

présentaient lors du calcul de la somme d'un nombre infini de grandeurs.

Entre autres contributions, John Wallis poursuivit le développement des méthodes de Cavalieri. Après ses études supérieures, qui ne furent nullement marquées par une intense activité mathématique, il fut ordonné prêtre à Londres. Pendant cette période, il participa aux préparatifs de la fondation de la *Royal Society*. En 1643, il s'était illustré durant la guerre civile qui opposait royalistes et parlementaires, en décryptant très brillamment des informations secrètes. Lorsque Wallis fut nommé en 1649 professeur de géométrie à Oxford, ce n'était pas en raison de ses performances mathématiques, c'était probablement avant tout le résultat de ses activités politiques.

Cependant, l'estime dans laquelle Wallis était tenu dans le monde scientifique était méritée : il est aujourd'hui considéré comme l'un de ceux qui ont ouvert la voie au calcul infinitésimal et comme le précurseur le plus éminent de Newton, qui fut influencé par l'ouvrage majeur de Wallis, *Arithmetica Infinitorum* (1656). Auparavant, ses travaux avaient porté sur les sections coniques (*De sectionibus conicis*, 1655), où il délaissa l'approche purement géométrique de la mathématique grecque pour considérer les sections coniques comme des courbes lisses, dont il établit les équations algébriques. Il déduisit de ces équations les propriétés des sections coniques sans faire appel à des arguments géométriques, mais uniquement par le calcul. Il participa ainsi à un développement essentiel de l'histoire des mathématiques : l'algébrisation de la géométrie.

Dès le début de ces travaux, Wallis proposa une modification de la méthode des indivisibles de Cavalieri. Alors que Cavalieri divisait les surfaces en un nombre infini de segments, Wallis les décomposait en un nombre infini de parallélogrammes de même taille, cette taille étant «une fraction infiniment petite, égale à  $1/\infty$  de la surface totale et le symbole  $\infty$  désignant l'infini».

## De M au signe infini

Pourquoi choisit-il cette représentation ? On ne peut bien sûr apporter à cette question qu'une réponse spéculative. Bien avant le début de ses activités mathématiques, Wallis s'était fait un nom en tant que philologue ; il savait probablement que le symbole  $\infty$  désignait une ligature latine de m apparue

au VII<sup>e</sup> siècle, c'est-à-dire une écriture cursive utilisée pour signifier 1 000 en chiffre romain, donc un «très grand» nombre. Un contemporain de Wallis, le mathématicien et philosophe hollandais Bernhard Nieuwentijt, utilise pour sa part le signe «m» dans son *Analysis infinitorum* de 1695. Le signe m, un symbole proche du futur  $\infty$ , y désigne l'infini. Sans doute Wallis a-t-il aussi pensé que la boucle que représente le symbole  $\infty$  faisait penser à l'infini, puisqu'elle peut être parcourue sans fin.

L'apparition du symbole  $\infty$  contribua en tout cas fortement à la modernisation en marche des mathématiques. Au tournant du XVIII<sup>e</sup> siècle, Isaac Newton (1643–1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) organisèrent les connaissances éparses sur le calcul différentiel et intégral en une véritable théorie. Tout était prêt pour que le symbole soit de plus en plus utilisé. Au début du XVIII<sup>e</sup> siècle, il apparut de plus en plus fréquemment dans la littérature mathématique et philosophique ; il était souvent lié au concept de l'infiniment petit, car la signification et l'admissibilité de cette notion dans le calcul infinitésimal alors en cours de développement posaient un problème tant mathématique que philosophique. Avec les travaux de Léonard Euler (1707–1783), le signe  $\infty$  devint, dans la seconde moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle, un élément permanent du langage symbolique mathématique. Euler, contrairement à Newton et à Leibniz, rejetait complètement les légitimations métaphysiques des grandeurs infiniment petites et adoptait enfin un point de vue strictement formel.

La théorie des grandeurs infinitésimales, dont les bases restaient vacillantes, fut largement améliorée au cours du XIX<sup>e</sup> siècle grâce à l'introduction du processus de passage à la limite, et des notions de continuité et de convergence. Une théorie du calcul différentiel et infinitésimal rigoureuse et qui répondait aux exigences formelles et logiques des mathématiques apparaissait enfin.

Au XIX<sup>e</sup> siècle, le symbole  $\infty$  servait surtout, comme aujourd'hui d'ailleurs, à décrire les processus de passage à la limite, notamment pour les séries et les suites. Il décrivait, au sens d'Aristote, un infini potentiel. Toutefois, Georg Cantor (1845–1918), le fondateur de la théorie des ensembles, et par conséquent de la théorie moderne de l'infini, préféra différencier par des symboles différents les deux types d'infini. Il dési-



2. Le Britannique John Wallis contribua à l'algébrisation de la géométrie. Il écrivit, le premier, le signe  $\infty$  pour décrire des parallélogrammes infiniment petits.



3. Le signe  $\infty$  fut vite employé en dehors des mathématiques pour symboliser l'infini. Ici une carte d'un ancien jeu de tarots.

gna le premier nombre transfini (infini actuel) par la lettre hébraïque *aleph*. L'emploi de ce nouveau signe pour signifier l'infini ne paraît arbitraire qu'au premier abord, car, dès les années 1700, le symbole  $\infty$  fut aussi employé en dehors des mathématiques et de la philosophie, afin de symboliser l'infini ou l'éternité. Il fit, par exemple, son apparition sur la carte de tarot, appelée le menteur ou le mage. Or, le symbole kabbalistique qui fut associé à cette carte est la lettre hébraïque *aleph*.

Maria REMÉNYI, journaliste, est historienne des sciences.

# De la perspective à l'infini géométrique

**JEAN-PIERRE LE GOFF**

*Au XVII<sup>e</sup> siècle, grâce à la géométrie projective, née de l'union de la théorie de la perspective et de la théorie des coniques, l'infini géométrique acquiert une «dimension» humaine, une évidence perceptible. L'infini potentiel des philosophes devient l'infini actuel des géomètres.*



The Bridgman Art Library

**P**our les philosophes et pour les géomètres de la Grèce antique, l'infini n'a pas de véritable existence. Il est considéré comme «potentiel», accessible en puissance. Ainsi, Aristote impose une vision géocentrique et «finiste» du cosmos, limité par la sphère des fixes, sorte de voûte céleste qui porte les étoiles et marque les confins du monde avec le néant extérieur. Dans ce contexte, la géométrie euclidienne reconnaît et intègre l'infini potentiel, mais s'arrête aux rives de l'infini «actuel». L'infini inspire alors aux géomètres grecs méfiance et circonspection, car son usage immodéré ou inattentif conduit à des contradictions.

Un objet élémentaire tiré de la géométrie d'Euclide, une «ligne droite», illustre ces contradictions. Euclide la définit comme l'extension la plus «économique» d'un point à un autre. Aussi, une telle ligne s'apparente plutôt à notre moderne «segment» qu'à ce qu'un mathématicien d'aujourd'hui nomme une droite – à ceci près que, pour Euclide et ses successeurs, jusqu'au XVII<sup>e</sup> siècle, cette «ligne» est prolongeable autant que nécessaire pour les besoins d'une construction ou d'une démonstration (dans une figure où il est nécessaire de

déterminer le point de concours de deux droites non parallèles, par exemple). De même, une «surface plane» est en fait une figure plane limitée par un contour fermé : un segment de parabole, par exemple, est limité par la courbe et par l'une de ses cordes. Il en est de même d'un corps ou d'un solide, volume fini limité par une ou par plusieurs surfaces. Ainsi la ligne droite, le plan ou le solide des géomètres strictement euclidiens sont finis, mais prolongeables à volonté, et non des supports rectilignes, plans ou volumiques d'un espace conçu d'emblée comme infiniment étendu.

## Du fini prolongeable à l'infini

Depuis cette époque, on débat du statut de ce qu'on nomme le cinquième postulat d'Euclide, au premier Livre de ses *Éléments*. Ce postulat – une proposition non démontrée – énonce en substance que, si une sécante rencontre deux autres droites en faisant des angles internes situés d'un même côté de la sécante tels que leur somme soit inférieure à deux angles droits, les deux droites, prolongées indéfiniment (c'est-à-dire autant que nécessaire) se

rencontrent du côté où se trouvent les angles de somme inférieure à deux angles droits. Un équivalent moderne de ce postulat consiste à dire que, par un point hors d'une droite, il passe une parallèle à cette droite et une seule. Les géomètres ont soulevé la question suivante : ne pouvait-on pas démontrer le cinquième postulat à partir des autres postulats et propositions des *Éléments*? Les premières tentatives de démonstration reposaient sur le prolongement indéfini des droites, c'est-à-dire leur prolongement potentiellement infini avec conservation de l'alignement.

On sait aujourd'hui que ces tentatives étaient vaines : le cinquième postulat d'Euclide ne peut être démontré. On sait aussi que cette aventure des parallèles a conduit à la création de trois types de géométries. L'une, dite euclidienne, admet ce postulat comme un axiome de la théorie. Les deux autres, dites non euclidiennes, ont été conçues à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et posent comme axiome l'une des deux formes que peut prendre la négation du postulat des parallèles. La géométrie hyperbolique prend pour principe que par un point il passe plus d'une parallèle à une droite donnée (et, par voie de conséquence, on

démontre qu'il en passe une infinité). La géométrie elliptique, quant à elle, postule que par un tel point il ne passe aucune parallèle à une droite donnée.

Ce que l'on sait moins, c'est que l'émergence des géométries non euclidiennes n'est devenue possible qu'après celle de la géométrie projective, qui devait servir de cadre général aux trois modèles, et que cette géométrie projective est née de la conjonction, au XVII<sup>e</sup> siècle, de la science de la perspective, issue de la géométrie pratique, et de la théorie des coniques d'Euclide et surtout d'Apolonios de Perga (262?-180?). En somme, l'invention de la perspective centrale et ses prolongements géométriques ont rendues possibles l'irruption et la considération sereine des éléments à l'infini dans la géométrie euclidienne (voir la figure 2), puis l'invention d'un cadre géométrique où l'on a pu envisager d'autres systèmes d'axiomes jusque dans leurs conséquences ultimes.

L'évolution des idées sur l'infini géométrique est passée par la question de la perspective, c'est-à-dire la question de la représentation de la troisième dimension dans un plan. Un moment à la fois crucial et fondateur de cette question fut l'invention, à la Renaissance, de la «perspective linéaire».

## La perspective centrale, invention du Quattrocento

Au travers de celle-ci, l'infini géométrique actuel, l'espace actuellement infiniment étendu, a trouvé une première représentation dans le dessin, pictural ou technique, et ce avant même d'avoir été pensé : il s'y trouve pointé, voire désigné sur l'horizon, mais aussi, très souvent, masqué par un mur ou par une porte.

La perspective linéaire consiste à projeter sur le plan du tableau les rayons rectilignes et imaginaires allant de l'objet à représenter jusqu'à l'œil, supposé ponctuel, du peintre ou du spectateur (voir l'encadré de la page 70). Elle est aussi nommée perspective centrale ou projection conique par les mathématiciens : l'œil constitue le centre (O) de cette projection, et tous les rayons passant par O et issus des points situés sur le contour de l'objet forment alors un cône de sommet O.

Dans la perspective linéaire, un ensemble de droites parallèles de l'espace a pour projection, sur le plan du tableau, un ensemble de droites parfois parallèles (lorsqu'elles sont parallèles au tableau), mais en général concourantes. Prenons, par

exemple, un faisceau de droites parallèles et perpendiculaires au plan du tableau, tracées sur le sol : les images de ces droites forment, sur le tableau, un ensemble de droites qui concourent en un point, le «point de fuite central» défini comme tel vers 1435 par Leon Battista Alberti (1404-1472). Ce sont les peintres ou les architectes de la Renaissance italienne du XV<sup>e</sup> siècle – le Quattrocento –, tels que Filippo Brunelleschi (1377-1446), Alberti et Piero della Francesca (1416?-1492), qui ont codifié les règles de la construction légitime du dessin en perspective. Ils ont ainsi inauguré une pratique conventionnelle et géométrisée de la perspective, mais dont la grande adéquation avec la vision humaine, d'une part, et les conséquences pratiques, d'autre part, devaient assurer la postérité.

Ce faisant, par la définition et l'usage dans le dessin d'un point de concours de droites en réalité parallèles, les artistes italiens de la Renaissance ont donné le premier exemple de représentation visuelle d'un infini actuel : le point de fuite figure sur le tableau un point en réalité situé à l'infini, là où les droites parallèles «se rencontrent». Il ne s'agit pas de dire ici que ces artistes



1. CETTE ANNONCIATION, conservée au Musée des Beaux-Arts de Caen, est due au peintre maniériste Pâris Bordone (1500-1571). Une analyse géométrique de ce tableau montre qu'il illustre le procédé singulier des «vues de l'en deçà» données par cet artiste : il ne peint pas ce qu'il voit dans le cadre fictif dont il entoure la scène représentée et dont on peut supposer que la base sert de ligne de terre,

mais aussi ce qu'il voit «en deçà» du cadre, devant le cadre, de son propre côté. Ainsi, tandis que l'ange fait l'annonce à Marie, les trajectoires visuelles des deux protagonistes ne peuvent se croiser. L'ange est au-delà de la fenêtre, tandis que la Vierge est située dans l'en deçà, du côté du peintre, sur un plan plus élevé que celui de l'observateur.

avaient pour projet de mettre en évidence la possibilité géométrique de penser l'infini actuel, ou qu'ils aient eu une quelconque conscience d'avoir participé à son invention. Les conceptions géométriques des théoriciens ou des praticiens de la Renaissance étaient encore profondément marquées par les idées finitistes des autorités antiques en la matière. Étaient encore à venir des notions telles que la droite infinie, le plan infini, ou l'espace antérieur à la matière qui l'habite.

Néanmoins, il est incontestable que les œuvres d'art, bientôt relayées par la gravure et par l'imprimerie, donneront à voir une multitude d'occurrences de l'infini représenté. En effet, le point de fuite central sera bientôt flanqué des points de distance, dont on s'avisera ensuite que ce sont aussi des points de fuite, donc des représentations de l'infini (voir la figure 4). C'est encore l'horizon (la ligne horizontale sur le tableau, située à même hauteur que l'œil du spectateur) lui-même qui apparaîtra comme lieu d'une multitude – d'une infinité – de points de fuite ; puis, vers 1600, viendra enfin l'idée que tout point du tableau est, en dernière instance, un point de fuite.

## Desargues, le parallélisme et le concours à l'infini

Cette émergence d'une multiplicité de représentations visuelles de l'infini actuel devait conduire, au début du XVII<sup>e</sup> siècle, en France, à une révolution dans le champ conceptuel de la géométrie elle-même. Girard Desargues (1591-1661), un géomètre lyonnais, va en effet théoriser ce que tout pratiquant de la perspective linéaire a vu sans toujours en croire ses yeux : il identifie le concours de droites ou de plans au parallélisme de ces objets. En d'autres termes, le parallélisme n'est rien d'autre qu'un concours à l'infini, des droites parallèles ne sont rien d'autre que des droites qui se rencontrent en un point situé à l'infini. Cette idée, Desargues la décline dans son *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, c'est-à-dire un « essai pour atteindre à la compréhension synthétique des diverses occurrences de courbes coniques obtenues par intersection plane d'un cône à

base circulaire », imprimé à 50 exemplaires en 1639. Cette idée rompt avec la conception finitiste, héritée des Grecs, que l'on se faisait de la ligne droite, de la surface ou figure plane, ou du solide.

Desargues a derrière lui deux siècles de pratique de la perspective, qui ont contribué à éduquer l'œil du spectateur occidental. En particulier, il est deux points qu'il convient de préciser pour comprendre les idées du géomètre. Le premier, c'est que le cadre dans lequel l'artiste cherche à figurer une scène – ce qu'Alberti nommait une « fenêtre » – était conçu, dans un premier temps, comme une ouverture sur un au-delà à représenter. Le second, c'est que cette fenêtre était en principe disposée verticalement, sur un géométral horizontal. Or les artistes ont très vite transgressé ces deux contraintes initiales.

D'une part, ils se sont autorisés à représenter quelques éléments de l'en-deçà de la fenêtre : timidement, d'abord, et en trompe-l'œil, ils ont dessiné le cadre du tableau ou l'encadrement de ladite fenêtre, prise alors au sens propre, ou tel objet posé sur le rebord d'une ouverture feinte (synonyme alors de peinture). Ainsi, dans le *Saint-Jérôme en son cabinet* d'Antonello de Messine, un oiseau est perché sur le bord d'une fenêtre au-delà de laquelle on aperçoit le saint à son bureau. Un autre exemple, plus tardif

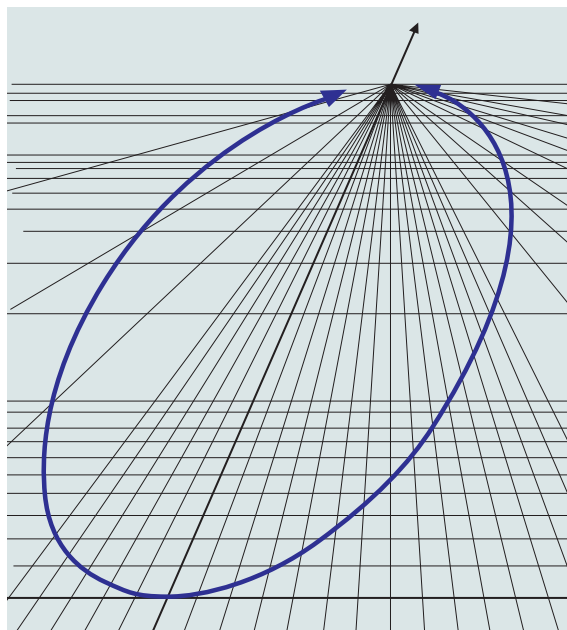
et contemporain de Desargues, est un portrait de Philippe de Champaigne (1602-1674) qui montre le personnage, la main négligemment posée sur le bord du cadre. Des exemples tout à fait singuliers de ce que nous appellerons ici des « vues de l'en-deçà » ont été créés au milieu du XVI<sup>e</sup> siècle par un peintre vénitien maniériste, Paris Bordone (voir la figure 1).

D'autre part, les peintres se sont abstraits de la contrainte du fil à plomb et du niveau, comme en témoignent les décors plafonnants (tel l'*Oculus de la chambre des époux* d'Andrea Mantegna, voir la figure 7), ou plus tard les décors baroques de la Contre-Réforme jésuite (ceux d'Andrea Pozzo, par exemple), et enfin les trompe-l'œil sur voûtes ou toutes sortes de surfaces irrégulières (théorisés au début du XVII<sup>e</sup> siècle en France par le jésuite Jean Dubreuil ou par le graveur Abraham Bosse, ami de Desargues). Ces œuvres indiquent qu'un tableau, voire une fresque, n'est pas nécessairement situé dans un plan orthogonal au sol.

De telles images ne pouvaient qu'imprimer avec force l'idée que la fenêtre ne constitue pas une borne et que cette fenêtre n'est pas nécessairement d'aplomb sur le géométral. Toutefois, il restait un pas à franchir. Desargues le fera, non dans le domaine de la représentation, mais

dans celui de la conception : quand un rayon visuel théorique – conçu comme une demi-droite potentielle depuis Euclide et son *Optique* – s'étend à l'infini comme une ligne droite, pourquoi s'arrêterait-il à l'œil ? Pour Desargues, un cône proprement dit est un cône à deux « nappes », obtenu en prolongeant en droites entières les demi-droites issues de son sommet. De façon analogue, on peut prolonger les rayons visuels en arrière de l'œil ; celui-ci est aveugle dans ces directions, mais cela n'empêche pas d'imaginer cet espace arrière.

Desargues repensa alors les « coniques », courbes obtenues en coupant un cône à base circulaire par un plan. Ces courbes – l'ellipse, la parabole et l'hyperbole – suscitaient un intérêt renouvelé, de Johannes Kepler (1571-1630) et ses trajectoires planétaires elliptiques à Athanasius Kircher (1601-1680) et ses



**2. LES ÉLÉMENTS À L'INFINI** ont longtemps été considérés avec circonspection. Aujourd'hui, on sait qu'une parabole, courbe ouverte, peut devenir, en perspective, une ellipse, courbe fermée, les branches infinies se rejoignant en un même point de l'horizon qui représente, à distance finie, la droite à l'infini commune aux plans horizontaux ; ce point à l'infini se retrouve donc à distance finie de l'observateur, dans le tableau.

miroirs paraboliques, en passant par Descartes et sa classification algébrique des courbes du second degré.

Considérons les rayons visuels qui joignent un œil ponctuel aux points d'un cercle réel. Ces rayons forment un cône à base circulaire dont le sommet est l'œil. Toute coupe du cône par un plan produit une courbe qui est une perspective du cercle. Autrement dit, Desargues a pris conscience qu'une conique n'est jamais qu'un cercle, vu d'un bon point de vue.

Cela n'avait jamais été énoncé en ces termes auparavant. On concevait bien qu'une ellipse, courbe fermée, pouvait être l'image d'un cercle en perspective. Par exemple, Albrecht Dürer (1471-1528) a construit point par point des coupes d'un cône droit limité, dans les trois situations de coupe possibles (perpendiculaire à l'axe vertical, ce qui donne un cercle, parallèle à cet axe, ce qui donne une hyperbole, parallèle à une génératrice, et l'on obtient une parabole, et quelconque, ce qui donne une ellipse). Notons que son dessin d'ellipse a une forme ovoïde, comme s'il n'en croyait pas ses yeux, s'attendant plutôt à une courbe effilée près du sommet du cône plutôt qu'à une véritable ellipse. Pourtant, il paraissait inconcevable que l'on puisse assimiler au cercle des courbes non fermées, ayant des branches infinies, comme la parabole, ou présentant des ruptures de continuité, comme l'hyperbole à deux parties séparées, telle que nous la définissons aujourd'hui.

Kepler, dans son *Optique*, avait certes fait remarquer qu'une parabole n'est jamais qu'une ellipse dont l'un des foyers se serait éloigné à l'infini, la courbe ouvrant ses bras en quelque sorte, puis devenant une hyperbole lorsque cette ouverture se trouve limitée par deux droites asymptotes, dans le mouvement tournant que ferait un plan coupant un cône (illimité, mais à une nappe). Cette conception novatrice, réintégrant le mouvement dans la définition des courbes, a sans doute inspiré Desargues, mais le géomètre lyonnais est allé plus loin : il a dépassé l'infini potentiel de Kepler et a posé



**3. UNE SCÈNE est délimitée, au XVI<sup>e</sup> siècle par une «fenêtre» par laquelle on l'observe. Progressivement, les artistes s'en affranchissent et en jouent. Ici la fenêtre apparaît sous forme d'un cadre : Philippe de Champaigne peint Robert Arnauld d'Andilly avec une main négligemment posée sur le bord du cadre. Notons que Philippe de Champaigne demanda à Desargues de dessiner pour lui le schéma d'un décor plafonnant pour la voûte de l'ancienne église des carmélites : le Christ en croix, flanqué de la Vierge et de saint Jean, paraissait être sur un plan vertical (en contre-plongée), alors qu'il était peint sur un plan horizontal.**

d'emblée le cône comme surface infinie à deux nappes.

Plus encore, en assimilant faisceaux de droites parallèles et faisceaux de droites concourantes, Desargues fut amené à concevoir qu'une droite n'est jamais qu'un cercle de rayon infini, c'est-à-dire dont le centre, une fois fixé l'un des points du cercle, s'en est éloigné indéfiniment. Et qu'un cylindre à base circulaire est un cône dont le sommet se trouve à l'infini – ce qui explique que les coupes d'un cylindre par un plan produisent aussi des coniques, en l'occurrence des ellipses ou des cercles.

### Bassin circulaire, ellipse, parabole ou hyperbole

Pour mieux comprendre comment, dans le contexte de la perspective, les diverses coniques apparaissent comme des projections du cercle, imaginons une situation picturale banale : un peintre qui observe un bassin circulaire au travers de la «fenêtre» fictive où il souhaite le représenter, le tableau étant orthogonal au sol (*voir la figure 6*). On pourrait faire appa-

raître les diverses coniques en faisant varier l'inclinaison du tableau par rapport au sol. Modifions plutôt les positions relatives de l'œil, du tableau et du bassin.

Quand le bassin se situe au-delà de la fenêtre, son image est une ellipse ou un cercle, dans ce que l'on nomme, depuis Apollonios, le cas d'antiparallélisme. Rapprochons le bassin de l'observateur, de façon qu'une partie au moins du bassin se retrouve entre l'œil et le tableau ; la projection du bassin sur le plan du tableau – un plan supposé illimité – reste une courbe fermée (une ellipse) dont une partie n'apparaîtra pas dans le tableau, puisqu'elle est située sous la ligne de terre. Rapprochons encore le bassin de l'observateur, jusqu'au moment où celui-ci se retrouve debout sur son contour ; dans ce cas, le rayon visuel partant de l'œil et joignant son point d'aplomb est parallèle au tableau et ne le rencontrera jamais, ou plutôt à l'infini. Ce point du cercle ayant une

image à l'infini, l'image du bassin circulaire devient une parabole (géométriquement, cette situation correspond à un plan de coupe parallèle à une génératrice du cône).

Que se passe-t-il enfin quand l'observateur met les pieds dans l'eau, de sorte que le bassin s'étend aussi derrière lui ? Le «plan neutre» – le plan parallèle au tableau et passant par l'observateur – coupe alors le cercle en deux points A et B. L'image sur le plan du tableau de chacun de ces points étant à l'infini, la partie du bassin circulaire qui s'étend devant l'observateur produit une courbe-image possédant deux branches infinies, c'est-à-dire une hyperbole. Plus précisément, il s'agit d'une hyperbole telle que l'avait définie Apollonios, c'est-à-dire une seule des deux courbes séparées qui composent une hyperbole dans sa définition moderne. Quant à l'arc du bassin qui se trouve derrière l'observateur, celui-ci ne le voit pas, mais cela n'empêche pas le géomètre de concevoir sa projection sur le plan du tableau. Celle-ci est obtenue en prolongeant jusqu'au plan

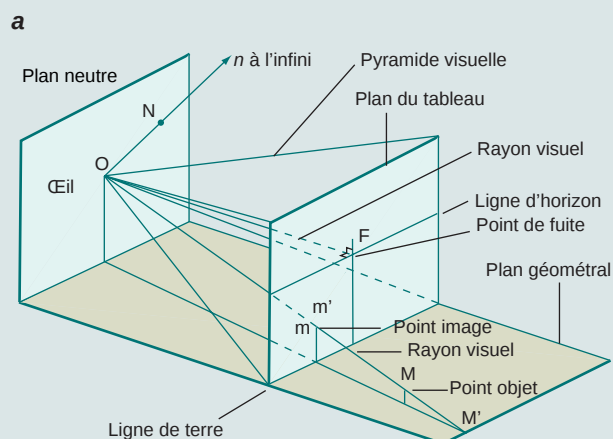
J.G. BERTZIRIAN

## Le principe de la perspective centrale

Une perspective centrale, dite aussi linéaire, est, géométriquement parlant, une projection de l'espace dans un plan (P), menée à partir d'un point fixe O extérieur au plan (P). Chaque point M de l'espace a pour image le point m, lorsqu'il existe, intersection de la droite (OM) et du plan (P).

Le point O (voir la figure a) représente le centre de projection, c'est-à-dire, dans la pratique du dessin, un œil ponctuel, situé au-dessus du plan au sol, nommé géométral. Toutes les demi-droites issues de O – les rayons visuels – forment une pyramide ou un cône dits visuels, s'appuyant sur le cadre du tableau rectangulaire ou en forme de tondo (rond), qui est une partie du plan de projection (P).

Le tableau et le géométral se coupent selon la ligne dite de terre. Le rayon visuel principal est perpendiculaire au tableau et y détermine un point F, le point de fuite principal ; ce point F détermine ensuite le niveau d'une ligne parallèle à la ligne de terre passant par lui, que l'on nomme la ligne d'horizon. Cette ligne est aussi l'intersection du tableau avec le plan horizontal principal, parallèle au géométral et passant par l'œil. Enfin, le plan parallèle au tableau passant par l'œil O, qui contient tous les rayons visuels parallèles au tableau, est nommé plan neutre.

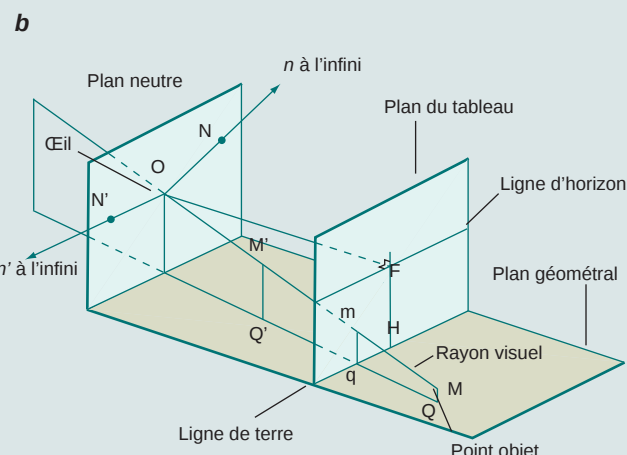


Un point M situé au-delà de la fenêtre aura pour image perspective ou pour apparence un point m du tableau par intersection du rayon visuel (OM) avec le tableau (voir la figure b) ; un point M' ou M'' aligné avec O et M aura la même image que M dans le tableau ( $m' = m$ ).

La perspective centrale primitive ne considère que l'au-delà de la fenêtre, tandis que la projection conique moderne considère tous les points de l'espace, situés sur toutes les droites passant par O. Dans ce cas, les rayons visuels traversent l'œil et «cherchent» aussi tous les points situés en deçà du tableau : ceux-ci peuvent alors être situés entre l'œil et le tableau (un cadre en trompe-l'œil, par exemple, ou un objet hors cadre comme on en verra apparaître au début du XVI<sup>e</sup> siècle) ; ou bien l'œil O, devenu purement géométrique, peut être interposé entre l'objet visé et le tableau ; dans ce dernier cas, le perspecteur aurait alors des idées derrière la tête, en quelque sorte, ce qui n'a, à notre connaissance, jamais été exploité par les peintres, du moins en termes géométriques.

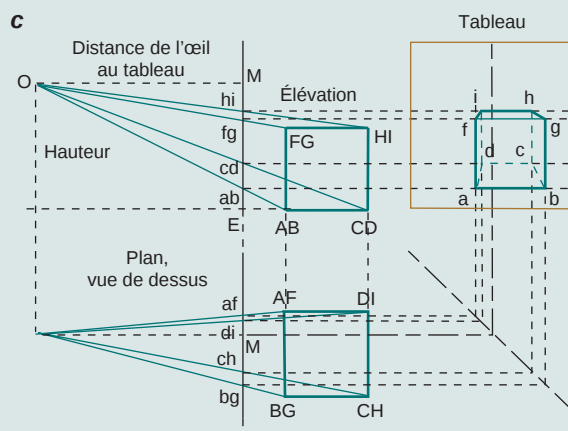
Notons enfin qu'un point N ou N' du plan neutre n'a pas d'image n ou n' à distance finie dans le tableau ; en géométrie projective,

on dira que l'horizon de la direction des plans parallèles au tableau est la droite à l'infini du tableau.



Le problème du dessin en perspective consiste, pour chaque point M de la scène à représenter, à déterminer le point m correspondant dans le tableau. Pour obtenir cette image, il existe plusieurs procédés, dont celui, dit aujourd'hui de la double projection, qui permet de repérer, au sol, l'écart qH de la projection q de m par rapport à la ligne PH, et, de profil, la hauteur mq du point m par rapport au sol (voir la figure c).

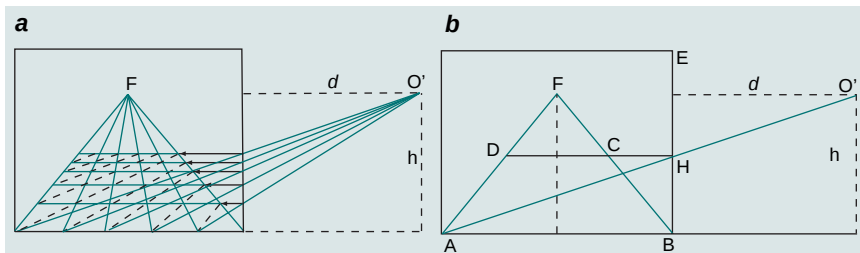
Cette méthode, probablement celle que Brunelleschi utilisa pour dessiner les premières architectures réputées être tracées en perspective linéaire, consiste à croiser les informations données par deux projections orthogonales, l'une sur le plan horizontal, l'autre sur un plan vertical, et qui peuvent être une vue de face et une vue de profil. Ces représentations conventionnelles étaient déjà connues de l'Antiquité, mais c'est Piero della Francesca qui, pour la première fois, exposa géométriquement la méthode. Le croisement des informations s'opère en juxtaposant plan et profil, où le tableau est réduit à une simple ligne, et peut se faire par rappel des points de la ligne du tableau de l'un sur la ligne du tableau de l'autre. Le principe est ici illustré avec le dessin d'un cube.



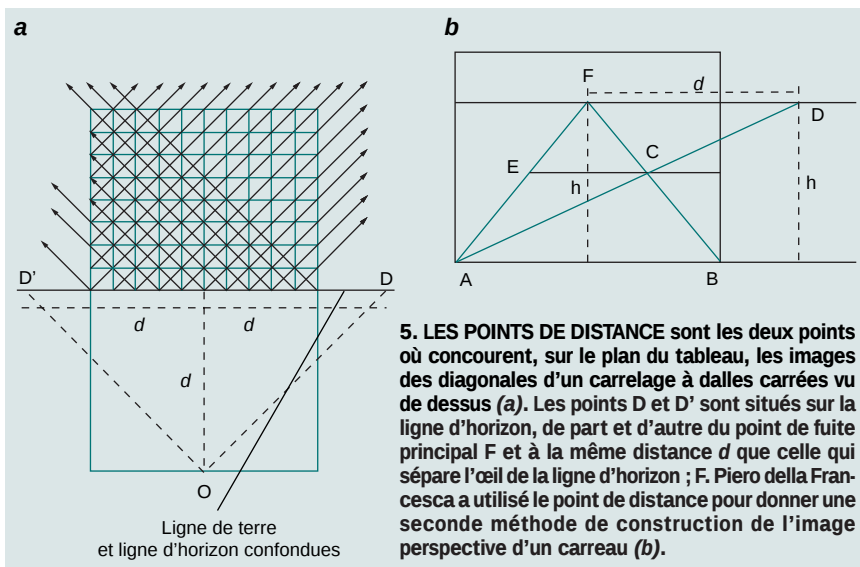
du tableau les rayons visuels issus des points de l'arc et passant par l'œil. L'image ainsi produite est l'«hyperbole opposée» d'Apollonios, c'est-à-dire la courbe que Desargues adjoint à la première pour définir une seule et même hyperbole.

Dans la situation décrite (voir la figure 6c), le regard de l'observateur atteint les deux points A et B du cercle par des rayons parallèles au tableau, qui ne l'atteignent qu'à l'infini ; ces rayons définissent la direction des asymptotes de la courbe. Desargues conçoit ces droites asymptotes comme les tangentes aux points à l'infini de l'hyperbole, puisque ce sont les images perspectives des tangentes aux points A et B du cercle.

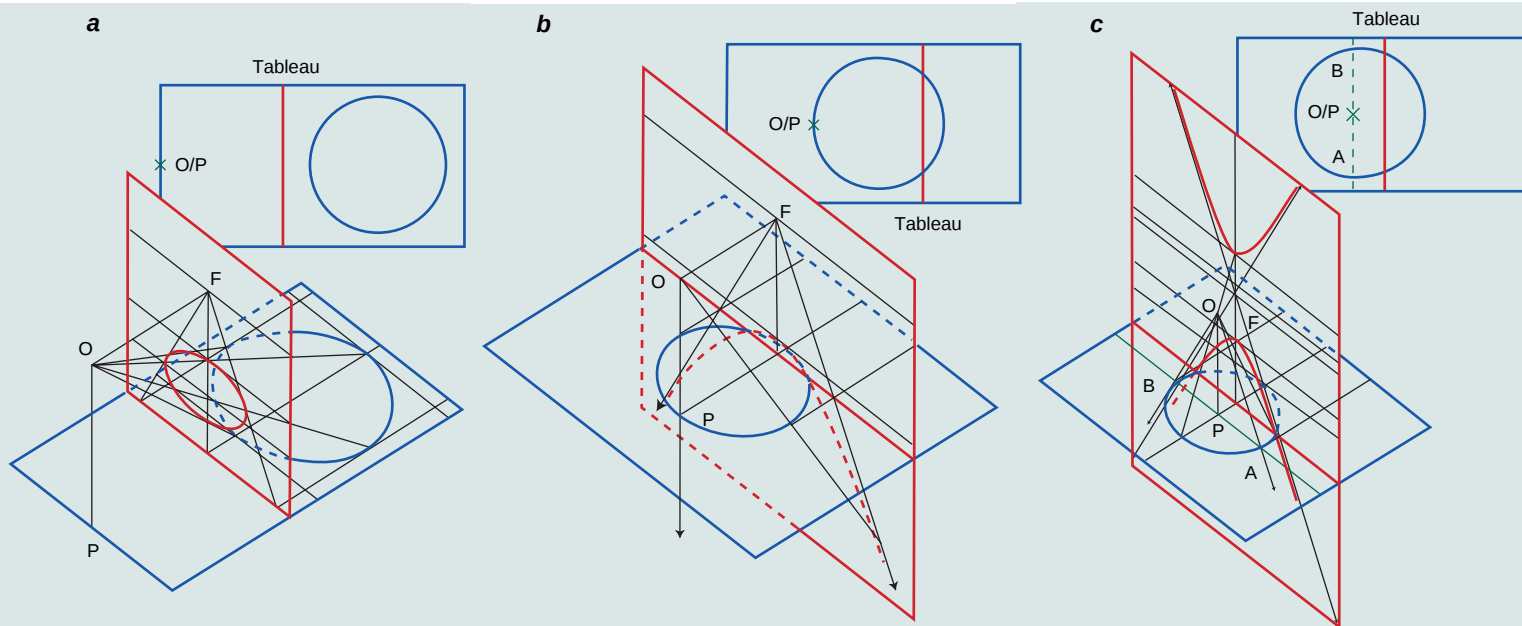
Ainsi, notre géomètre ne se borne pas à montrer qu'une perspective conserve l'alignement des points, l'intersection de droites en un point ou l'intersection de plans en une droite (étant entendu que ce point ou cette droite peuvent être à l'infini dans le cas de faisceaux parallèles). Desargues met en évidence d'autres propriétés qui restent inchangées lors des projections. Par exemple, la perspective conserve les tangentes aux courbes (si T est la tangente à une courbe C en un point P, l'image perspective de T est la tangente de la courbe-image de C au point-image de P, y compris dans le cas limite des asymptotes). De même, Desargues montre qu'un certain rapport numérique (qu'il



**4. UN CARRELAGE VU DE DESSUS** représenté par l'architecte et théoricien italien Leon Battista Alberti : il trace d'abord le faisceau de droites qui concourent au point de fuite principal F. Il place ensuite un point O' de côté, à une distance d du tableau (d est la distance entre l'œil du peintre O et le point de fuite F) et à la même hauteur que F. De O', il trace les segments de droite allant jusqu'aux points de départ des droites concourantes en F. L'intersection de ces segments avec le bord vertical droit du tableau fournit les niveaux auxquels doivent être placées les lignes transversales du carrelage (a). Piero della Francesca a simplifié la construction d'Alberti et l'a démontrée géométriquement avec l'image perspective d'un seul carreau (b).



**5. LES POINTS DE DISTANCE** sont les deux points où concourent, sur le plan du tableau, les images des diagonales d'un carrelage à dalles carrées vu de dessus (a). Les points D et D' sont situés sur la ligne d'horizon, de part et d'autre du point de fuite principal F et à la même distance d que celle qui sépare l'œil de la ligne d'horizon ; F. Piero della Francesca a utilisé le point de distance pour donner une seconde méthode de construction de l'image perspective d'un carreau (b).



**6. SELON LA POSITION DU PEINTRE** par rapport à l'objet à dessiner, la représentation change. En perspective centrale, où l'œil du peintre O constitue le centre de la projection, la représentation d'un bassin circulaire (en bleu) sur le plan du tableau (en rouge) peut être une ellipse (a),

une parabole (b) ou une hyperbole (c). On obtient une ellipse lorsque le bassin se trouve au-delà du peintre, une parabole lorsque les pieds P du peintre sont sur le contour du bassin, et une hyperbole lorsque le peintre est debout à l'intérieur du bassin.



**7. LES DÉCORS PLAFONNANTS, tel l'Oculus de la chambre des époux d'Andrea Mantegna (ci-dessus) ou les trompe-l'œil sur voûtes sont des représentations en perspective où l'artiste adopte un «point de vue» où il s'affranchit de la verticalité.**

appelle une involution et auquel on préfère aujourd'hui le terme de birapport de quatre points) entre les segments définis par six points d'une droite reste inchangé par projection centrale ou par projection parallèlement à une direction donnée.

Les découvertes de Desargues ont rendue possible une théorie générale des projections, à laquelle s'emploieront les géomètres de la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, Gaspard Monge, Jean-Victor Poncelet et Michel Chasles, pour ne citer qu'eux. À son tour, la géométrie projective construite par ces mathématiciens conduira à entrevoir la possibilité des géométries non euclidiennes et à en concevoir des modèles euclidiens. On y rencontre aussi des représentations de l'infini. Par exemple, dans les modèles d'Henri Poincaré ou d'Eugenio Beltrami pour le «plan hyperbolique», l'infini est ramené à distance finie en assimilant les points à l'infini à un cercle ; l'intérieur de ce cercle constitue le «plan», et les «droites» de ce plan sont par définition des arcs circulaires orthogonaux au contour. Il s'agit d'un modèle euclidien d'une géométrie non euclidienne, puisque, par un point extérieur à une «droite», passent une infinité de «droites» parallèles à la droite en question. On notera que les extrémités des droites sont situées sur le contour, c'est-à-dire à l'infini : avec un tel modèle, le monde clos des Anciens fait en quelque sorte son retour...

## La perspective cavalière

Les projections parallèles, projections où les rayons qui partent de l'objet à représenter sont parallèles à une direction donnée, semblent connues de longue date, au moins depuis l'architecte romain Vitruve (I<sup>er</sup> siècle de notre ère) : beaucoup de dessins, qu'ils soient à vocation artistique ou technique, semblent relever de ce que l'on nomme aujourd'hui la perspective cavalière ou d'une projection orthogonale (projection dans une direction orthogonale au plan du dessin). En fait, il ne s'agit que de tentatives empiriques de représenter localement la profondeur pour des objets isolés. Ils ne peuvent en aucun cas relever d'une volonté de «représenter l'espace» de façon globale, cohérente et homogène. On ne peut véritablement parler de pers-

pective cavalière qu'à partir du moment où ses règles ont été codifiées géométriquement. Or celles-ci, bien que nettement plus simples que celles de la perspective centrale, n'ont été édictées qu'après celles de la perspective centrale du Quattrocento.

Les premiers dessins en perspective parallèle systématique apparaissent dans les théâtres de machines (des plans de machines) ou dans les ouvrages d'ingénieurs du XVI<sup>e</sup> siècle, et les premiers traités de perspective cavalière ou militaire sont le fait de théoriciens français du début du XVII<sup>e</sup> siècle. Quant aux architectes, qui ont donné la perspective centrale aux peintres, ils ne se sont saisis que tardivement, à partir de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, de la perspective cavalière et de l'axonométrie (la représentation des trois dimensions par projection sur trois axes tracés dans le plan du dessin).

Dans les perspectives parallèles, on considère les rayons visuels parallèles. Comme l'a montré Desargues, on peut aussi dire que ces rayons visuels se rencontrent à l'infini. En d'autres termes, la perspective cavalière équivaut à une perspective centrale où l'œil du dessinateur est «rejeté à l'infini». En 1925, le peintre russe Lissitzky s'est exclamé : «Le suprématisme a fait reculer l'extrémité de la pointe de la pyramide visuelle à l'infini... [Ce faisant] il a inventé la dernière illusion : l'extensibilité infinie vers l'arrière-plan ou l'avant-plan.» Il lui semblait qu'on en avait fini avec la peinture du sujet renaissant, que le point de vue n'existait plus. Le peintre s'assimile alors au Créateur par le regard venu de l'infini. Il nous paraît pourtant que, dans une perspective parallèle, le point de vue est toujours présent, tout rejeté à l'infini qu'il soit et justement du fait qu'il est rejeté : une exclusion n'est pas une absence.

Jean-Pierre LE GOFF est professeur de mathématiques et d'histoire des mathématiques à l'IUFM (Institut universitaire de formation des maîtres) de Caen et à l'IREM (Institut de recherches sur l'enseignement des mathématiques) de Basse-Normandie (Université de Caen).

René TATON, *L'œuvre mathématique de Girard Desargues*, PUF, 1951 (réédition Vrin, 1988).

Philippe COMAR, *La perspective en jeu : Les dessous de l'image*, Éditions Gallimard/La Découverte, n° 138, 1992.

Jean-Pierre LE GOFF, *Desargues et la naissance de la géométrie projective*, in

*Desargues en son temps*, sous la direction de Jean Dhombres et Joël Sakarovich, Blanchard, 1994.

Jean-Pierre LE GOFF, *Piero della Francesca. De la perspective en peinture*, préface de Hubert Damisch et postface de Daniel Arasse, in *Medias Res*, 1998.

*Les Cahiers de la perspective*, sous la direction de Didier BESSOT et Jean-Pierre LE GOFF, IREM de Basse-Normandie, Université de Caen, 1981-1996.

D. BESSOT et J.-P. LE GOFF, *Mais où est donc passée la troisième dimension ?* in *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, Éditions Ellipses, 1993.

# L'ensemble triadique de Cantor

ANDRÉ DELEDICQ

*Les préposés au nettoyage de la planète Ter découvrent un ensemble de Cantor qui remplit un segment de largeur 1, mais son complémentaire aussi...*



Dans les écoles de Gullicantor, une province de Ter, l'éducation était stricte : le plus gros travail dévolu aux garçons était le nettoyage des barres de cuivre que les Gullicantoriens utilisaient comme décoration.

Les règles de nettoyage étaient strictes : il fallait, dans l'empire de Ter, d'abord nettoyer le tiers central de chaque barre, puis les tiers centraux de chaque tiers situés de part et d'autre du tiers que l'on venait de nettoyer, et ainsi de suite. Indéfiniment. Les mathématiciennes de Ter avaient montré que ce nettoyage de chaque barre ne prend qu'un temps fini si l'on suppose que la durée de nettoyage d'un segment ne dépend que de sa longueur.

Comment savoir si toute la barre, que l'on suppose de longueur 1, est bien nettoyée par ce processus, s'interrogeaient les jeunes Gullicantoriens ? À chaque promotion de jeunes garçons, les mathématiciennes de l'empire expliquaient que, le tiers central étant nettoyé ( $1/3$ ), ils nettoyaient ensuite un tiers des deux tiers restants, soit  $(1/3) \times (2/3)$ , et ainsi de suite, ce qui faisait :  $1/3 + 2/3 \times (1/3 + 2/3 \times (1/3 + 2/3 \times (1/3 + \dots)))$

La formule traduit effectivement le processus de nettoyage, s'extasiaient les jeunes garçons : un tiers, plus un tiers sur les deux tiers restants, plus encore un tiers sur les deux tiers restants, et ainsi de suite, soit, après simplification :  $(1 + 2/3 + 4/9 + 8/27 + \dots) / 3$ ,

ce qui est la série géométrique de raison  $2/3$  divisée par 3.

Nous savons, continuaient les garçons, que la somme :  $1 + a + a^2 + \dots + a^n \dots$  vaut  $1/(1 - a)$ . Ici,  $a$  est égal à  $2/3$  et la somme est égale à  $1/(1 - 2/3)$ , soit exactement 3. Comme cette somme est multipliée par  $1/3$ , cela fait 1 : à la fin, la barre tout entière serait nettoyée.

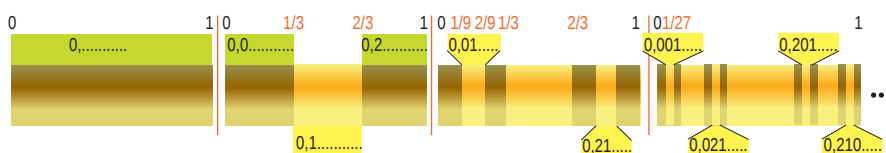
Hélas, des garçons de Ter n'avaient pas la bosse des maths, ce qui ennuyait les autorités. Celles-ci pensaient instituer un système de quotas pour les postes de mathématiciens à l'Université. Les mathématiciennes expliquaient le phénomène de nettoyage en tirant parti du fait que les habitants de Ter, leurs noms l'indique, n'ont que trois doigts. Les Terriens comptent ainsi en base trois et écrivent la suite des entiers : 0, 1, 2, 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22... ; de même, les nombres fractionnaires, exprimés en base 3, ne comportent que des 0, des 1 et des 2.

Les points de la barre qui seront nettoyés sont ceux qui, à un moment quelconque du découpage en trois, ont un chiffre «1», comme on le voit sur la figure ci-dessous. Et les nombres dont l'écriture ne contient que des 0 et des 2 sont des abscisses de points de la barre qui resteront sales, par exemple 0,202020, 0,200200200 et bien d'autres. Même à la fin du nettoyage, tous ces points ne seront pas nettoyés : l'ensemble de ces

points, que l'on dénomme une poussière de Cantor, restera sale.

Pour écrire les abscisses des points non nettoyés, on n'a besoin que de deux doigts, celui qui marque 0 et celui qui marque 2, remarqua la mathématicienne. Imaginons maintenant, continua-t-elle, que, comme les habitants de la planète Bis, nous n'ayons que deux doigts et que nous ne puissions calculer qu'en base deux. En comptant sur nos doigts nous pourrions encore écrire les abscisses des nombres du segment. Quand j'écris un nombre avec deux doigts, poursuivit-elle, nous pouvons reconnaître l'abscisse d'un point ou d'un autre selon la manière dont on interprète l'écriture : – si nous pensons qu'il s'agit d'une écriture des Bissiens, en base 2, nous obtenons tous les points du segment, – si nous pensons que c'est une écriture de Terriens, en base 3, nous obtenons tous les points non nettoyés.

L'ensemble de ces points non nettoyés est donc en bijection avec l'ensemble des points du segment : il semblerait que l'on n'ait rien nettoyé du tout ! Quel travail, s'exclamèrent en chœur les jeunes garçons, et nous ne savons même pas si on a nettoyé tout le segment ou si il est encore entièrement non nettoyé...



André DELEDICQ est maître de conférence. Il travaille à l'Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques (IREM) de l'Université de Paris 7.

André DELEDICQ et Francis CASIRO, *Apprivoiser l'infini*, ACL-Les Éditions du Kangourou, 1997.