3. L'«OPÉRATEUR RADIOGRAPHIE» associe à chaque ensemble de points alignés dans la direction des rayons X qui traversent l'espace de départ (le volume du corps, *à gauche*), un point de la plaque photographique (*à droite*) ; la nuance de gris est définie comme l'intégrale de l'intensité du rayon X qui a traversé l'espace de départ. Les géométries non commutatives étudient les opérateurs qui font passer d'un espace de départ à notre monde. Lors de la transformation d'un espace de départ vers un espace d'arrivée, des informations sont perdues, de même qu'une partie de l'information sur les organes est perdue lorsque l'on effectue une radiographie : non seulement on ne visualise que les os, mais on passe de structures tridimensionnelles à une photographie bidimensionnelle.

dimensions) sans savoir à quoi ressemble effectivement une maison (c'est-à-dire sans savoir qu'elle existe dans un espace à trois dimensions). Pour décrire la maison, on pourrait croire qu'il faut accumuler le plus de photographies possible, car elles sont toutes différentes. En revanche, si l'on sait que la maison est un objet à trois dimensions, on se rend compte que trois photographies, prises dans les trois directions de l'espace, suffisent pour la décrire.

Les physiciens considèrent que la façon dont ils décrivent le monde avec la théorie quantique des champs est redondante, de même que la description de la maison avec un grand nombre de photographies. En quoi est-elle redondante? Ils ne le sauront que lorsqu'ils auront fait un choix de jauge qui donnera un espace quotient dont les propriétés prédiront des phénomènes existant dans notre Univers, de même que la théorie d'Einstein prédisait la déviation des rayons lumineux par la force de gravitation, hypothèse confirmée ultérieurement.

Les choix de jauges

Pour l'instant, cette approche est une impasse. Les choix de jauge ont abouti à deux types de situations. Dans le premier, les descriptions des espaces de départ envisagés reproduisent les descriptions classiques de notre monde (notamment des interactions électromagnétiques), à quelques variantes près, mais ne prédisent que des phénomènes déjà connus. Ce résultat est aussi peu surprenant que l'habileté d'un joueur de fléchettes qui vise toujours dans le mille, si ce joueur dessine la cible autour de la fléchette après l'avoir lancée. Dans le deuxième type de situation, les physiciens ont décrit l'espace de départ, dont notre monde serait le quotient, en s'affranchissant de certaines contraintes qui y existent. Leurs théories prédisent alors une foule de phénomènes qui n'existent pas dans notre monde.

Ils devront affiner le choix des contraintes à abandonner, mais ne pourront pas le faire à l'aide des seules géométries non commutatives. Les accélérateurs leur donneront peut-être des indices : à mesure que les énergies employées augmentent, elles révéleront probablement des phénomènes insoupçonnés. Ces phénomènes désigneront alors la géométrie non commutative qui les prévoit comme celle qui fera progresser la physique.

Daniela BIGATTI est mathématicienne à l'Institut Weizmann, en Israël. Elle a récemment travaillé à l'Université catholique de Louvain sur les géométries non commutatives et leurs applications à la théorie des cordes.

Daniela BIGATTI, *Noncommutative spaces in physics and mathematics*, in *Class. Quant. Grav.*, n° 17, pp. 3403-3428, 2000.

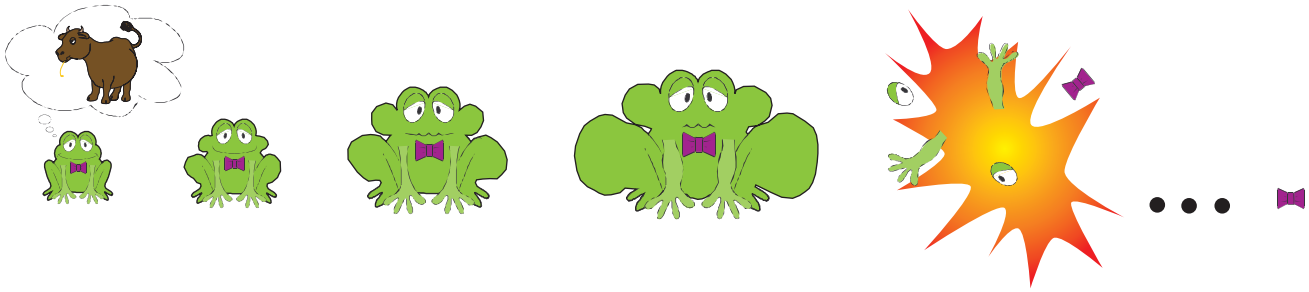
A. CONNES, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1995.

A. CONNES, *Geometrie non commutative*, InterÉditions, Paris, 1990.

L'infini est-il nécessaire?

PATRICK DEHORNOY

Oui. Les suites de Goodstein gonflent et grossissent jusqu'à des tailles gigantesques... Et diminuent finalement pour atteindre zéro. Pour démontrer cette propriété paradoxale, il est inévitable de faire appel à l'infini.



Les nombres entiers sont des objets finis : on pourrait donc espérer que toutes leurs propriétés se démontrent sans recourir à l'infini. Erreur : seul l'infini permet de démontrer le théorème de Goodstein, qui s'applique aux suites inventées par le logicien anglais Reuben Louis Goodstein et dont les éléments sont pourtant des nombres entiers.

Pour comprendre ce paradoxe, voyons comment construire les suites de Goodstein et définissons pour cela le développement d'un entier en base p, puis en base p itérée.

On écrit habituellement les nombres entiers dans le système décimal, où l'on décompose un entier en une somme de puissances de 10, multipliées par des entiers compris entre 0 et 9. Ainsi l'entier noté 266 en base 10 correspond à la décomposition : $266 = 10^2 \times 2 + 10^1 \times 6 + 10^0 \times 6$, (par définition, a^1 est a et a^0 est 1). D'autres bases sont aussi employées. Les Babyloniens utilisaient la base 60, pratique grâce à ses nombreux diviseurs. Les ordinateurs effectuent les calculs en base 2. L'entier qui s'écrit 266 en base 10, se décompose en puissances de 2 : $266 = 256 + 8 + 2$, soit $2^8 + 2^3 + 2^1$.


Reuben Goodstein

En faisant figurer toutes les puissances de 2 : $2^8 \times 1 + 2^7 \times 0 + 2^6 \times 0 + 2^5 \times 0 + 2^4 \times 0 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 0$. D'où l'écriture de 266 en base 2 : 100001010.

Le développement en base p itérée est de même nature. Dans ce cas, on écrit aussi les exposants en base p, puis les exposants d'exposants, etc. Par exemple, le développement de 266 en base 2 est $2^8 + 2^3 + 2^1$; pour obtenir son développement en base 2 itérée, commençons par écrire les exposants en base 2 : $2^{2^3} + 2^{2^1+1} + 2^1$, puis l'entier 3, exposant d'exposant, est à son tour exprimé en base 2 : $266 = 2^{2^{2^1+1}+1} + 2^{2^1+1} + 2^1$. Cette expression est le développement en base 2 itérée de 266. Pour tout entier p plus grand que 2, le développement en base p itérée est construit de même : c'est une expression où apparaissent l'addition, la multiplication par des entiers plus petits que p et l'opération «p puissance».

La dilatation des entiers

Pour construire maintenant les suites de Goodstein, nous définissons une opération, appelée dilatation, et désignée par d_p (p étant un entier au moins égal à 2), qui s'effectue, à partir d'un entier n quelconque, en deux étapes : on écrit n en base p itérée, puis on remplace partout p par $p+1$, (par exemple, 2^2 est remplacé par 3^3).

Dilatons l'entier 266. Il s'écrit en base 2 : $2^{2^2+1} + 2^{2+1} + 2$, (nous avons omis les exposants 1), le dilaté $d_2(266)$ s'obtient en remplaçant les 2 par des 3, soit : $d_2(266) = 3^{3^3+1} + 3^{3+1} + 3 = 3^{81} + 84$, dont l'écriture en base 10 a 38 chiffres. Remplacer «p puissance» par «$p+1$ puissance» engendre un nombre plus grand, voire beaucoup plus grand, que l'entier initial.

Forts de ces outils, nous définissons maintenant les suites de Goodstein $g_p(n)$. Une telle suite $g_1(n)$, $g_2(n)$, etc., se construit à partir d'un entier quelconque n, que nous appellerons la «graine». La règle est la suivante : nous posons $g_1(n) = n$, puis nous calculons $g_2(n)$ en dilatant $g_1(n)$ à l'aide de l'opération d_2 et en retranchant 1 du résultat, et ainsi de suite en utilisant la relation de récurrence $g_p(n) = d_p(g_{p-1}(n)) - 1$.

Par exemple, pour la graine $n = 266$, nous trouvons $g_1(266) = 266$, puis $g_2(266) = d_2(266) - 1 = d_2(2^{2^2+1} + 2^{2+1} + 2) - 1 = (3^{3^3+1} + 3^{3+1} + 3) - 1$. Ce nombre a, nous l'avons vu, 38 chiffres en base 10.

Le terme suivant $g_3(266)$ est égal à $d_3(g_2(266)) - 1$, soit $d_3(3^{3^3+1} + 3^{3+1} + 2) - 1 = 4^{4^4+1} + 4^{4+1} + 1$, un nombre de 616 chiffres en base 10.

Pourquoi retrancher 1 à chaque fois? Les dilatations fabriquent des nombres tellement grands que le facteur – 1 ne semble pas *a priori* influer beaucoup sur le résultat! Pourtant, c'est lui qui joue un rôle majeur dans les suites de Goodstein et engendre des phénomènes étranges.

Reprenons la suite de Goodstein de graine 266. Nous avions calculé $g_3(266) = 4^{4^4+1} + 4^{4+1} + 1$. Poursuivons : $g_4(266) = d_4(g_3(266)) - 1 = d_4(4^{4^4+1} + 4^{4+1} + 1) - 1 = 5^{5^5+1} + 5^{5+1}$,

qui a, lui, environ 10 000 chiffres en base 10. Inutile d'aller plus loin : cette suite semble tendre rapidement vers l'infini, comme le ferait toute suite de Goodstein engendrée par une autre graine. Et pourtant…

Un théorème, démontré par Goodstein en 1944, affirme : «Quelle que soit la graine de départ n, la suite de Goodstein de graine n finit par atteindre la valeur 0.»

Ce phénomène pour le moins paradoxal provient bien sûr de la présence du facteur – 1. Même microscopique, il finit par ronger la croissance de la suite, au point de la faire décroître et atteindre la valeur 0 au bout d'un nombre fini d'itérations.

Difficile à croire ? Nous allons pourtant démontrer ce résultat. Calculons g_p pour les premières graines. Dans le cas de la graine 2, nous trouvons $g_1(2) = 2$, puis $g_2(2) = d_2(2) - 1 = 3 - 1 = 2$, puis $g_3(2) = d_3(g_2(2)) - 1 = 1$, et $g_4(2) = 1 - 1 = 0$. Le résultat est là, mais n'est guère convaincant, car la graine est si petite qu'aucune opération «puissance» ne figure dans le développement. Le cas de 3 n'est pas plus palpitant : pour la même raison, les dilatations n'entrent

1. LES ORDINAUX

La suite des ordinaux est une continuation de la suite des entiers 0 < 1 < 2 < 3… Elle se construit en respectant la propriété suivante : «Dans n'importe quel ensemble d'ordinaux non vide, il existe un ordinal qui est le plus petit». Cette propriété, qui est vrai pour les entiers, ne l'est pas pour les réels. Considérons, par exemple, l'ensemble des éléments «strictement compris entre 0 et 5». Le plus petit entier qui possède cette propriété est 1, mais quel est le plus petit réel ? 0,0001 ? Non, 0,0000001 lui est inférieur, etc. Il n'existe pas de plus petit réel qui vérifie cette propriété.

Considérons maintenant l'ensemble des ordinaux infinis, c'est-à-dire ceux qui sont plus grands que tous les entiers. Dans cet ensemble, comme dans tout ensemble d'ordinaux, il existe donc un plus petit ordinal, qu'on appelle ω : on a alors $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < \omega$.

De même, il existe un plus petit ordinal plus grand que ω, noté $\omega + 1$: $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < \omega < \omega + 1$, suivi par $\omega + 2$, $\omega + 3$, etc., jusqu'au plus petit ordinal plus grand que tous les $\omega + n$. Ce dernier est appelé $\omega + \omega$, ou encore $\omega \times 2$.

Ensuite viennent $\omega \times 2 + 1$, $\omega \times 2 + 2$, …, puis $\omega \times 3$, ... et $\omega \times n$; puis, après ceux-ci, $\omega \times \omega$, qu'on note aussi ω^2. Puis ω^3, ω^n, et, au-delà, ω^ω, et beaucoup plus loin, ω^{ω^ω}, etc. : la construction continue sans fin. Pour poursuivre, il faudrait introduire de nouvelles opérations au-delà de l'exponentiation !

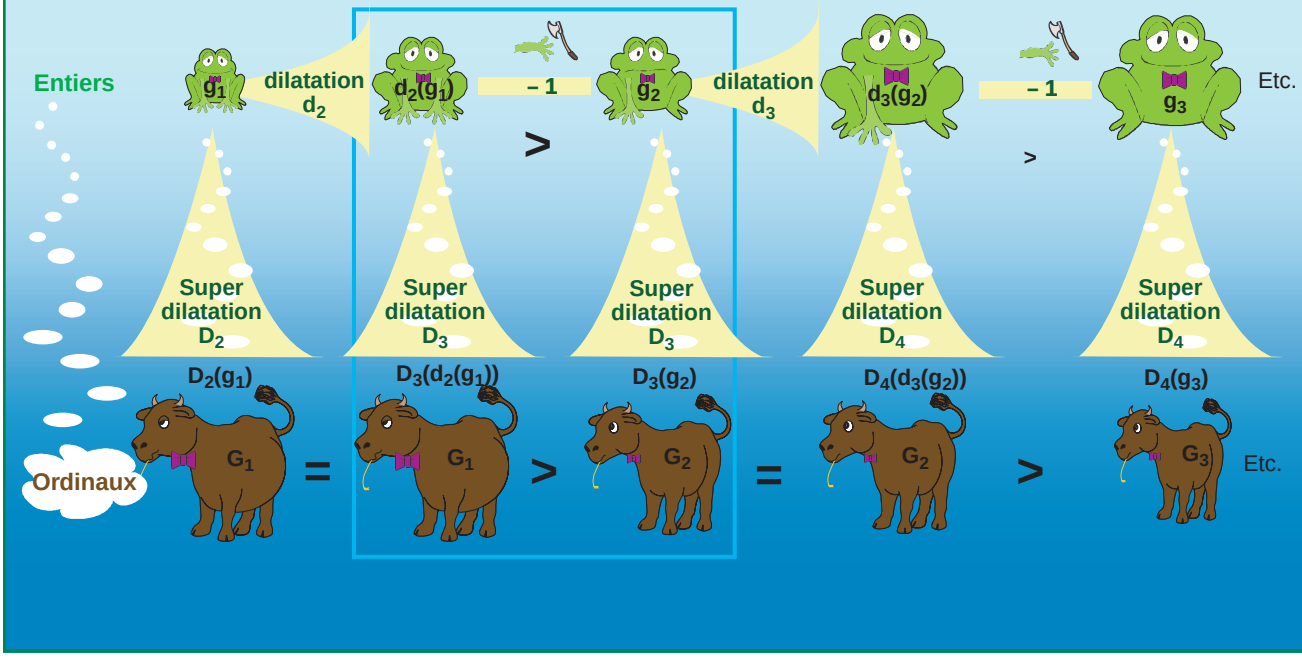
ORDINAUX

ω^{ω^ω}
…
$\omega^{\omega \times \omega} = \omega^{\omega^2}$
…
$\omega^{\omega + \omega} = \omega^{\omega \times 2}$
…
ω^ω
…
$\omega^2 \times \omega = \omega^3$
…
$\omega^2 + \omega \times \omega = \omega^2 \times 2$
…
$\omega^2 + \omega$
…
$\omega^2 + 1$
$\omega \times \omega = \omega^2$
…
$\omega \times 2 + \omega = \omega \times 3$
…
$\omega \times 2 + 1$
$\omega + \omega = \omega \times 2$
…
$\omega + 2$
$\omega + 1$
ω
…
3
2
1

ENTIERS

2. GOODSTEIN : LA PREUVE PAR L'INFINI

La dilatation grossit la grenouille. La superdilatation, elle, transforme la grenouille en bœuf. Le bœuf G_1, obtenu après la superdilatation D_2, est identique à celui obtenu après la dilatation d_2 suivie de la superdilatation D_3. On coupe un membre à la grenouille dilatée $d_2(g_1)$: la grenouille g_2 est donc plus petite que la grenouille indemne $d_2(g_1)$. Comme les superdilatations conservent l'ordre, le bœuf G_2 est donc plus petit que le bœuf G_1. Comme dans la fable, la grenouille a beau grossir, il n'en reste plus rien à la fin…



pas vraiment en action, et nous aboutissons à $g_6(3) = 0$.

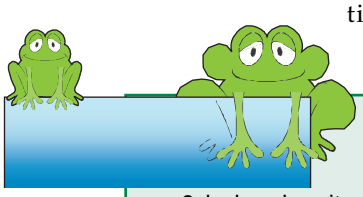
Le cas de la graine 4 gagne en revanche en intérêt… et devient plus compliqué. La suite atteint en effet la valeur 0 au bout d'un nombre d'étapes gigantesque *(voir la figure 3)*. Dans le cas de la graine 5, et, *a fortiori*, des suivantes, les démonstrations paraissent hors de portée, car le nombre d'étapes augmente considérablement avec la valeur de la graine. Le théorème de Goodstein serait-il donc impossible à démontrer?

Non. Il existe bien une démonstration, valable pour tout n, mais elle nécessite de sortir du cadre de l'arithmétique et de recourir à une autre méthode : les ordinaux. Les ordinaux sont une prolongation de la suite des entiers, introduite à la fin du siècle dernier par le mathématicien allemand Georg Cantor *(voir la figure 1)*. Ils comprennent donc les entiers et, plus grands que tous les entiers, les ordinaux infinis, aussi appelés «transfinis», c'est-à-dire «au-delà du fini». Deux points importent pour la démonstration du théorème de Goodstein : a) Les ordinaux sont munis d'une arithmétique similaire à celle des entiers (les quatre opérations de base) ; b) Toute suite décroissante d'ordinaux parvient à la valeur 0 en un nombre fini d'étapes *(voir la figure 4)*.

Le théorème de Goodstein se démontre comme suit. Nous introduisons, pour chaque entier p, une «superdilatation» D_p définie comme d_p, à cela près qu'au lieu de remplacer p par $p+1$ dans le développement en base p itérée, p est remplacé par l'ordinal infini ω. Ainsi, la relation $266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$ entraîne $D_2(266) = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega$, à comparer avec $d_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3$.

Examinons une propriété de la superdilatation : appliquer D_p revient à appliquer d_p puis D_{p+1} quel que soit le nombre de départ. En effet, dans le cas de la superdilatation directe D_p, on développe le nombre initial en base p itérée, puis on remplace les p par des ω. Dans le cas de la superdilatation indirecte (d_p suivie de D_{p+1}), on dilate d'abord le nombre, c'est-à-dire qu'on le développe en base p itérée et l'on remplace les p par des $p+1$, puis seulement intervient la superdilatation, où l'on remplace les $p+1$ par des ω, et le résultat final est le même. Vérifions-le avec 4 comme nombre de départ et avec $p = 2$. La superdilatation calculée directement est $D_2(4) = \omega^\omega$, car on remplace 2^2 par ω^ω. La superdilatation indirecte mène à $d_2(4) = 3^3$, puis $D_3(d_2(4)) = D_3(3^3) = \omega^\omega$ aussi.

Une autre propriété de la superdilatation, déterminante pour démontrer le théorème de Goodstein, est que D_p est une fonction croissante pour chaque p. Par exemple, $D_2(4)$ est supérieur à $D_2(2)$.



3. SUITE DE GOODSTEIN DE GRAINE 4

Calculons la suite de Goodstein de graine 4. On trouve $g_1(4) = 4$, $g_2(4) = d_2(4) - 1 = d_2(2^2) - 1 = 3^3 - 1 = 26$.
$g_3(4)$ est égal à $d_3(26) - 1$, soit $d_3(3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2) - 1 = (4^2 \times 2 + 4 \times 2 + 2) - 1 = 41$.

Continuons : $g_4(4) = d_4(41) - 1 = d_4(4^2 \times 2 + 4 \times 2 + 1) - 1 = (5^2 \times 2 + 5 \times 2 + 1) - 1 = 60$.
$g_5(4) = d_5(60) - 1 = d_5(5^2 \times 2 + 5 \times 2) - 1 = (6^2 \times 2 + 6 \times 2) - 1 = 83$.

Quel que soit p, $g_p(4)$ a toujours un développement en base p +1 de la forme $(p+1)^2 \times a_p + (p+1) \times b_p + c_p$, avec $a_p \leq 2$, $b_p \leq p$ et $c_p \leq p$. Démontrons cette formule, très utile pour prouver que la suite de graine 4 atteint 0. La formule est vraie pour $g_2(4) = 26 = 3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2$. Ici, on a $a_2 = 2$, $b_2 = 2$ et $c_2 = 2$, que nous notons (2, 2, 2). La formule est conservée quand nous passons de $g_p(4)$ à $g_{p+1}(4)$, comme le montre l'étude des différents cas. L'évolution de a, b et c est similaire au compte à rebours d'une horloge où a représenterait les heures, b les minutes et c les secondes ; cependant, l'horloge, détraquée, ne fonctionne plus en base 12, mais dans une base p qui augmente !

Premier cas : $c_p \neq 0$. La présence du facteur – 1 diminue c et laisse a et b inchangés. Par exemple, on trouve $(a_2, b_2, c_2) = (2, 2, 2)$, $(a_3, b_3, c_3) = (2, 2, 1)$.
On a alors $a_{p+1} = a_p$, $b_{p+1} = b_p$, $c_{p+1} = c_p - 1$.

Deuxième cas : $c_p = 0$ et $b_p = 0$, comme dans $(a_4, b_4, c_4) = (2, 2, 0)$. Alors, à l'itération suivante, b diminue d'une unité et c réapparaît avec une valeur égale à la base diminuée de 1, c'est-à-dire p. On obtient $(a_5, b_5, c_5) = (2, 1, 5)$. Dans ce cas, $a_{p+1} = a_p$, $b_{p+1} = b_p - 1$ et $c_{p+1} = p$. Le coefficient b diminue seulement quand c égale 0, ce qui prend de plus en plus de temps car c réapparaît avec la valeur p, de plus en plus grande.

Troisième cas, $b_p = 0$ et $c_p \neq 0$, comme dans $(a_{22}, b_{22}, c_{22}) = (2, 0, 0)$. À l'itération suivante, on a $a_{p+1} = a_p - 1$, $b_{p+1} = p$, $c_{p+1} = p$, comme dans $(a_{23}, b_{23}, c_{23}) = (1, 23, 23)$. Ensuite, on obtient (1, 0, 0) pour $p = 3 \times 2^{27} - 2$, à la suite de quoi a devient nul et les expressions prennent la forme $(p+1) \times b_p + c_p$. Ensuite, on obtient (0, 1, 0), soit $g_p(4) = p + 1$, pour $p = 3 \times 2^{27} \times 2^{3 \times 2^{27}-2} - 1$; finalement, on atteint (0, 0, 0), soit $g_p(4) = 0$ pour $p = 3 \times 2^{27+3\times 2^{27}-1} - 2$, soit $p = 3 \times 2^{402\,653\,211} - 2$, un entier dont l'écriture en base 10 a environ 130 millions de chiffres.

p	(a, b, c)
2	(2, 2, 2)
3	(2, 2, 1)
4	(2, 2, 0)
5	(2, 1, 5)
6	(2, 1, 4)
7	(2, 1, 3)
…	…
10	(2, 1, 0)
11	(2, 0, 11)
12	(2, 0, 10)
…	…
22	(2, 0, 0)
23	(1, 23, 23)
…	…
46	(1, 23, 0)
47	(1, 22, 47)
48	(1, 22, 46)
…	…

Les supersuites de Goodstein

Après les superdilatations, définissons maintenant des suites d'ordinaux G, sorte de super-suites de Goodstein : l'élément $G_p(n)$ est l'ordinal $D_{p+1}(g_p(n))$. Voyons des exemples, et d'abord pour la graine 2 :
$G_1(2) = D_2(g_1(2)) = D_2(2) = \omega$,
$G_2(2) = D_3(g_2(2)) = D_3(d_2(g_1(2)) - 1) = D_3(d_2(2) - 1) = D_3(3 - 1) = 2$.
Pour la graine 4, on trouve :
$G_1(4) = D_2(g_1(4)) = D_2(4) = \omega^\omega$,
$G_2(4) = D_3(g_2(4)) = D_3(d_2(g_1(4)) - 1) = D_3(d_2(2^2) - 1) = D_3(3^3 - 1) = D_3(26) = D_3(3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2) = \omega^2 \times 2 + \omega \times 2 + 2$.
Dans ces exemples, on a $G_1(2) > G_2(2)$ et $G_1(4) > G_2(4)$. Le schéma de la figure 2 généralise ce résultat et montre que les ordinaux $G_p(n)$ forment une suite strictement décroissante avec p, pour chaque graine n. Alors, une telle suite atteint 0 en un nombre fini d'étapes. Comme $G_p(n)$ ne peut valoir 0 que si $g_p(n)$ lui-même vaut 0, $g_p(n)$ atteint 0 en un nombre fini d'étapes, ce qui termine la démonstration du théorème de Goodstein.

L'infini indispensable ?

Le théorème de Goodstein est une propriété d'arithmétique, au sens où il ne met en jeu que les nombres entiers et leurs quatre opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division), mais la démonstration que nous venons de donner repose sur l'utilisation d'objets infinis. En existe-t-il une autre qui ne passerait pas par l'infini ?

La démonstration d'un théorème n'utilise pas toujours que les outils avec lesquels il est formulé. De nombreux résultats d'arithmétique sont démontrés grâce à l'analyse, c'est-à-dire aux nombres réels et aux fonctions. Ceci a donné naissance à la théorie analytique des nombres (par opposition à la théorie algébrique des nombres, qui n'utilise que les entiers). Or, un nombre réel vraiment quelconque n'est exprimé ni par des fractions ni par des racines n-ièmes : c'est un objet dont le développement possède une suite infinie de chiffres après la virgule et, plus généralement, dont toutes les écritures sont infinies. Dès qu'une démonstration d'arithmétique utilise des nombres réels, une certaine forme d'infini y est donc présente. Notons cependant qu'il peut exister une autre démonstration alternative à l'utilisation de l'analyse et fondée seulement sur les entiers et leurs quatre opérations, mais elle est souvent très difficile à trouver. Ainsi, le célèbre théorème des nombres premiers, démontré à l'aide des nombres complexes par J. Hadamard et C. de La Vallée-Poussin en 1896, n'a été démontré par l'arithmétique que plus de cinquante ans plus tard, grâce à Selberg et Erdös. Leur démonstration est par ailleurs beaucoup plus compliquée que l'originale.

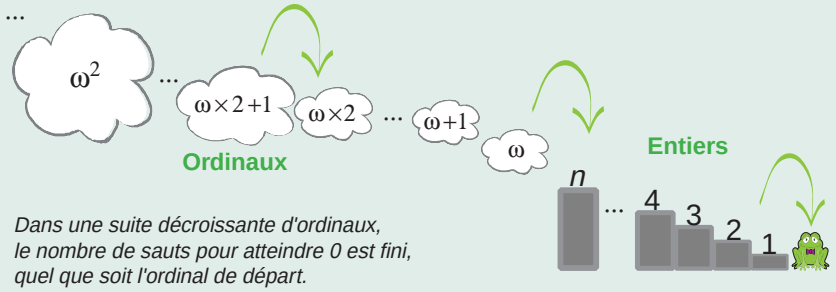

Guiseppe Peano

Précisons ce qu'on appelle une démonstration d'arithmétique. Les propriétés de base de l'arithmétique sont décrites par le système d'axiomes proposé à la fin du XIX^e^ siècle par Giuseppe Peano, mathématicien italien mort en 1932. Toutes les propriétés de base des entiers peuvent se démontrer dans le système de Peano, donc par récurrence : bien sûr, toutes les démonstrations d'un livre d'arithmétique ne sont pas des récurrences, mais on pourrait toujours s'y ramener, au moins de façon théorique.

4. SUITES DÉCROISSANTES D'ORDINAUX

Construisons une suite strictement décroissante à partir d'un entier, même très grand, disons 10^9. Nous arriverons alors nécessairement à 0 après au plus 10^9 étapes. En revanche, puisqu'il y a une infinité d'entiers sous l'ordinal ω, nous pourrions penser que, partant de ω, il est possible de descendre une infinité de fois. Il n'en est rien, car, si nous construisons une suite strictement décroissante partant de $\alpha_1 = \omega$, il faut choisir pour α_2 un ordinal strictement plus petit que ω, c'est-à-dire un entier : si nous choisissons $\alpha_2 = 12$, nous atteindrons 0 au plus 12 étapes plus tard. Si nous choisissons $\alpha_2 = 10^9$, nous pourrons descendre 10^9 marches avant d'arriver à 0, ce qui est plus, mais est toujours un nombre fini. Ainsi, à la différence du cas où nous partons d'un entier, il est impossible de donner de borne sur la longueur d'une suite descendant de ω à 0, il existe des suites aussi longues qu'on veut, *mais* chacune d'entre elles est néanmoins finie.

L'argument est le même lorsqu'on part d'ordinaux plus grands. Ainsi, si nous partons de $\alpha_1 = \omega^2$, nous devons choisir α_2 strictement plus petit, ce qui nous oblige à un saut infini : un tel α_2 est de la forme $\omega \times p + q$, où p et q sont des entiers. De là, au plus q étapes de descentes mènent à $\omega \times p$ (nous envisageons ici le pire cas), et, à l'étape suivante, nous arrivons à un ordinal de la forme $\omega \times (p - 1) + q$, et ainsi de suite. Après au plus p sauts du même type, on arrive aux entiers, et donc à 0. Toute suite décroissante d'ordinaux parvient à la valeur zéro en un nombre fini d'étapes.



Dans une suite décroissante d'ordinaux, le nombre de sauts pour atteindre 0 est fini, quel que soit l'ordinal de départ.

Théorème de Kirby et Paris

Alors ? Pourrions-nous démontrer aussi, avec un peu d'astuce, le théorème de Goodstein par récurrence sans recourir à l'infini ? Non : un théorème, démontré en 1981 par Laurence Kirby et Jeffrey Paris, et basé sur une méthode que ce dernier avait mise au point en 1978 avec Leo Harrington, affirme que, quelle que soit notre imagination, nous n'arriverons jamais à montrer le théorème de Goodstein par récurrence, c'est-à-dire en ne nous servant que des entiers et des quatre opérations élémentaires. Ce résultat est remarquable (et sa démonstration très difficile !) et fait la spécificité du théorème de Goodstein. De façon plus précise, il affirme que la fonction qui, à chaque graine n, associe l'entier p pour lequel $g_p(n)$ s'annule est une fonction qui prend des valeurs tellement grandes qu'elle finit par dépasser n'importe quelle fonction dont on peut montrer l'existence par récurrence.

Comme elle utilise l'ordinal ω, objet infini, la démonstration du théorème de Goodstein n'est pas une preuve par récurrence. Notons qu'il suffit d'ajouter l'hypothèse qu'il existe un objet infini au système de Peano pour obtenir, sans avoir à ajouter de nouveau postulat, toute l'arithmétique des ordinaux (utilisée dans la preuve de Goodstein). Du point de vue des hypothèses logiques sous-jacentes, ceci place le théorème de Goodstein juste au-dessus de l'arithmétique de Peano. Cet ajout représente exactement l'écart entre l'infini potentiel (présent dans l'arithmétique, où le principe de récurrence postule l'existence d'une suite d'entiers sans fin) et l'infini actuel (présent dans les ordinaux, où existe un objet infini).


Kurt Gödel

... Et Gödel

Il existe un rapport étroit entre ce qui précède et les célèbres théorèmes d'incomplétude démontrés par Kurt Gödel au début des années 1930.

Le premier théorème d'incomplétude énonce qu'il existe une propriété d'arithmétique qui est vraie, mais qui ne peut pas être démontrée par