

5. NOMBRES RÉELS ET DÉCADIQUES PÉRIODIQUES

Si s est une suite finie de chiffres de longueur p , alors le nombre décadique $\dots ssss$ vaut $-s/(10^p - 1)$ et le nombre réel $0,ssss\dots$ vaut $s/(10^p - 1)$. Tout est là.

En effet, d'une part avec des nombres décadiques, $\dots ssss - (10^p \dots ssss) = s$ (exemple, avec $s = 51$, donc $p = 2$, $\dots 515151515151 - 515151515100 = 51$). D'autre part, avec des nombres réels, on a : $10^p 0,ssss\dots - 0,ssss\dots = s$ (exemple : $51,515151\dots - 0,51515151\dots = 51$).

On en déduit que, comme cela se passe dans le monde des nombres réels, les nombres décadiques périodiques à partir d'un certain point sont les quotients de deux entiers naturels (c'est-à-dire les fractions au sens habituel du terme : $12/47$, $-32/1997$, etc.). Il en résulte aussi que le produit de deux nombres décadiques périodiques est toujours périodique.

Ces égalités résolvent les coïncidences posées au début de l'article :

$1+20+400+8000+160000+\dots = 1/(1-20) = -1/19$ (d'après la formule de la série géométrique en décadique). Le calcul en nombres réels de $1/19$ donne un résultat de la forme $0,ssss$ pour une certaine séquence s de chiffres. D'après les deux lignes du haut, la même séquence de s donne l'écriture de $-1/19$ en décadique.

ne se classent pas, et donc ne puissent pas servir à ordonner quoi que ce soit, mais c'est aussi ce qui se passe pour les nombres complexes. Nombre d'autres propriétés des nombres décadiques justifient cependant qu'on les dénomme nombres.

La soustraction se définit sans problème soit en généralisant l'opération habituelle, soit en indiquant que soustraire x c'est additionner $-x$, ce qui, nous le constatons, revient au même.

$$\begin{array}{r} \dots 2222222222 \quad 123123,123 \\ - \quad \quad \quad 5 \quad - \dots 999999,999 \\ = \dots 2222222217 \quad = \dots 123123,124 \end{array}$$

LA MULTIPLICATION

Pour la multiplication, on ne rencontre pas de difficultés particulières non plus : on utilise la méthode usuelle apprise à l'école, qu'on imagine poursuivre à l'infini (voir la figure 2).

Notre exemple porte sur des nombres périodiques, mais il n'y a bien sûr aucune obligation à cela, et la multiplication est définie pour tous les nombres décadiques. Que le produit de deux nombres périodiques le soit aussi est une propriété générale.

L'addition et la multiplication ainsi définies possèdent toutes les bonnes propriétés qu'on attend : $a+b=b+a$, $(a+b)+c=a+(b+c)$, $a \times b=b \times a$, $(a \times b) \times c=a \times (b \times c)$, $(a+b) \times c=ac+bc$, etc. Le mathématicien dit que l'ensemble des nombres décadiques est un anneau commutatif, mais peu importe. Certaines choses surprenantes se produisent :

$$\dots 2857142857143 \times 7 = 1.$$

$$\dots 765432098765432 \times 9 = \dots 8888888888$$

La première des égalités signifie que 7 possède un inverse qui est $\dots 2857142857143$, et l'on peut donc écrire : $\dots 2857142857143 = 1/7$.

La question de savoir quels nombres décadiques possèdent un inverse conduit à s'interroger sur ce que serait l'opération de division.

LA DIVISION

Notons d'abord que, grâce au système des virgules, on peut toujours diviser un nombre décadique par 2 et par 5 :

$$\begin{array}{l} \dots 11111111 : 2 = \dots 55555555,5 \\ \dots 321321321 : 5 = \dots 64264264,2 \end{array}$$

Nous pouvons donc toujours diviser un nombre décadique par n importe quel nombre de la forme $2^n \times 5^m$.

Pour les autres nombres, en particulier pour tous les nombres infinis $\dots dcba$, nous pouvons tenter d'effectuer l'opération de division décadique décrite à la figure 2. Cette opération consiste à faire apparaître des zéros progressivement à droite dans les restes successifs. Un peu d'attention montre que c'est possible si le dernier chiffre a du diviseur $\dots dcba$ donne, lorsqu'on le multiplie par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, des nombres se terminant par tous les chiffres possibles 0, 1, ..., 9 (pas toujours dans cet ordre).

C'est évidemment vrai si $a = 1$. C'est vrai aussi si $a = 3$, car $3 \times 0 = 0$; $3 \times 1 = 3$; $3 \times 2 = 6$; $3 \times 3 = 9$; $3 \times 4 = 12$; $3 \times 5 = 15$; $3 \times 6 = 18$; $3 \times 7 = 21$; $3 \times 8 = 24$; $3 \times 9 = 27$. On vérifie que c'est encore vrai pour 7 et pour 9, mais pas pour 0, 2, 4, 6, 8.

En résumé l'opération de division décadique peut donc se faire si le dernier chiffre du diviseur $\dots dcba$ est 1, 3, 7 et 9. (Dans le cas général où nous considérons la base n à la place de 10, il faut que a soit premier avec n).

Lorsque ce n'est pas le cas, tout n'est pas perdu, nous divisons le numérateur et le dénominateur de la fraction que nous cherchons à calculer par 2 ou par 5 (ce qui est toujours possible) pour faire disparaître du diviseur les chiffres terminaux 0, 2, 4, 5, 6 et 8 qui gênent. Nous espérons trouver, au bout d'un nombre fini d'essais, un dénominateur qui se termine par 1, 3, 7 ou 9. C'est presque toujours le cas. Pour certains nombres décadiques étranges, cependant, jamais nous ne réussirons. En voici deux (la figure 4 explique comment les calculer) :

$X_1 = \dots 3953007319108169802938509890$
 $062166509580863811000557423423230$
 $896109004106619977392256259918212$
 $890625.$

$X_2 = \dots 6046992680891830197061490109$
 $937833490419136188999442576576769$
 $103890995893380022607743740081787$
 $109376.$

Le premier est indéfiniment divisible par 5 (jamais on ne trouve un résultat se terminant par 1, 3, 7 ou 9 quand on le divise par 5) le second est indéfiniment divisible par 2.

Ces deux nombres ont une autre propriété remarquable, qui n'a pas d'équivalent dans le monde des nombres réels : leur produit est nul : $X_1 \times X_2 = 0$.

Nous disons que X_1 et X_2 sont des diviseurs de zéro (et que l'anneau des nombres décadiques n'est pas intègre). Chacun de ces nombres a aussi l'étrange propriété d'être égal à son carré. Nous disons que X_1 et X_2 sont des nombres automorphes. Il n'y en a aucun autre, mis à part bien sûr 0 et 1.

$$(X_1)^2 = X_1 ; (X_2)^2 = X_2.$$

Bien d'autres propriétés étonnantes des nombres décadiques montrent que l'on peut «compter» sur eux. Le monde des nombres décadiques permet de comprendre en profondeur et sans raisonnement compliqué les additions infinies du second type, qui correspondent à des séries géométriques (comme les additions infinies du premier type correspondaient à des séries géométriques dans le monde des nombres réels). On peut alors sans mal inventer de nouvelles additions infinies comme celle-ci, qui plaira aux superstitieux. On part de 46 et on multiplie par 7 pour chaque nouvelle ligne :

$$\begin{array}{r} 46 \\ + 322 \\ + 2254 \\ + 15778 \\ + 119446 \\ \dots \dots \dots \\ \dots 66666666 \end{array}$$

Roger CUCULIÈRE, À l'horizon de l'arithmétique décimale : les nombres 10-adiques, in Pour la Science, juin 1986.

H.-D. EBBINGHAUS et J. NEUKIRCH, Les nombres (chapitre 6), Vuibert, 1998 (uniquement les p -adiques avec p premier).

R. FERRÉOL, Les brenoms, Notes d'exposé communiquées par l'auteur.

M. GUINOT, Les nombres be-adiques, IREM de Lyon, 1987.

V. LEFÈVRE, Les brenoms, janvier 1994. Texte à télécharger à l'adresse : www.ens-lyon.fr/~vlefevre (précis, accessible et assez complet).

J.-P. SERRE, Cours d'arithmétique, PUF, Paris, 1970.



Hex : le jeu des hexagones

IAN STEWART

Quelques connexions gagnantes de ce jeu de stratégie.

Las des jeux de société ? Si oui, essayez Hex. Ce petit jeu pour deux est aussi captivant que les meilleurs des jeux électroniques et tellement plus stimulant ! On joue plus facilement à Hex depuis qu'un passionné du jeu, l'Australien Cameron Browne, lui a consacré un livre, désormais indispensable à tous les passionnés de la théorie des jeux.

Hex se joue à deux, sur un plateau pavé de cases hexagonales (voir la figure 2). D'ordinaire, ce plateau a la forme d'un losange de 11 cases de côté. Chacun des joueurs est maître de deux des côtés opposés de ce losange, à l'exception des cases placées aux coins, qui sont propriété commune. L'objectif de chaque joueur est simple : placer un à un ses pions (bleus ou rouges) afin de relier ses deux côtés par une chaîne de pions, que cette dernière soit tortueuse ou qu'elle ait des embranchements ou des boucles. Facile ? Pas tant que cela. Qui a essayé, sait à quel point Hex est subtil.

Le jeu est une invention de Piet Hein, un mathématicien danois du milieu du XX^e siècle, connu aussi pour sa poésie. Apparu pour la première fois dans l'édition du 26 décembre 1942 du journal danois *Politiken*, il fut réinventé par le mathématicien américain John Nash en 1948. Alors étudiant à l'Université de Princeton, Nash était un passionné des jeux, auxquels il consacra de nombreuses recherches. Il obtiendra d'ailleurs le prix Nobel d'économie pour l'application de ses travaux en théorie des jeux à ce domaine. À Princeton, les toilettes pavées de carreaux hexagonaux étaient les seuls endroits où les étudiants passionnés par Hex, mais désargentés, pouvaient se livrer des duels !

Malheureusement, Hex est presque impossible à trouver dans le commerce ! En 1957, Martin Gardner, consacre un article à ce jeu dans les colonnes de

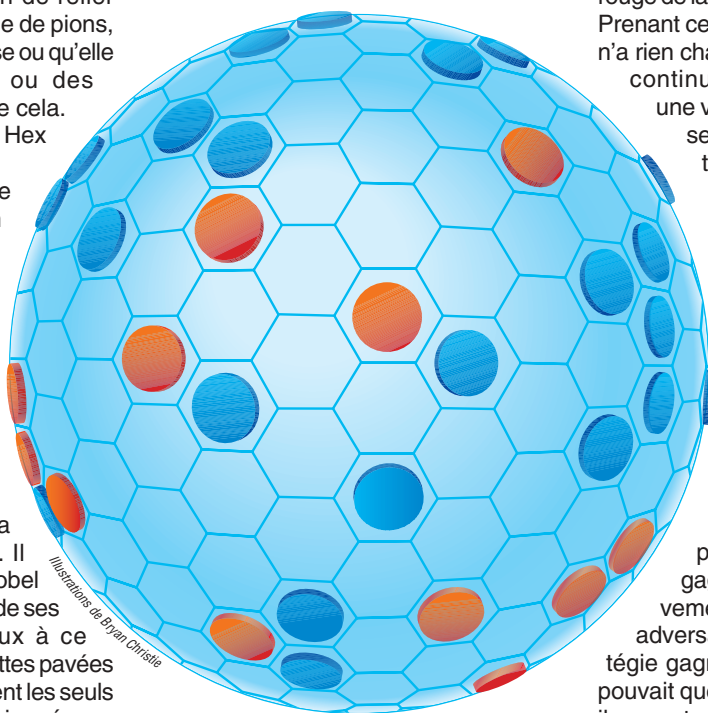
Scientific American : en une semaine, Hex devient la nouvelle marotte des laboratoires de mathématiques.

Comment joue-t-on à Hex ? Tout d'abord, il n'y a que 11×11 , soit 121, positions possibles. De plus, dès que l'un des joueurs établit une chaîne, son adversaire ne peut plus en établir : il a nécessairement perdu. En fait, il existe même une façon optimale de jouer qui garantit la victoire au premier joueur, celui qui pose le premier pion de la partie.

La démonstration de ce fait repose sur une méthode curieuse, celle du « voleur de tactique ». Supposons qu'une tactique gagnante existe bien, non pas pour le premier joueur (qui joue les rouges), mais pour le second (qui joue les bleus)

et montrons que cette hypothèse aboutit à un paradoxe. Cette « stratégie gagnante » pour le second joueur est connue des deux adversaires ; par hypothèse, celui qui place le second pion de la partie (le premier bleu) gagne forcément s'il l'applique. Que peut faire le premier joueur pour gagner quand même ? Rien, par hypothèse ! Cependant, comme il est humain, donc subjectif, il tente sa chance. Que fait-il ? Il dépose un premier pion rouge, puis, pendant qu'il attend son tour, décide de faire comme s'il jouait en second. Dès ce moment (pour lui même), il est le second joueur qui applique correctement la stratégie gagnante : dès qu'un pion bleu est placé, le rouge est placé selon la stratégie du second joueur. Le premier pion rouge de la partie devient le « pion oublié ». Prenant cette décision, le premier joueur n'a rien changé pour son adversaire, qui continue de son côté à jouer pour une victoire assurée. On peut alors se dire qu'à un moment de la partie, le premier joueur doit occuper une case déjà prise par le « pion oublié ». Est-ce rédhitoire ? Non, parce que cette case est déjà occupée par un pion rouge, de la couleur nécessaire pour que la stratégie gagnante soit correctement appliquée : cette position devient stratégique, et le premier joueur place alors son pion rouge n'importe où, puis « l'oublie ».

En volant la stratégie du premier joueur, le joueur rouge gagne, quels que soient les mouvements des pions bleus. Or, son adversaire appliquait lui aussi la stratégie gagnante qui, par hypothèse, ne pouvait que le faire gagner, lui aussi. Or, il ne peut y avoir deux gagnants. Conclusion : l'hypothèse est fautive. Il n'existe pas de stratégie gagnante qui fasse gagner à coup sûr le joueur qui dépose le deuxième pion de la partie. Rappelons maintenant que Hex se termine toujours par la victoire de l'un des joueurs.



1. Jouez à la balle avec Hex ! Vous avez le choix. Divers jeux d'Hex se pratiquent sur une sphère pavée d'hexagones et de 12 pentagones (lesquels ne peuvent s'apercevoir sous l'angle observé ici). Le premier joueur qui parvient à boucler une chaîne autour d'une ou de plusieurs cases a gagné.

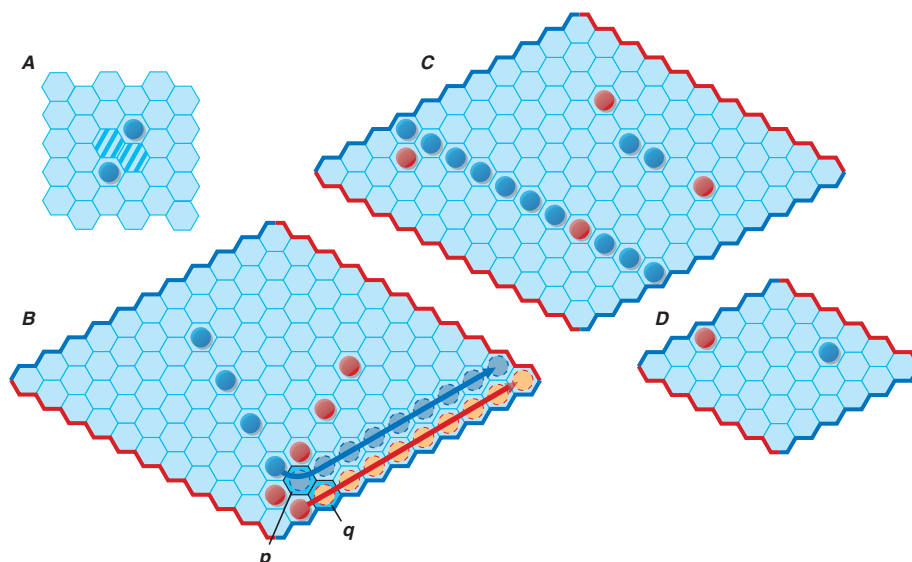
Si c'est le cas et si le second joueur ne peut forcer la victoire, c'est que seul le premier le peut. Ainsi, il existe une stratégie gagnante pour le joueur qui dépose le premier pion.

Cette démonstration semble départir Hex de tout intérêt. Pensez donc, un jeu où le deuxième joueur n'a jamais sa chance ! Toutefois, montrer l'existence d'une stratégie gagnante ne revient pas à la découvrir. La stratégie que doit appliquer le premier joueur pour gagner n'est connue que pour un losange d'une dimension maximale de 7×7 . À partir de 8×8 , le joueur qui ouvre le jeu sait qu'en principe il peut gagner à coup sûr, mais il ignore comment. Si, malgré cela, le second joueur trouve cette dissymétrie injuste, il est toujours possible de parfaire Hex en ajoutant une règle : après le premier coup, le deuxième joueur peut décider de remplacer le premier pion par l'un des siens au lieu d'occuper une cellule libre. De cette façon, le premier joueur a à déposer un pion sur le jeu ne sait pas d'avance s'il conservera son avantage théorique.

Analyser à fond Hex occuperait ces colonnes pendant cinq ans. Aussi, vais-je me limiter à deux aspects supplémentaires. Le premier est qu'il n'est pas nécessaire qu'une cellule soit occupée pour qu'elle joue un rôle stratégique. La figure 2a illustre un pont où deux pions bleus, qui ne se touchent pas, sont séparés par deux cellules vides. Aussi longtemps qu'aucune des cellules intermédiaires n'est occupée par un pion rouge, les pions bleus sont déjà quasiment reliés. En effet, si le joueur qui joue les rouges fait une tentative et occupe une des deux cases vides intermédiaires, son adversaire n'a qu'à occuper l'autre pour établir la liaison. Les joueurs d'Hex essaient souvent de construire de tels ponts. Ces derniers n'ont pourtant rien d'imparable. Un pont bleu, par exemple, peut être défait si les rouges parviennent à occuper l'une quelconque des cellules intermédiaires par un coup qui déclenche dans le même temps une menace, contre laquelle les bleus devront impérativement réagir. Le mieux est donc d'empêcher votre adversaire de construire trop de ponts.

De surcroît, on doit avoir bien compris que la solidité d'une chaîne se mesure à celle de son maillon le plus faible. Que faire si votre adversaire peut s'attaquer à votre chaîne avec de grandes chances de succès ? Le plus habile est de renforcer le maillon le plus faible ou d'attaquer l'une des chaînes de votre adversaire. Soyez astucieux et dissimulez vos intentions en vous rapprochant insidieusement du maillon faible de la chaîne de votre adversaire.

Une tactique plus compliquée met en jeu la construction d'échelles, lesquelles



2. La tactique de base au jeu d'Hex consiste à bâtir un pont, c'est-à-dire à disposer d'un bord à l'autre une succession de pions dans une série de cases non adjacentes (A). Plus élaborées sont les constructions d'échelles (B). Dans l'exemple illustré en figure C, le joueur des rouges gagne. Finalement, deux problèmes sont proposés aux lecteurs dans les figures C et D. Le tour est aux rouges. Quel coup leur garantit la victoire ?

se forment lorsque l'un des joueurs tente de créer une connexion à proximité de l'un des côtés. La figure 2b montre un départ d'échelle, alors que c'est aux bleus de jouer. Les bleus n'ont aucune autre option que celle qui consiste à jouer la cellule *p*, sinon, les rouges gagnent. Les rouges jouent alors *q*. Si les bleus continuent à tenter d'établir une connexion vers le côté (bleu), les rouges ne peuvent que les bloquer. Deux lignes (une bleue et une rouge) se dessinent parallèlement au bord bleu. Ce faisant, ils progressent vers le bord rouge opposé, et les rouges finissent par gagner. Cet exemple illustre pourquoi on doit anticiper la formation des échelles afin de les bloquer dès qu'elles commencent. Ainsi, si les bleus avaient placé un pion près du bord plus tôt dans le jeu, ils auraient automatiquement gagné la confrontation.

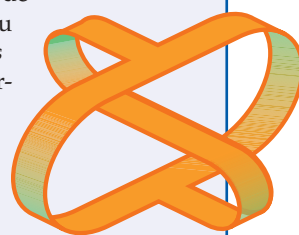
On peut citer d'autres variations sur le jeu d'Hex. La variante en Y, par

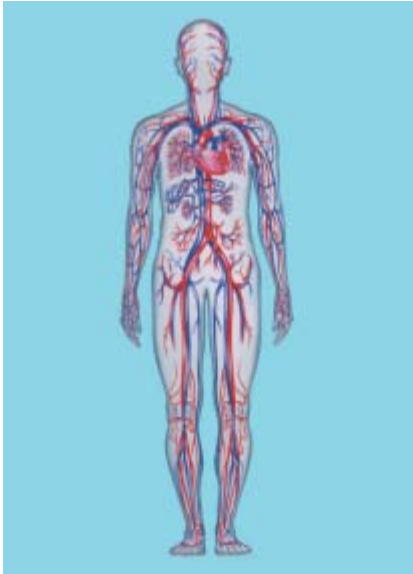
exemple, se joue sur un jeu qui a une forme triangulaire, et l'on doit alors relier les trois côtés par une même chaîne. Comme dans le cas du jeu de base (losange 11×11), on ne connaît de stratégie gagnante que pour les jeux n'ayant qu'un petit nombre de cases. Hex peut aussi se jouer sur une sphère pavée d'hexagones et de pentagones (voir la figure 1) ; le gagnant est le premier joueur qui parvient à entourer d'une chaîne une ou plusieurs cellules (vides ou occupées par l'adversaire).

Pour finir, j'ai préparé deux problèmes pour les lecteurs qui veulent poursuivre leur découverte du jeu d'Hex. Le premier est illustré sur la figure 2c ; il provient de l'article original de Hein sur le jeu. Il consiste à trouver quelle case les rouges doivent jouer pour s'assurer la victoire. Si c'est trop facile, en voici un autre (voir la figure 2d) : quel coup est gagnant pour les rouges ?

Réactions

L'article du mois de mai de cette rubrique présentait une élégante surface à seulement un côté et une face, que Monsieur Josiah Manning, de la ville d'Aurora, dans le Montana, m'avait envoyée. Je vous avais demandé si cette surface était topologiquement équivalente à celle d'un ruban de Möbius. André Gramain, de l'Université de Tours, a répondu que le problème est résolu dans son livre *Topology of Surfaces* (BCS Associates, Moscow, Idaho, 1984). Il explique que la surface présentée par Manning est topologiquement équivalente à une bouteille de Klein avec un trou. Pour sa part, un ruban de Möbius est équivalent à un plan projectif avec un trou. La bouteille de Klein et le ruban de Möbius n'étant pas équivalents, les deux surfaces sont topologiquement distinctes.





Des ondes dans les artères

ROLAND LEHOUCQ • JEAN-MICHEL COURTY

L'étude de la façon dont les ondes se propagent dans un tuyau souple révèle l'importance de l'élasticité artérielle.

Le sang est avant tout un liquide qui se déplace dans un tuyau, et le pouls un onde qui s'y propage. Pour schématiser ce point de vue de physicien, il a l'intérêt de révéler les grandes contraintes que subit le système cardio-vasculaire. Les risques que signifie le vieillissement des artères deviennent alors plus clairs.

UN RÉSEAU COMPLEXE

Le système vasculaire d'un adulte est un réseau de tubes dans lesquels circulent environ cinq litres de sang. Envoyé dans les artères, le sang traverse les vaisseaux capillaires avant de revenir au cœur par les veines. Les capillaires irriguent les organes; ils sont donc fins et nombreux, d'un diamètre compris entre 5 et 10 micromètres. L'écoulement d'un liquide visqueux à travers des tubes aussi petits ne se fait pas sans résistance. Pour que le sang circule quand même, la pression à l'entrée des capillaires – la pression artérielle – doit

être supérieure à la pression à la sortie des capillaires – la pression veineuse.

C'est la pompe cardiaque qui assure cette différence. Le cycle qu'elle suit alterne des phases pendant lesquelles le débit sortant est nul (le cœur se gonfle), et des phases pendant lesquelles le débit est maximal (le cœur se contracte). Le liquide vital ne circule donc pas en continu : il est remis en mouvement à chaque pulsation, de sorte que la pression artérielle, elle aussi, suit des variations périodiques. Elle augmente lorsque le cœur se contracte et diminue quand il se gonfle.

Pour nous aider à étudier la circulation du sang, examinons au préalable une situation plus simple : la mise en mouvement d'un fluide au repos dans un tube rigide. Le contenu d'une canalisation domestique, par exemple, ne se met pas en mouvement instantanément. L'ouverture d'un robinet se ressent avec retard à une extrémité éloignée, parce qu'une onde de pression doit d'abord se propager. Tout comme le son, cette onde est

une onde de pression longitudinale, qui transmet de proche en proche les modifications de pression.

LE COUP DE BÉLIER

Un phénomène souvent observé met en évidence plusieurs des propriétés des ondes longitudinales de pression. Avez-vous déjà lutté contre la manette d'un vieux robinet grippé? La main veut lui imprimer un mouvement de rotation, auquel elle résiste, avant de céder brusquement. Nous ressentons alors un choc dans le bras. Un bruit se fait entendre, saccadé, comme si quelqu'un tapait au marteau quelque part sur la canalisation. Que s'est-il passé? Âgé, donc desséché, le joint en caoutchouc s'est raidi, de sorte qu'il se décolle d'un seul coup à l'ouverture du robinet. L'eau se met alors à couler et nous ressentons un choc : «le coup de bélier». L'écoulement soudain d'un liquide crée une dépression, laquelle se propage dans le réseau sous la forme d'une onde de choc, qui va jusqu'à un endroit où elle se réfléchit (coude, jonction entre tuyaux, etc.) Ces réflexions se font en cascade, c'est-à-dire que l'onde réfléchie revient au robinet, rencontre le joint, le recolte, ce qui provoque un nouveau choc, etc. Il en résulte un bruit répété. Dans certaines conditions, par exemple lorsque le robinet est entrouvert, sa fermeture engendre une nouvelle onde, dont l'existence se traduit par l'émission d'une succession de coups sourds ou d'un son grinçant. Toutes ces péripéties contrastent avec la facilité qui accompagne l'ouverture d'un robinet neuf. La souplesse du joint assure une variation de pression progressive, laquelle évite tout choc.

Lors de la propagation, la variation de pression due à l'onde est égale au produit de la vitesse de déplacement du fluide par la racine carrée du rapport entre la masse volumique et la compressibilité



Dessins de Bruno Vacaro

Avez-vous déjà ouvert un robinet grippé? Vous forcez, puis brusquement il cède. Une bruyante onde de choc se propage alors dans la canalisation et dans votre bras : le coup de bélier.