenons par substitution en prenant les valeurs positives de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$: $-(b^2/r)dr = \sqrt{(r^2 - b^2)(e^2 r^2 - r^2 + b^2)}d\theta$. Par ailleurs : $dz = r d\theta = RI$.

En conséquence : $dz = -b^2 dr / \sqrt{(r^2 - b^2)(e^2 r^2 - r^2 + b^2)}$.

Il ne reste plus qu'à exprimer ce résultat en fonction du paramètre $p (= 2b^2/a)$ et non plus de b et de e : $dz = -a^2 p dr / \sqrt{(2ar^2 - a^2 p)(a^2 p - pr^2)}$.

Nous pouvons maintenant obtenir une expression différentielle caractéristique d'un petit arc de trajectoire : $dz^2 = dr^2 + r d\theta^2$:

$$dz^2 = [(2a^3 pr^2 - 2apr^4 + a^2 p^2 r^2) / \{(2ar^2 - a^2 p)(a^2 p - pr^2)\}] dr^2.$$

Calcul de la force centrale y

Il s'agit maintenant, par l'intermédiaire de simples manipulations algébriques-différentielles, de faire apparaître l'expression générale de la force centrale y dans la mesure où le mouvement est assujéti à la loi des aires.

Nous avons : $ds^2/dz^2 = 2a^2 r^2 - 2r^4 + apr^2/a^3 p$.

Soit, également : $2a^2 - 2r^2 + ap/a^3 p = ds^2/r^2 dz^2$.

Or, d'après la loi des aires, «on aura partout ici suivant M. Newton (Phil. Nat. Princ. Math. lib. I, sect. 2, th. 1) les dt comme les rdz , ou $dt = rdz$ ».

En conséquence, l'expression précédente peut s'écrire :

$$ds^2/dt^2 = 2a^2 - 2r^2 + ap/a^3 p.$$

Varignon différencie alors les deux expressions en considérant dt comme une constante : $2dsd(ds)/dt^2 = -4rdr/a^3 p$, mais $dr = -dx$, d'où $4r/a^3 p = 2dsd(ds)/dx dt^2$. Il fait ainsi apparaître, à l'issue de son calcul, et seulement d'un calcul, l'expression générale, trouvée précédemment, de la force centrale y , d'où $y = 4r/a^3 p$. Celle-ci est donc bien comme la distance $CL(r)$ du centre C de l'ellipse «au corps L qui la décrit».

Varignon déduit alors de ce résultat ceux qui concernent la parabole et l'hyperbole.

déduire l'une de l'autre par le jeu de simples procédures bien réglées de différentiation et d'intégration. La science du mouvement devient algorithmique.

L'œuvre de Varignon est trop souvent oubliée ou, au mieux, limitée à ses contributions à la statique (le polygone de Varignon permet, notamment, de décrire les forces qui s'exercent dans des systèmes mécaniques à l'équilibre). Ce manque d'intérêt pour la plus grande partie de l'œuvre de Varignon s'explique simplement par le fait que la plupart des historiens de la mécanique classique ne voyaient, dans les mathématiques, qu'un instrument ou qu'un outil au service de la science, et privilégiaient l'analyse historique des concepts ou des principes de la mécanique ; ce faisant, ils négligèrent de penser la science du mouvement en tant que physique mathématique, c'est-à-dire qu'ils négligèrent le plus souvent de reconnaître son plein effet à l'action proprement mathématique de la physique mathématique dans la coordination, la cohérence et la genèse conceptuelle.

Or c'est précisément sur ce terrain que se situe l'effort de Varignon. À cet égard, n'est-il pas remarquable de constater que, si ses formules et règles générales résument et rassemblent bien divers résultats, elles sont aussi et surtout des points de départ pour de nouvelles investigations ? Avec Varignon, la physique mathématique, qui avait reçu son impulsion de Galilée, de Christiaan Huygens (1629-1695) et de Newton, prend plus nettement conscience de sa valeur inductive spécifique.

En ce sens, on peut dire que l'œuvre de Varignon, caractérisée par son nouveau style analytique orienté vers l'obtention d'ensembles de lois ou de règles régies par des procédures algorithmiques, style qui culminera, en 1788, avec la mécanique analytique de Joseph Louis Lagrange, aura finalement ouvert la voie à ce qui sera la physique mathématique des XVIII^e et XIX^e siècles.

Michel BLAY est directeur de recherche au CNRS et directeur adjoint chargé de la recherche à l'École normale supérieure Lettres et Sciences humaines.

M. BLAY, *La Naissance de la mécanique analytique*, Presses universitaires de France, 1992.

M. BLAY, *Les Principia de Newton*, Presses universitaires de France, 1995.

Histoire d'infini

MARIA REMÉNYI

Pendant 2 000 ans, le concept d'infini gêna les mathématiciens. John Wallis posa le symbole ∞ , les libérant ainsi des discussions philosophiques.



En Europe, au XVII^e siècle, est né le calcul différentiel et son astucieux formalisme autorisant la manipulation des quantités infinitésimales. L'inverse de l'infiniment petit étant l'infiniment grand, il fallait que le même siècle voie l'apparition du symbole ∞ . C'est le mathématicien britannique John Wallis (1616–1703) qui, le premier, abrégea le concept «infini» par ce symbole. John Wallis a largement contribué au développement des mathématiques de son époque, tant dans leur contenu que dans leur forme.

Les sciences en avaient bien besoin de ce progrès conceptuel pour progresser. Dans le signe inventé par Wallis, la polémique sur le sens à donner au mot «infini» durerait peut-être encore. En fait, mathématiciens, philosophes et théologiens polémiquaient depuis deux mille ans. Une situation qui n'avait pas que des inconvénients. Ainsi, la littérature mathématique des siècles passés était, du moins de prime abord, plus accessible que de nos jours ; ses auteurs se servaient de la langue écrite usuelle pour la description des objets et des relations mathématiques. Le langage moderne des formules, qui, pour de nombreux profanes, représente un obstacle insurmontable, et contribue de ce fait à l'impopularité générale de la discipline mathématique, n'est pas dû à quelque nécessité alchimique de conservation des secrets mathématiques. L'histoire des sciences montre

que le désir de résoudre des problèmes concrets favorise l'introduction de symboles et d'abréviations, afin de mieux formuler les hypothèses et les démonstrations et d'obtenir des conclusions précises.

L'une des difficultés consistait à découvrir tout ce que cache le mot infini. Aristote (–384 à –322) fit les premiers progrès. Le mot *apeiron* qu'utilisait le philosophe grec Aristote se caractérisait déjà, à l'époque présocratique, par des sens multiples. Il signifiait sans limite, indéfini, inconcevablement grand, mais désignait également, avec une connotation négative, le chaos duquel est né le monde. Ce n'est qu'au début de notre ère que «l'infini» fut identifié à l'«Un» divin. Pour Aristote, le mot infini était associé à l'expression de l'imperfection.

La précision qu'Aristote apporta à l'emploi de ce mot distinguant, entre infini actuel et infini potentiel, fut d'une importance décisive pour toutes les discussions mathématiques futures. Un processus qui poursuit sans fin, comme par exemple la production de nombres naturels par la consigne «toujours poursuivre la numération», n'est que potentiellement infini, car à chaque stade du processus il n'existe qu'un nombre fini d'objets. À l'inverse, un ensemble de taille infinie qui existe une fois pour toutes, correspond à un infini actuel.

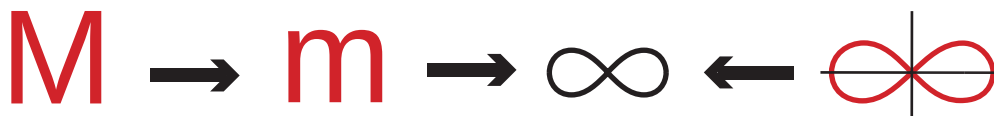
Notons que la mathématique grecque utilisait des méthodes infinitésimales cachées (méthode d'exhaus-

tion) pour le calcul des longueurs des courbes ou des surfaces délimitées par des lignes courbes, mais l'infini n'apparaissait pas en tant que terme mathématique. Euclide, par exemple, ne dit pas : «il existe une quantité infinie de nombres premiers», mais «il existe une quantité de nombres premiers supérieure à toute quantité donnée».

Réflexion métaphysique

Au Moyen Âge, ère obscure pour les sciences, les réflexions sur la nature de l'infini étaient essentiellement métaphysiques. Certaines peuvent toutefois être interprétées comme la préparation des considérations mathématiques du calcul infinitésimal au XVII^e siècle. C'est le cas des réflexions sur l'infini actuel et potentiel du théologien allemand Nicolas de Cues (1401–1464). Johannes Kepler (1571–1630) s'en inspira, par exemple, lorsqu'il abandonna les méthodes antiques pour le calcul des surfaces.

Francesco Bonaventura Cavalieri (1598–1647), au XVII^e siècle, fut le premier à adopter une position considérée comme moderne sur l'infini, à savoir que des lois différentes gouvernent les grandeurs infinies et les grandeurs finies. Dans sa méthode des indivisibles, il se préoccupa moins de spéculations philosophiques que de trouver une façon de résoudre son problème. Pour y arriver, il contourna astucieusement les difficultés qui se



1. Le signe infini aurait été créé au XVII^e siècle par le mathématicien britannique John Wallis à partir d'une version cursive du m latin (ou M),

c'est-à-dire de 1 000 en chiffres romains. Peut-être a-t-il aussi pensé à la courbe de même forme (lemniscate), qui se parcourt sans fin?

présentaient lors du calcul de la somme d'un nombre infini de grandeurs.

Entre autres contributions, John Wallis poursuivit le développement des méthodes de Cavalieri. Après ses études supérieures, qui ne furent nullement marquées par une intense activité mathématique, il fut ordonné prêtre à Londres. Pendant cette période, il participa aux préparatifs de la fondation de la *Royal Society*. En 1643, il s'était illustré durant la guerre civile qui opposait royalistes et parlementaires, en décryptant très brillamment des informations secrètes. Lorsque Wallis fut nommé en 1649 professeur de géométrie à Oxford, ce n'était pas en raison de ses performances mathématiques, c'était probablement avant tout le résultat de ses activités politiques.

Cependant, l'estime dans laquelle Wallis était tenu dans le monde scientifique était méritée : il est aujourd'hui considéré comme l'un de ceux qui ont ouvert la voie au calcul infinitésimal et comme le précurseur le plus éminent de Newton, qui fut influencé par l'ouvrage majeur de Wallis, *Arithmetica Infinitorum* (1656). Auparavant, ses travaux avaient porté sur les sections coniques (*De sectionibus conicis*, 1655), où il délaissa l'approche purement géométrique de la mathématique grecque pour considérer les sections coniques comme des courbes lisses, dont il établit les équations algébriques. Il déduisit de ces équations les propriétés des sections coniques sans faire appel à des arguments géométriques, mais uniquement par le calcul. Il participa ainsi à un développement essentiel de l'histoire des mathématiques : l'algébrisation de la géométrie.

Dès le début de ces travaux, Wallis proposa une modification de la méthode des indivisibles de Cavalieri. Alors que Cavalieri divisait les surfaces en un nombre infini de segments, Wallis les décomposait en un nombre infini de parallélogrammes de même taille, cette taille étant «une fraction infiniment petite, égale à $1/\infty$ de la surface totale et le symbole ∞ désignant l'infini».

De M au signe infini

Pourquoi choisit-il cette représentation ? On ne peut bien sûr apporter à cette question qu'une réponse spéculative. Bien avant le début de ses activités mathématiques, Wallis s'était fait un nom en tant que philologue ; il savait probablement que le symbole ∞ désignait une ligature latine de m apparue

au VII^e siècle, c'est-à-dire une écriture cursive utilisée pour signifier 1 000 en chiffre romain, donc un «très grand» nombre. Un contemporain de Wallis, le mathématicien et philosophe hollandais Bernhard Nieuwentijt, utilise pour sa part le signe «m» dans son *Analysis infinitorum* de 1695. Le signe m, un symbole proche du futur ∞ , y désigne l'infini. Sans doute Wallis a-t-il aussi pensé que la boucle que représente le symbole ∞ faisait penser à l'infini, puisqu'elle peut être parcourue sans fin.

L'apparition du symbole ∞ contribua en tout cas fortement à la modernisation en marche des mathématiques. Au tournant du XVIII^e siècle, Isaac Newton (1643–1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) organisèrent les connaissances éparses sur le calcul différentiel et intégral en une véritable théorie. Tout était prêt pour que le symbole soit de plus en plus utilisé. Au début du XVIII^e siècle, il apparut de plus en plus fréquemment dans la littérature mathématique et philosophique ; il était souvent lié au concept de l'infiniment petit, car la signification et l'admissibilité de cette notion dans le calcul infinitésimal alors en cours de développement posaient un problème tant mathématique que philosophique. Avec les travaux de Léonard Euler (1707–1783), le signe ∞ devint, dans la seconde moitié du XVIII^e siècle, un élément permanent du langage symbolique mathématique. Euler, contrairement à Newton et à Leibniz, rejetait complètement les légitimations métaphysiques des grandeurs infiniment petites et adoptait enfin un point de vue strictement formel.

La théorie des grandeurs infinitésimales, dont les bases restaient vacillantes, fut largement améliorée au cours du XIX^e siècle grâce à l'introduction du processus de passage à la limite, et des notions de continuité et de convergence. Une théorie du calcul différentiel et infinitésimal rigoureuse et qui répondait aux exigences formelles et logiques des mathématiques apparaissait enfin.

Au XIX^e siècle, le symbole ∞ servait surtout, comme aujourd'hui d'ailleurs, à décrire les processus de passage à la limite, notamment pour les séries et les suites. Il décrivait, au sens d'Aristote, un infini potentiel. Toutefois, Georg Cantor (1845–1918), le fondateur de la théorie des ensembles, et par conséquent de la théorie moderne de l'infini, préféra différencier par des symboles différents les deux types d'infini. Il dési-



2. Le Britannique John Wallis contribua à l'algébrisation de la géométrie. Il écrivit, le premier, le signe ∞ pour décrire des parallélogrammes infiniment petits.



3. Le signe ∞ fut vite employé en dehors des mathématiques pour symboliser l'infini. Ici une carte d'un ancien jeu de tarots.

gna le premier nombre transfini (infini actuel) par la lettre hébraïque *aleph*. L'emploi de ce nouveau signe pour signifier l'infini ne paraît arbitraire qu'au premier abord, car, dès les années 1700, le symbole ∞ fut aussi employé en dehors des mathématiques et de la philosophie, afin de symboliser l'infini ou l'éternité. Il fit, par exemple, son apparition sur la carte de tarot, appelée le menteur ou le mage. Or, le symbole kabbalistique qui fut associé à cette carte est la lettre hébraïque *aleph*.

Maria REMÉNYI, journaliste, est historienne des sciences.

