

9. LE VIDE EST SOUMIS AUX FLUCTUATIONS quantiques : en conséquence des particules virtuelles apparaissent spontanément dans le vide pendant des temps très courts, de l'ordre de la constante

h de Planck. Ces particules sont émises en couple, une particule de matière, A et une particule d'antimatière, B. Ainsi, le vide ne l'est jamais tout à fait...

On pourrait penser que, pour un observateur accéléré, le spectre n'est plus isotrope et que l'«avant» et l'«arrière» paraissent différents ; on pourrait aussi imaginer que l'aspect du spectre varie tant que l'observateur est accéléré. En fait, ces intuitions sont erronées : le spectre est homogène et isotrope et il ne change pas tant que l'accélération est constante. En revanche, le spectre observé par un observateur uniformément accéléré n'est pas celui que voit un observateur non accéléré. Pour chaque fréquence, le rayonnement est plus intense dans le référentiel accéléré que dans le référentiel au repos.

La forme du spectre électromagnétique classique pour un observateur accéléré n'est pas facile à comprendre, mais on peut l'interpréter en analysant le mouvement d'un oscillateur placé dans une fusée.

L'accélération, équivalente à un échauffement

L'équation du mouvement de cet oscillateur ressemble beaucoup à l'équation du mouvement dans un référentiel immobile. Il existe cependant deux différences notables : d'une part, la force de réaction au rayonnement comporte un nouveau terme, proportionnel au carré de l'accélération ; d'autre part, l'oscillateur est exposé à un nouveau rayonnement aléatoire lié à l'accélération. Au total, l'énergie moyenne de l'électron accéléré est supérieure à celle de l'électron oscillant dans un référentiel au repos. En d'autres termes, lorsqu'un oscillateur est accéléré, il vibre erratiquement plus fortement dans le vide que s'il était au repos.

Pour comprendre l'effet de l'accélération sur l'oscillateur harmonique, on peut chercher le spectre électromagnétique qui s'ajoute au rayonnement de point zéro pour engendrer ce mouvement supplémentaire. Il faut pour cela considérer le «principe

d'équivalence» sur lequel Einstein fonda sa théorie de la gravitation ; selon ce principe, un observateur, situé dans un petit laboratoire placé dans un champ gravitationnel, effectue exactement les mêmes mesures qu'un observateur placé dans une petite fusée qui accélère uniformément. La physique dans un référentiel accéléré est identique à celle dans un référentiel placé dans un champ gravitationnel uniforme. Comme les lois de la thermodynamique restent valables dans un champ gravitationnel, elles doivent l'être encore dans une fusée qui accélère uniformément : aussi, pour conserver l'équilibre, le spectre du rayonnement supplémentaire ne peut être qu'un spectre thermique. Dans tout autre cas, l'oscillateur ne serait pas en équilibre thermique avec son environnement et il pourrait servir à réaliser une machine à mouvement perpétuel.

La conclusion est directe et étonnante : un système physique uniformément accéléré dans le vide présente les mêmes propriétés à l'équilibre qu'un système non accéléré soumis à un rayonnement thermique à une température supérieure au zéro absolu.

William Unruh, de l'Université de Colombie britannique, et P. Davies, de l'Université de Newcastle-on-Tyne, ont trouvé vers 1976 la relation mathématique qui relie l'accélération à la température. Le spectre réel que peut enregistrer un observateur uniformément accéléré dans le vide est la somme de deux composantes : l'une est due au rayonnement de point zéro ; l'autre est le spectre du rayonnement thermique proposé par Planck en 1900. Planck ne put expliquer la forme de ce spectre qu'en introduisant, à contre-cœur, certaines idées de mécanique quantique ; on découvre aujourd'hui que l'on peut décrire cette courbe avec une analyse entièrement classique du rayonnement dans le vide !

Avec ce type de raisonnement, on obtient néanmoins un résultat surprenant : si l'on se fonde à nouveau sur le principe d'équivalence évoqué précédemment, il doit exister une température minimale au-dessous de laquelle on ne peut pas refroidir les systèmes placés dans les champs gravitationnels. Cette limite est une limite absolue, indépendante de toutes les difficultés pratiques qui s'opposent au refroidissement. À la surface de la Terre, cette limite est égale à 4×10^{-20} kelvins ; elle est bien inférieure aux températures que l'on sait réaliser, mais elle est supérieure à zéro.

Les relations entre le rayonnement thermique et la structure du vide classique révèlent une unité inattendue dans les lois de la physique, mais elle rend plus complexe notre conception du vide. Avec son ensemble de champs électriques et magnétiques aléatoires, le vide reste l'état le plus simple de la nature... aux étonnantes propriétés.

Timothy BOYER est professeur de physique à l'Université de New York.

H. PUTHOFF, a des sites sur internet, dont : <http://www.newphys.se/elektromagnetism/physics/puthoff/>

T.H. BOYER, *A Brief Survey of Stochastic Electrodynamics*, in *Foundation of Radiations Theory and Quantum Electrodynamics*, sous la direction de A.O. Barut, Plenum Press, 1980.

D.W. SCIAMA, P. CANDELAS et D. DEUTSCH, *Quantum Field Theory, Horizons, and Thermodynamics*, in *Advances in Physics*, vol. 30, n° 3, pp. 327-366, mai-juin 1981.

T.H. BOYER, *Derivation of the Blackbody Radiation Spectrum from the Equivalence Principle ...*, in *Physical Review D*, vol. 29, n° 6, 15 mars 1984.

S. LAMOREAUX, *Demonstration of the Casimir Force in Phys. Rev. Letters*, vol. 78, n° 1, pp. 5-8, janvier 1997.

L'infini est un révélateur

PATRICK DEHORNOY

L'infini est source d'inspiration. L'exploration d'ensembles hyperinfinis, impossibles à construire, mais pas inconcevables, a fait découvrir des objets mathématiques comme les tables de Laver et des propriétés des tresses.

Les tables de Laver sont des tableaux d'entiers dont les propriétés restent très mystérieuses, alors même qu'il est facile de les construire avec un ordinateur. Le plus étrange est que le peu que nous sachions sur ces tables repose sur l'hypothèse indémontrable qu'il existe des ensembles "hyperinfinis". Cela illustre un nouveau type d'applications de l'infini en mathématiques, où celui-ci sert à fournir des intuitions plus que des démonstrations.

Opérations autodistributives

Les tables de Laver ont été découvertes dans les années 1980 par Richard Laver, théoricien des ensembles de l'Université de Boulder, au Colorado.

À côté d'opérations usuelles comme l'addition ou la multiplication, qui vérifient des lois simples comme la com-

mutativité ($x * y = y * x$) ou l'associativité ($x * (y * z) = (x * y) * z$), les mathématiciens étudient d'autres opérations qui vérifient des lois plus exotiques.

Parmi celles-ci figure l'autodistributivité, qui s'exprime par l'égalité $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$, et que nous noterons AD : le nom indique qu'une opération vérifiant la condition AD est distributive par rapport à elle-même, de la même façon qu'on dit la multiplication usuelle distributive par rapport à l'addition, parce qu'elle vérifie $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$. Nous appellerons donc opération autodistributive, ou simplement opération AD, une "multiplication" (sur des objets quelconques, pas nécessairement des nombres) qui vérifie la condition AD quels que soient les choix des éléments x, y, z .

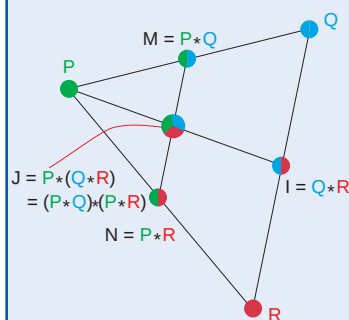
Il n'y aurait guère d'intérêt à choisir des conditions exotiques au hasard



et étudier pour le plaisir les opérations qui satisferaient de telles conditions (s'il en existe). L'intérêt pour les opérations AD provient de l'existence d'exemples non triviaux dans le monde mathématique, en liaison notamment avec d'autres structures importantes comme les groupes (voir l'encadré 1).

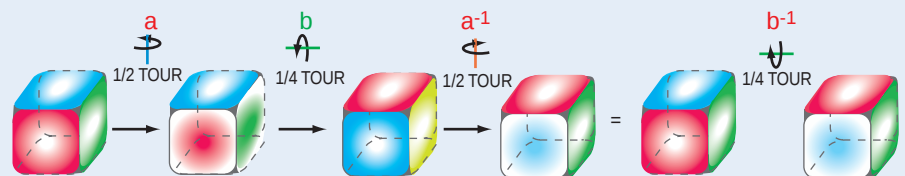
Le rôle de l'infini dans le domaine tient à ce que la considération d'ensembles «hyperinfinis» a mené à la découverte d'exemples d'opérations AD d'un type complètement nouveau (voir l'encadré 4), lesquelles ont donné un nouvel essor à toute la branche.

1. EXEMPLES D'OPÉRATIONS AUTODISTRIBUTIVES



Dans le plan, on définit le «produit» de deux points P et Q comme étant le milieu du segment PQ. Par le théorème de Thalès, cette opération vérifie la condition d'autodistributivité : $P * (Q * R) = (P * Q) * (P * R)$. Un exemple d'opération autodistributive est la conjugaison dans un groupe, notamment

$$\begin{aligned} a * b &= axbxa^{-1} \\ a * (b * c) &= a * (bxcxb^{-1}) = axbxcxb^{-1}xa^{-1} \\ (a * b) * (a * c) &= (axbxa^{-1}) * (axcxa^{-1}) = axbxa^{-1}xaxcxa^{-1}x(axbxa^{-1})^{-1} \\ &= axbxa^{-1}xaxcxa^{-1}xaxb^{-1}xa^{-1} = axbxcxb^{-1}xa^{-1} \end{aligned}$$



un groupe de rotations. Partant de la multiplication $\times$ du groupe, on définit une nouvelle opération $*$ en posant $a * b = axbxa^{-1}$. On vérifie que $a * (b * c)$ et $(a * b) * (a * c)$ sont égaux à $abcb^{-1}a^{-1}$. Un exemple de conjugaison de rotations d'un cube est représenté à droite.

De telles tables existent-elles? Certainement : si nous posons $p * q = q$, c'est-à-dire si nous construisons notre tableau en remplissant la première colonne avec des 1 partout, la deuxième avec des 2, etc., on montre que la condition AD est vérifiée, puisque nous aurons toujours $p * (q * r) = r = (p * q) * (p * r)$.

	1	2	3	N
1	2			
2	3			
3	4			
$\vdots$				
$\vdots$				
$\vdots$				
$\vdots$				
$N-1$	N			
N	1			

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

Or $4 * 1$ est 1, donc on doit avoir $4 * 2 = 1 * 1 = 2$ et notre tableau devient :

[illegible]

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

De même, $4 * 3 = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 2$

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

Sans risque d'être démenti, on peut affirmer que, quelle que soit la puissance de l'ordinateur utilisée ou l'astuce du programme développé, on trouvera toujours que la période de la première ligne dans une table de Laver est au plus 16. Pourtant le théorème de Laver nous dit que 32 est atteint, mais certainement bien plus loin que là où les ordinateurs savent encore compter...

La construction est la même pour toutes les tailles de tableau: notre règle du jeu donne à chaque fois une et une seule manière de remplir les cases de la dernière ligne, puis de l'avant-dernière, et ainsi de suite en remontant pour finir par la première ligne. Sont-ce des AD-tables? La construction effectuée garantit un certain nombre des égalités $p * (q * r) = (p * q) * (q * r)$, mais, en fait, seulement celles qui correspondent au cas particulier $r = 1$, car on se ramène toujours au cas précédemment calculé.

Pour les autres nombres du tableau, rien n'est garanti. La situation est alors la suivante: si la taille du tableau est une puissance de 2, alors le tableau que nous avons construit est bien une AD-table, sinon, ce n'en est pas une.

Ainsi, pour chaque entier n , nous avons obtenu une AD-table de taille 2^n , et c'est cette table qui est dénommée la n -ième table de Laver.

En dépit de la simplicité de leur construction, les tables de Laver sont des objets très compliqués et encore mal compris: en particulier, personne ne connaît de formule donnant explicitement la valeur du produit $p * q$ dans la n -ième table de Laver, et il est fort douteux qu'une telle formule existe!

Lignes et périodes

Néanmoins, nous observons certaines propriétés sur les exemples de l'encadré 1 (et sur les exemples supplémentaires que le lecteur aura programmés sur son ordinateur...), qui ont été

démontrées en toute généralité par Richard Laver, et par Ales Drapal, un mathématicien de l'université Charles de Prague.

Nous citerons ici deux propriétés importantes. La première est que chaque table s'obtient simplement à partir des tables plus grandes: par exemple, nous obtiendrons la table à 8 éléments à partir de la table à 16 éléments en gardant le quart supérieur gauche et en «projetant modulo 8» les valeurs, c'est-à-dire en gardant les valeurs entre 1 et 8, et en retranchant 8 aux valeurs entre 9 et 16. La correspondance est la même à chaque niveau: la table à 16 éléments s'obtient à partir de la table à 32 éléments en projetant modulo 16, etc.

La seconde propriété concerne les lignes des tables. Dans la n -ième table (celle qui a 2^n éléments), par hypothèse, la p -ième ligne (en partant du haut) commence par la valeur $p * 1 = p + 1$. Ensuite, le long de la ligne, les valeurs augmentent jusqu'à atteindre la valeur maximale 2^n , à la suite de quoi on retrouve la valeur $p + 1$ et toutes les valeurs précédentes, de façon périodique. Par exemple, dans la table à 8 éléments, les valeurs successives sur la deuxième ligne sont 3, 4, 7, 8, 3, 4, 7, 8: il y a 4 valeurs différentes, et nous dirons que la période de la ligne est 4. Ainsi, dans chaque table de Laver, chaque ligne a une certaine période, dont nous savons qu'elle est elle-même nécessairement une puissance de 2: par exemple, dans la table à 8 éléments, les périodes des lignes 1 à 8 sont, respectivement, 4, 4, 2, 4, 2, 2, 1, et 8.

Le théorème de Laver

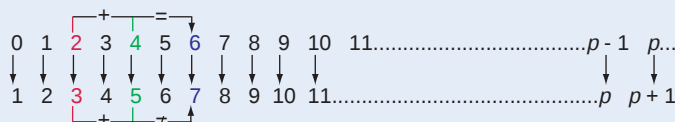
Intéressons-nous spécialement à la période de la première ligne. Nous lisons sur les exemples de l'encadré 2 que les valeurs pour les 5 premières tables sont 1, 1, 2, 4, et 4. Si le lecteur a programmé les tables suivantes, il trouvera ensuite les valeurs 8, 8, 8, 16, et 16 pour les tables à 32, 64, 128, 256, 512 et 1 024 éléments.

Qu'observons-nous? Que ces valeurs vont en croissant, plus exactement en ne décroissant pas. Cela était prévisible, car nous savons que la n -ième table s'obtient en projetant modulo 2^n la $n + 1$ -ième, et s'il y a m valeurs distinctes sur la première ligne de cette $n + 1$ -ième ligne, il y en a au plus m sur la première ligne de la n -ième table.

4. ENSEMBLES HYPERINFINIS ET RANGS AUTOSIMILAIRES

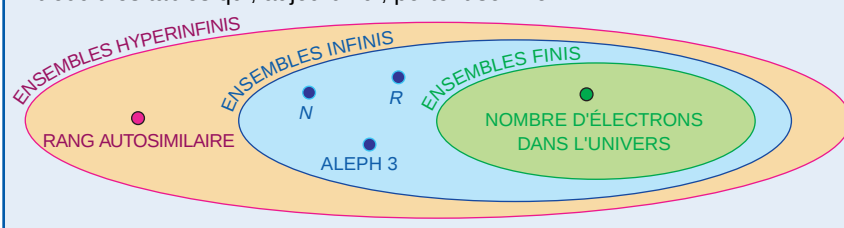
Un ensemble infini est, par définition, un ensemble tellement grand qu'il a des sous-ensembles aussi grands que lui. Par exemple, l'ensemble N des nombres entiers est infini, car la fonction qui envoie chaque entier n sur l'entier $n + 1$ établit une correspondance bijective entre N et le sous-ensemble de N constitué des entiers non nuls.

La théorie moderne des ensembles fait jouer un rôle fondamental à diverses extensions de la notion d'infini mettant en jeu ce qu'on peut appeler des ensembles hyperinfinis (on les dénomme aussi «grands cardinaux»). Un rang autosimilaire est un exemple de tel ensemble. L'idée est de repartir de la définition ci-dessus de l'infini, mais de la renforcer en demandant que la correspondance entre l'ensemble considéré X et l'un de ses sous-ensembles conserve toutes les structures additionnelles existant sur X . Reprenant l'exemple de la correspondance $n \rightarrow n + 1$



entre N et un de ses sous-ensembles, nous voyons que cette correspondance conserve l'ordre des entiers ($p < q$ entraîne bien $p + 1 < q + 1$) ; en revanche, elle ne conserve pas l'addition ($p + q = r$ n'entraîne pas $(p + 1) + (q + 1) = r + 1$...). Les mathématiciens ont montré qu'il n'existe aucune correspondance sur N qui puisse convenir, et donc N , qui est infini, n'est pas hyperinfini au sens précédent. C'est cette notion forte d'infini qu'on dénomme autosimilarité et, donc, N n'est pas autosimilaire.

Pour élaborer de façon convenable une théorie des ensembles autosimilaires (s'il en existe), le contexte de la théorie des ensembles suggère d'utiliser des ensembles d'un type particulier appelés rangs. L'existence d'un rang autosimilaire est l'un des axiomes d'hyperinfini que la théorie des ensembles étudie depuis les années 1970. Le lien avec les tables de Laver vient du fait qu'on peut construire à partir d'un rang autosimilaire une certaine opération AD (dont les tables de Laver sont des projections finies) : c'est ainsi que Laver a, pour la première fois, introduit les tables qui, aujourd'hui, portent son nom.



Nous voyons aussi que les périodes doublent parfois. Sans qu'une loi apparaisse clairement sur un aussi petit nombre de valeurs, il apparaît plausible que la suite des périodes tende vers l'infini, c'est-à-dire atteigne successivement toutes les puissances de 2 (il est facile de voir que les périodes ne peuvent faire plus que doubler d'une table à la suivante, donc on ne peut sauter aucune puissance de 2). Qu'en est-il?

En 1995, Richard Laver a prouvé le théorème suivant : «S'il existe un rang autosimilaire, alors la suite des périodes des premières lignes des tables de Laver tend vers l'infini.»

L'encadré 4 explique la notion de rang autosimilaire. Ce résultat est très étonnant : que la suite des périodes tende vers l'infini ne nous surprend guère, c'est ce que l'observation des exemples suggérait. Ce qui est surprenant ici est l'hypothèse avec laquelle Laver démontre son résultat, à savoir cette mystérieuse existence d'un rang autosimilaire. Cette hypothèse d'un rang autosimilaire exprime qu'il existe dans le monde mathématique des ensembles énormes, «hyperinfinis».

D'après le théorème d'incomplétude de Gödel, il n'existe aucun espoir de montrer que de tels ensembles existent, ni même de montrer que l'hypothèse qu'ils existent est non contradictoire. Ce qui est extrêmement surprenant alors, c'est l'apparition d'un lien entre les tables de Laver, qui sont des objets finis, calculables par ordinateur, et qui existent donc au sens le plus concret, et des ensembles hyperinfinis dont personne ne sait, ni ne saura jamais, s'ils existent.

Une alternative

La situation actuelle ne traduit que notre ignorance des propriétés des tables de Laver. Deux issues sont possibles :

- soit quelqu'un finit par trouver une "vraie" démonstration du théorème de Laver, c'est-à-dire une démonstration qui n'utilise pas l'existence d'un ensemble hyperinfini,
- soit on finit par démontrer que toute preuve utilise comme hypothèse cette existence de façon incontournable.

Si la seconde issue est la bonne, la situation serait comparable à celle du

théorème de Goodstein, une propriété des entiers dont on sait qu'on ne peut pas la démontrer sans une certaine forme d'infini (voir *L'infini est-il nécessaire*, page 102) ; une distinction importante néanmoins est que l'hypothèse utilisée dans la preuve du théorème de Goodstein est l'existence d'un infini minimal, alors que celle utilisée dans la preuve du théorème de Laver est l'existence d'un infini extraordinairement plus grand.

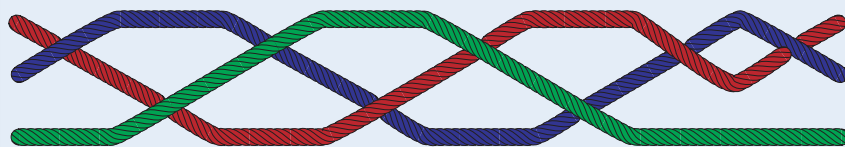
En théorie, rien n'empêche que cette issue soit la bonne (c'est même l'espoir de beaucoup de théoriciens des ensembles et de spécialistes de l'infini). Il semble cependant que la première issue ait bien davantage de chances d'être la bonne, même si les efforts pour démontrer «à la main» le théorème de Laver ont été jusqu'à présent infructueux ou, plus exactement, incomplets.

Applications de l'infini?

Dans la situation actuelle, le théorème de Laver est une application de la notion d'infini, puisque la seule démonstration que nous en connaissons y fait

5. L'ORDRE DES TRESSSES

L'existence des tables de Laver et le théorème sur les périodes ne sont pas les seules applications de l'existence d'un rang autosimilaire. Une autre application a été la découverte de l'ordre des tresses. Les tresses mathématiques sont des diagrammes avec des brins qui se croisent, sur le modèle suivant :



Les tresses jouent un rôle important, car elles apparaissent dans de nombreuses branches des mathématiques et de la physique, en liaison notamment avec la théorie des nœuds et, de là, avec une grande variété de problèmes en physique, en chimie ou en biologie (voir *La science des nœuds*, Dossier hors série *Pour la Science*, avril 1997). On a également proposé récemment plusieurs applications à la cryptographie.

En 1992, un ordre remarquable sur les tresses a été découvert. Il a permis notamment de construire un nouvel algorithme de comparaison de tresses plus rapide que tout ce qui était connu auparavant.

Ce qui nous intéresse ici est la façon dont a été découvert cet ordre. Le point de départ est l'étude des rangs autosimilaires par Laver à la fin des années 1980 : comme mentionné dans l'encadré 4, cette étude amène naturellement à une certaine AD-table, et Laver, en 1989, a montré que cette table est sans cycle, ce qui signifie qu'on ne peut pas y trouver des éléments $x_1, \dots, x_n$ tels que chaque x_i apparaît dans la ligne de x_{i+1} et x_1 apparaît dans la ligne de x_n . Or on savait à l'époque que l'existence d'une seule opération AD sans cycle était importante pour l'étude de la condition AD en général, tout en n'ayant aucune raison de penser qu'un tel objet doive exister. Le théorème de Laver ne montrait pas vraiment cette existence, puisqu'il supposait lui-même l'existence indémontrable d'un ensemble hyperinfini, mais, au moins, il montrait qu'elle était plausible, et, du coup, suggérait qu'une construction directe devait être possible. Cette indication a été confirmée, et, de surcroît, elle a mené à des applications insoupçonnées : c'est la construction, sans l'aide d'un ensemble hyperinfini d'une opération AD sans cycle, qui a naturellement amené à considérer des tresses et à les ordonner d'une façon que personne n'avait imaginée auparavant. Ainsi, il n'y a aucun lien direct entre les tresses et les ensembles hyperinfinis, si ce n'est que les premières ont été utilisées pour remplacer les seconds. Il n'empêche que, sans les ensembles hyperinfinis, nous en saurions aujourd'hui moins sur les tresses.

appel. S'il apparaît un jour une nouvelle démonstration qui ne l'utilise plus, le théorème cessera-t-il pour autant d'en être une application ? En un sens strict, peut-être, puisque ni l'énoncé ni la nouvelle preuve n'utiliseront l'infini.

Mais, en fait, il me semble qu'il s'agira toujours d'applications : quoi qu'il arrive, c'est l'utilisation de l'infini qui aura permis de découvrir le théorème, et il est plus que probable que personne n'aurait eu ni l'occasion ni la curiosité d'en chercher une démonstration si l'étude des rangs autosimilaires n'avait pas d'abord fourni un argument décisif, même fondé sur un principe indémontrable. C'est déjà ce qui s'est passé, il y a quelques années, avec l'ordre des tresses (voir l'encadré 5), et aussi avec

les tables de Laver elles-mêmes, d'abord déduites de l'existence d'un rang autosimilaire, puis, ensuite, reconstruites à la main en suivant la méthode que nous avons décrite ici.

Il est tentant de comparer ici la contribution de la théorie des ensembles hyperinfinis avec celle de la physique : se fondant sur des intuitions venues des modèles concrets, les physiciens proposent fréquemment des formules sans les démontrer rigoureusement ou, plutôt, en en donnant une première justification qui néglige des problèmes tels que divergence d'intégrales ou de séries (penser, par exemple, aux intégrales de Feynman). Il appartient alors aux mathématiciens de trouver d'autres démonstrations, complètes et rigoureuses. La situation est semblable lorsque des

ensembles hyperinfinis permettent de deviner et de justifier des propriétés comme l'existence des tables de Laver ou le théorème sur les périodes : comme précédemment, il reste ensuite à trouver d'autres démonstrations, libérées des hypothèses indémontrables.

Dans les deux cas, les contributions de la physique et de l'hyperinfini sont essentielles, car, sans elles, les propriétés n'auraient probablement pas été imaginées. Ces applications de l'infini sont d'un type nouveau en mathématiques : l'infini y sert de révélateur pour deviner des propriétés nouvelles, avant de disparaître ultérieurement lorsque sont trouvées les « bonnes » démonstrations.

L'existence de telles applications est un argument puissant en faveur de l'étude de l'infini (et de la théorie des ensembles) : elle montre que, même si l'on est tenté par une approche strictement constructiviste des mathématiques (voir l'article d'Allan Calder dans ce numéro) ou simplement si l'on ressent la plus grande méfiance et fort peu d'intérêt pour les ensembles infinis, et, *a fortiori*, hyperinfinis, on doit reconnaître à ces derniers la capacité de mener à la découverte de nouvelles propriétés des objets finis.

Notons que, de ce point de vue, il importe peu que l'existence des ensembles infinis considérés soit plus ou moins plausible, puisque ceux-ci ont vocation à disparaître du paysage final : on peut même s'attendre à ce que les objets les plus puissants en termes d'applications soient les moins plausibles, comme ces étranges rangs autosimilaires et autres ensembles hyperinfinis que nous avons rencontrés dans cet article et qui se sont déjà révélés fructueux.

Patrick DEHORNOY est professeur de mathématiques à l'université de Caen.

P. DEHORNOY, *Braids and self-distributivity*, Progress in Math., vol. 192, Birkhäuser, 2000.

J.-P. DELAHAYE, *Les grands cardinaux*, in *Pour la science*, n° 224, pp. 60-67, juin 1996.

R. DOUGHERTY, *Critical points in an algebra of elementary embeddings*, in *Ann. P. Appl. Logic*, n° 65, pp. 211-241, 1993.

C. KASSEL, *L'ordre de Dehornoy sur les tresses*, Séminaire Bourbaki, exposé 865, novembre 1999.

R. LAVER, *On the algebra of elementary embeddings of a rank into itself*, in *Advances in Math.*, n° 110, pp. 334-346, 1995.

L'infini littéraire

PAUL BRAFFORT

Dans le sillage des philosophes, romanciers, poètes et essayistes ont été inspirés par l'infini.

*Voir un Monde dans un Grain de Sable
Et un Ciel dans une Fleur Sauvage,
Tenir l'Infini dans la paume de la main
Et l'Éternité dans une heure.*

William Blake
(*Augures d'innocence* – 1803)

L'un, fini (la mathématique, la science), n'en finit pourtant pas : si la science veut décrire – voire expliquer – le monde, elle n'en saisit jamais qu'un infime fragment, et tout le reste... est littérature !

L'idée même de l'«infini» apparaît, dans le monde grec, au sein d'une culture qui ne s'est pas encore fragmentée. L'infini est donc littéraire et philosophique – voire linguistique – avant d'être mathématique (Platon et Aristote n'utilisent d'ailleurs pas le même mot pour le désigner). Et comme Paul Valéry, un écrivain qui, plus que tout autre, s'efforcera d'abolir les frontières au sein de la culture, l'observe en 1910 : «Il y a en nous une sensation finie de l'«infini.» Et ce n'est qu'un effet – une conséquence. Ce n'est pas une preuve de quoi que ce soit.» Avec Victor Hugo, Valéry sera ici notre guide.

Dès l'Antiquité, une dualité se dessine dans la problématique de l'infini : celle de l'arithmétique et du géométrique (du discret – dénombrable – et du continu). Une autre s'y ajoute au sein même du continu : celle de l'espace et du temps. Toutes intéressent et inspirent Valéry, comme elles ont intéressé Lucrèce, Bruno, Pascal, Goethe, Novalis, Hugo et intéresseront Aragon, Borges, Sinisgalli, Nabokov, entre autres. Ces dualités nous permettent de dessiner, dans le foisonnement littéraire, une certaine organisation de l'infini qui reprend la distinction traditionnelle entre les domaines de l'«extension» et de la «compréhension», mais doit tenir compte explicitement du contenu «privatif» qu'exprime le *in finini*.

L'angoisse de Pascal – sur laquelle Valéry et Borges reviendront longuement –, c'est aussi l'*Horror Vacui* (l'horreur du vide) de Sinisgalli (1945). Et cette angoisse se retrouve, comme le complément d'un ensemble, dans cette sensation de trop-plein qui parfois nous assaille, submergés souvent dans le déluge des signes, étouffés dans l'imbrication des réseaux, dans l'incendie des artifices. Il nous faudrait sans doute un nouvel Edgar Poe et un nouvel Eurêka (ou peut-être suffit-il d'observer, avec Irénée-Louis Sandomir, que «la 'Pataphysique contient tous les infinis»)...

La défense de l'infini

*Quelqu'un va-t-il prendre enfin
la défense de l'infini ?*

Aragon
(*Paris-Journal*, 13 avril 1923)

«L'infini se présente également, en arithmétique et en algèbre, comme un symbole d'impossibilité, comme une solution absurde et fausse...», observe le logicien Louis Couturat dans *De l'infini mathématique* (1896), et si, la même année, Valéry déclare, avec Teste : «J'ai mon *Infini*», il notera, dans ses *Cahiers*, en 1944 : «Les infinis sont des abus de langage et d'écriture, des développements fiduciaires sans garantie.» Borges avait dit aussi, en 1939, dans *Les avatars de la tortue* : «Il est un concept qui corrompt et dérègle tous les autres. Je ne parle pas du Mal, dont l'empire est circonscrit à l'éthique ; je parle de l'infini.»

Victor Hugo avait donné de ce sentiment de malaise une analyse quasi lexicale dans ses notes de travail de *William Shakespeare* (1864) : «Il semble que l'irrégulier, c'est l'inachevé, et que, dans l'inachevé, il y a de l'infini.» Il s'agit là d'une des nombreuses attestations de l'intérêt que porte Hugo à

un débat qui n'a cessé, depuis les éléates et les pères de l'Église, et que Louis Couturat met en scène, dans le livre III (*La critique de l'Infini*) de son traité, sous la forme d'un dialogue «à la Galilée» entre «Le Finitiste» et «L'Infiniste». Et si, en 1923, Aragon se propose de prendre *La défense de l'infini*, il préférera détruire, en 1927, le manuscrit de l'ouvrage qu'il projetait : le logicien et le mathématicien sont désormais à l'œuvre, aux côtés du philosophe et du poète.

Dès le prologue de son grand traité en cours de publication, *La totalité* (la section III.2 du volume I, livre IV, s'intitule d'ailleurs *Totalité et Infini*), le philosophe Christian Godin s'exclame : «Tout conspirait chez Leibniz. Tout expire chez la plupart des contemporains. Déconstruction, dissémination, déterritorialisation, différence, tout un courant de pensée contemporain travaille sur ces syllabes *dé-, dis-,* qui sont devenues, en remplacement des *con-* et *sym-* classiques, les préfixes fétiches de la modernité.»

Le préfixe *in* est celui d'*infini*, mais aussi d'*inachèvement*, d'*incertitude*, d'*impossibilité*. L'expression littéraire la plus remarquable en est due à l'écrivain, peintre et philosophe polonais S. I. Witkiewicz, auteur d'*Inassouvissement* (1930), roman où est évoquée la théorie des types de Russell (remède contre les paradoxes), dont une version simplifiée fut imaginée par son ami le logicien, peintre et écrivain Léon Chwistek. Le thème de l'inassouvissement est ainsi directement lié à celui de l'infini !

Et c'est un mathématicien devenu peintre, poète et publiciste, Leonardo Sinisgalli, qui nous propose une version lyrique de ces effrois et de ces émerveillements, dans *Horror Vacui* où l'on peut lire, dans le treizième fragment : «DÉCIMALES INFINIES – Qui a écrit que les nombres décimaux infinis donnent le sentiment d'une prolifération, d'un monstrueux travail de la nature, de

quelque chose qui rappelle les dynasties millénaires des Pontifes, des Empereurs, des Rois, des Princes ? Avec cette répétition périodique et cette succession chaotique des mêmes neuf chiffres, qui ne pense aux Ramsès, aux Innocents, aux Sixtes, aux Alexandre, aux Georges ? Quelque chose qui rappelle les vers de l'intestin, les bandelettes, les chaînes, des anneaux attachés à un billot, à une tête, à un nombre entier.»

Dans *Une vague de rêves* (1924), Aragon, lui, avait choisi d'accueillir courtoisement le monstre : «Qui est là ? Ah très bien : faites entrer l'infini.»

Escales dans l'infini

La hiérarchie absolue de l'infini nous est inconnue. Il n'y a pas d'autre hiérarchie que la gravitation pour les corps et le rayonnement pour les esprits. Les deux phénomènes, qui se corrigent l'un par l'autre, sont en équilibre dans l'homme.

Victor Hugo

(William Shakespeare, *Notes de travail : l'infini dans l'art*, 1864)

Le premier infini qu'écrivains et mathématiciens s'efforcent de décrire est l'infini dénombrable, le plus proche de notre intuition, semble-t-il. Mais le logicien L. E. J. Brouwer, dans *Art, Life and Mysticism*, dès 1908, est réticent : «Dans la science tout ce qui est perçu est placé en dehors du Soi, dans un univers de perception indépendant du Soi ; son lien avec le Soi, son unique source et guide, est perdu. Cela construit alors un substratum logico-mathématique qui est complètement étranger à la vie, une illusion, et qui agit dans la vie comme une Tour de Babel avec sa confusion des langues.»

Tour de Babel, paradoxe de Zénon, autant de thèmes qui inspireront Valéry, Borges et Calvino : on n'a pas oublié la vingt-et-unième strophe du *Cimetière marin* : «Zénon ! Cruel Zénon ! Zénon d'Élée ! / M'as-tu percé de cette flèche ailée / ...». John Irwin consacre un chapitre entier du livre qu'il publie en 1994 au fameux paradoxe vu par Borges, dans *La mort et la boussole* (1942) et *L'aleph* (1945). Calvino en fera le thème de *Temps zéro* (1966), la nouvelle la plus réussie de l'ouvrage éponyme. L'année suivante, dans *Cybernétique et fantasmes*, il précise : «Je pourrais ajouter que la numérabilité, la finitude sont en train de triompher de l'indétermination des concepts qui ne peuvent pas être soumis aux mesures et aux délimita-

tions ; mais cette formulation risquerait de donner une idée un peu simpliste des choses alors que la situation réelle est exactement contraire : tout processus analytique, toute division en parties tend à donner du monde une image qui va se complexifiant, juste comme, en refusant un espace continu, Zénon d'Élée finissait par concevoir entre Achille et la tortue une subdivision infinie de points intermédiaires.»

Au paradoxe ancien de Zénon s'étaient ajoutées, au début du siècle, d'autres antinomies qui mettaient en cause la notion d'ensemble – et même le fonctionnement de notre langage : celles de Russell, de Richard, de Grelling, etc. Henri Poincaré s'exclamait alors, dans *La logique de l'infini* (1909) : «Est-il possible de raisonner sur des objets qui ne peuvent être définis en un nombre fini de mots ? Est-il possible même d'en parler en sachant de quoi l'on parle, et en prononçant autre chose

que des paroles vides ? Ou au contraire doit-on les regarder comme impensables ? Quant à moi je n'hésite pas à répondre que ce sont de purs néants.» Valéry ne s'exprimait pas autrement : «Le résultat des arguments de Zénon, c'est la démonstration d'une confusion dans le langage» (1917), tout comme Sinigalli qui, dans *Le Devin* (1944), fait dialoguer ainsi ses personnages :

Le Roi : *Ce sont des signes ou des choses ?*

Le Devin : *Ce sont des mots, Sire.*

La Clôture

Leur pouvoir suggestif ne dépend pas tant d'un signifiant caché ou latent que la lecture doit mettre au jour, il utilise plutôt toutes les ressources du signifiant et de la structure afin de poser un droit au sens multiple et, ainsi, de libérer la lecture à l'infini.

David Banonk
(*La lecture infinie*)



1. LE PROMENEUR SUR LA MER DE NUAGES, de Caspar David Friedrich (1818) évoque cet infini qui a inspiré de nombreux écrivains et poètes.

Le désir de la connaissance – qu'elle soit scientifique ou littéraire – a vite fait de devenir passion... ou mystique. L'expression qu'en donne Pascal, «la nature est une sphère infinie dont le centre est partout et la circonférence nulle part», a fait l'objet de nombreux commentaires de Valéry et de Borges. Le thème du cercle ou de la sphère est rassurant : il permet d'assigner à ce qui semble une expansion sans limite une forme de «clôture», de compléter l'infini dénombrable par l'infini continu, et c'est encore le poète Sinisgalli qui, dans *Horror Vacui*, en célèbre l'invention (certains diraient la découverte) dans ce fragment :

«C'est le mérite de Georg Cantor de nous avoir fait sentir l'épaisseur, la densité, la puissance du continu, la mesure de l'infini, l'ordre de l'ensemble des nombres. La route qui du rien mène à l'unité, de l'unité au multiple, jusqu'à Dieu, nous pouvons aujourd'hui la parcourir pour la première fois sans danger d'y rencontrer des sauts ou des lacunes. Aucun nombre ne peut plus nous échapper. Cantor a trouvé la place qui convient à chacun. Il a ordonné les points d'un segment, d'une ligne, d'une surface, d'un espace, et il a trouvé par voie de correspondance la mesure, le terme de comparaison de ces infinis. Il a commencé par considérer l'ensemble des nombres entiers, l'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des nombres premiers : il a trouvé que ces trois ensembles ont la même puissance, la puissance du dénombrable, le même nombre cardinal qu'il a appelé Aleph zéro. [...] Cantor a démontré que même l'ensemble des nombres rationnels et celui des nombres algébriques ont la capacité d'être dénombrés ; mais l'infinité des nombres algébriques est infime comparée à l'infinité des nombres transcendants. Les nombres algébriques et les nombres transcendants forment l'ensemble des nombres réels, et Cantor a démontré que cet ensemble a la puissance du continu, exprimée par un deuxième nombre cardinal transfini. [...] Cantor a trouvé une loi d'engendrement de la multitude des nombres ordinaux finis et transfinis, il a

trouvé une dynastie, celle des Aleph, et cela, à l'aide de deux principes seulement, l'un immanent (additif), l'autre transcendant (passage à la limite) : Cantor, législateur de l'infini.»

Pourtant toute écriture (littéraire ou mathématique) n'est jamais qu'agencement d'un nombre fini de signes, et sa capacité à représenter le continu demeure problématique. Paul Valéry rappelle, dans ses *Cahiers*, en 1943, que «l'infini est le type de cette illusion, laquelle consiste à ne pas voir le retour invincible au point le plus proche de l'état de pouvoir recommencer un écart». Dès 1927, il évoque «l'idée d'un monde fermé contenant un ou plusieurs infinis» et précise, en 1935 : «L'opération de l'artiste consiste à tenter d'enfermer un infini. Un infini potentiel dans un fini actuel.» Comme en mathématique, les techniques «effectives» ont un caractère essentiellement combinatoire : labyrinthe, graphes aux subtiles bifurcations, arrangements tabulaires complexes, involutions spéculaires aux reflets illimités. L'OuLiPo (l'OUvroir de LIttérature POtentielle, groupe d'écrivains créé par le mathé-

maticien François Le Lionnais et par Raymond Queneau en 1960, qui a notamment accueilli I. Calvino et G. Perec) en a éprouvé les pouvoirs.

Comme Borges, Calvino lance un défi aux labyrinthes : «Et qui croit pouvoir vaincre les labyrinthes en fuyant leur complexité passe à côté de la question. Donc poser l'existence d'un labyrinthe, puis demander à la littérature de fournir une clé pour en trouver l'issue apparaît comme une demande dépourvue de toute pertinence. Ce que peut faire la littérature est de définir la meilleure attitude possible pour trouver une voie de secours, même si cette issue ne consiste que dans le fait de passer d'un labyrinthe à un autre. C'est le défi au labyrinthe que nous voulons sauver, c'est la littérature du défi au labyrinthe que nous voulons mettre en évidence en la distinguant d'une littérature de reddition au labyrinthe.» Et dans *Cybernétique et fantasmes* (1967) Calvino ajoute : «Nous avons dit que la littérature est, tout entière, dans le langage, qu'elle n'est que la permutation d'un ensemble fini d'éléments et de fonctions. Mais la tension de la lit-

térature ne viserait-elle pas sans cesse à échapper à ce nombre fini ? Ne chercherait-elle pas à dire sans cesse quelque chose qu'elle ne sait pas dire, quelque chose qu'on ne peut pas dire, quelque chose qu'elle ne sait pas, quelque chose qu'on ne peut pas savoir ? Telle chose ne peut pas être sue tant que les mots et les concepts pour l'exprimer et la pensée n'ont pas été employés dans cette position, n'ont pas été disposés dans cet ordre, dans ce sens. Le combat de la littérature est précisément un effort pour dépasser les frontières du langage ; c'est du bord extrême du dicible que la littérature se projette ; c'est l'attrait de ce qui est hors du vocabulaire qui meut la littérature.»

Le «défi au labyrinthe», c'est l'effort pour associer aux situations d'engendrement combinatoire des filtres «anti-combinatoires» (telles les «contraintes» de l'OuLiPo). Dans le *Conte à votre façon* de Queneau, *Les villes invisibles* de Calvino, *La vie mode d'emploi* de Perec, *Feu pâle* de Nabokov, l'infini potentiel est



2. LE SCULPTEUR français Auguste Préault (1809-1879) a dessiné un portrait d'Eugène Delacroix, à qui il prête cette réflexion sur l'infini.

maîtrisé, mais fait naître un désir d'achèvement actuel (on songe au théorème de complétion d'un espace topologique uniforme). L'interactivité offerte par les systèmes du type *Conte à votre façon*, en particulier, n'est pas sans évoquer les «suites de libre choix» de Brouwer, et donc une forme élégante – et constructive – d'appréhension du continu.

Les sirènes de Titan

*C'est donc vers l'air que je déploie mes ailes
confiantes
Ne craignant nul obstacle, ni de cristal ni
de verre,
Je fends les cieux et m'érige à l'infini.
Et tandis que de ce globe je m'élève vers
d'autres globes
Et pénètre au-delà par le champ éthéré,
Je laisse derrière moi ce que d'autres voient
de loin.*

Giordano Bruno
(*De l'infini, de l'univers et des Mondes*)
Le titre de cette section, comme des précédentes, est celui d'une œuvre littéraire, ici un roman de Kurt Vonnegut, où l'auteur introduit des entités spatio-temporelles qu'il nomme «chrono-synclastic infundibula», événements semblables à ces «moments de synchronisation cosmiques» décrits par Nabokov. Ce sont des moments d'exploration simultanée de l'espace et du temps, de circulation le long de cette dimension d'«échelle» à laquelle les physiciens s'intéressent aujourd'hui, mais que Victor Hugo évoquait déjà dans *Les misérables* (La maison de la rue Plumet) : «Qui donc peut calculer le trajet d'une molécule? que savons-nous si des créations de monde ne sont point déterminées par des chutes de grains de sable? qui donc connaît les flux et les reflux réciproques de l'infiniment grand et de l'infiniment petit, le retentissement des causes dans les précipices de l'être et les avalanches de la création?»

L'infini atteint ainsi la dimension d'échelle qui s'ajoute à celles de l'espace et du temps, et l'on peut imaginer que les nouvelles techniques, qui nous permettent de visualiser ces dimensions nouvelles, au service de la physique ou de la biologie, des formes littéraires et artistiques aussi bien que mathématiques de la représentation, nous offriront des accomplissements, des assouvissements inédits...

Terminons par un véritable moment de synchronisation cosmique : on sait que les *Nouvelles Impressions d'Afrique* de Raymond Roussel (1932), dont la composition et les illustrations par H.-A. Zo ont été préparées avec un soin maniaque par l'auteur, se terminent par un dessin dont la spécification (qui lui avait été transmise par une agence de détectives privés) était : «Un pan de ciel étoilé sans paysage terrestre semblant vu d'un point de l'espace sidéral donnant l'impression de l'infini.» Or le poème et ses illustrations sont suivis, dans l'édition Lemerre, par un poème : *Mon Âme*, écrit à l'âge de 17 ans, réédité sous le titre *L'Âme de Victor Hugo*, et dont voici les deux derniers quatrains (le premier suggère évidemment l'audacieuse substitution : «Victor Hugo» → «Raymond Roussel») :

*À cette explosion voisine
De mon génie universel,
Je vois le monde qui s'incline
Devant ce nom : Victor Hugo.*

*Sur la terre, que je domine,
Je vois ce feu continu
Qui, seul et sans frère, illumine
Partout l'univers actuel.*

Et c'est dans *Abîme*, le chant XLI et dernier de *La légende des siècles*, que Victor Hugo, le 26 novembre 1853, conclut en donnant la parole à notre héros :

L'INFINI
L'être multiple vit dans mon unité sombre.

Paul BRAFFORT est responsable du programme scientifique de l'ALAMO (Atelier de littérature assistée par la mathématique et les ordinateurs)

H. POINCARÉ, *Dernières pensées*, Flammarion, 1913.

P. VALÉRY, *Cahiers*, Gallimard, 1974.

T. LÉVY, *Figures de l'infini*, Éditions du Seuil, 1987.

J.L. BORGES, *Avatars de la tortue*, *Œuvres complètes I*, Gallimard, 1993.

P. ZELLINI, *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, 1993.

J.-P. LUMINET, *Les poètes et l'univers* (anthologie), Le Cherche Midi, 1996.

C. GODIN, *La Totalité*, Champ Vallon, 1998.

Paul BRAFFORT, *Science et Littérature*, Diderot, diffusion Éditions du Seuil, 1998.

Les geysers

PHILIPPE COUSSOT

Dans la cheminée d'un geyser, l'eau est sous pression et à température élevée. Périodiquement, un brusque changement d'état s'amorce et aboutit à une violente éruption : la colonne d'eau surchauffée passe de l'état liquide à l'état vapeur.

Alcalay/J. Bios

La Terre a parfois les allures d'une baleine expulsant l'eau par son évent. Les geysers ne sont cependant pas le signe d'une vie interne du globe, mais l'une des manifestations les plus étranges du cycle de l'eau. À intervalles réguliers ou irréguliers, un mélange d'eau chaude et de vapeur en provenance des entrailles de la Terre est brutalement projeté à plusieurs dizaines de mètres de hauteur. D'où provient cette vapeur ? Comment ces projections sont-elles régulées ?

On dénombre quelque 50 champs de geysers dans le monde, dont les deux tiers seulement contiennent plus de cinq geysers actifs. Le parc national de Yellowstone (*ci-dessus, Geyser Castle*), aux États-Unis, en contient davantage, le plus connu étant *Old Faithful* qui, depuis 100 ans, laisse échapper toutes les 65 minutes, un jet d'eau et de vapeur de 50 mètres de hauteur. Certains geysers sont plus rapides : le *Strokkur*, en Islande, explose toutes les 10 à 15 minutes. D'autres encore sont beaucoup lents, les éruptions se produisant uniquement après plusieurs heures de repos.

Les geysers sont assez rares, car ils résultent de la conjonction de divers phénomènes, notamment d'une activité volcanique et d'une circulation d'eau à relativement faible profondeur. Un geyser évolue au rythme des modifications de la croûte terrestre, sur des centaines, voire des milliers d'années. L'activité d'un geyser change souvent quand un séisme se produit à proximité, car la structure du sous-sol, dont nous expliquerons l'importance, change. Dans les régions de volcanisme actif, les évolutions de la croûte terrestre expliquent aussi l'apparition de nouveaux geysers. Les solfatares sont des «geysers calmes», qui relarguent de la vapeur d'eau chargée de soufre.

L'eau expulsée par les geysers (d'après le mot islandais *geysir* qui signifie *jaillir*) provient essentiellement de l'eau de

pluie qui s'est infiltrée très lentement dans le sol, à travers des fractures ou des roches poreuses sur plusieurs kilomètres. La température des roches s'élève progressivement avec la profondeur : elle augmente de 30 °C par kilomètre sur les 10 premiers kilomètres. Toutefois, la température est notablement supérieure à proximité des zones d'activité volcanique, car elle est proche du magma en fusion ou en cours de solidification. L'eau qui s'infiltre dans un sous-sol poreux se réchauffe progressivement et, parfois, s'accumule. Pour qu'un geyser se forme, il faut qu'une telle réserve d'eau soit connectée à l'air libre par un réseau de conduits sous-terrains.

RETARD À L'ÉBULLITION

Pourquoi un geyser donne-t-il l'impression d'exploser ? En raison d'une sorte de réaction en chaîne qui prend naissance au sein de la masse d'eau surchauffée et sous pression. En profondeur, l'eau supporte tout le poids de la colonne d'eau située au-dessus d'elle, qui est proportionnel à la profondeur considérée. Ainsi la pression qui s'exerce sous une colonne de 10 mètres de hauteur est égale à deux fois la pression atmosphérique (une colonne d'eau de 10 mètres de hauteur équivaut à une atmosphère à laquelle s'ajoute la pression atmosphérique qui s'exerce sur le haut de la colonne). Or la température d'ébullition de l'eau augmente avec la pression. L'eau bout à 100 °C sous pression atmosphérique normale, à 120 °C lorsque la pression est égale à deux fois la pression atmosphérique, à 158 °C sous 50 mètres (6 fois la pression atmosphérique). Dans les geysers les plus profonds la température de l'eau atteint 300 °C sans qu'il n'y ait d'ébullition. Considérons maintenant une colonne d'eau progressivement



Alcalay/Jean-Jacques Bios



Klein/Hubert Bios

À gauche, le geyser *Strokkur*, en Islande, juste avant l'éruption et, à droite, le geyser *White Dome*, à Yellowstone, aux États-Unis.