

8



Le bouquet contient aussi cinq espèces d'iridacées : un très petit crocus (8), différent de celui dont on extrait le safran, près du vase ; un glaïeul charmé mêlé au lis de la vierge, et trois iris bleutés, dont deux *Iris germanica* à larges pétales et un, dit de Hollande (9), beaucoup plus fin (à droite de la tige de la couronne

impériale), ainsi qu'un iris à petites fleurs panachées, peut-être une forme cultivée d'*Iris tuberosa*.

Comment Bruegel aurait-il pu oublier les tulipes, les fleurs à la mode ? L'histoire mouvementée de ces fleurs, dont le nom vient du persan *tulipan* qui signifie turban, commence à l'aube du XVII^e siècle, au moment où est peint le tableau. En 1554, Augier Ghislain de Busbecq, ambassadeur des Habsbourg à Constantinople, envoie quelques bulbes des fleurs favorites du sultan Soliman le Magnifique au directeur du jardin impérial de Vienne, Charles de L'Écluse. Celui-ci introduit en Hollande ces fleurs qu'il acclimata au pays. En peu de temps, les tulipes deviennent la coqueluche de l'aristocratie locale et, en 1630, mènent certains spéculateurs à jouer sur le cours des oignons de tulipe et à s'y ruiner. Au moins huit formes horticoles – aucune sauvage – trônent dans le vase. Les horticulteurs avaient déjà amélioré les espèces et obtenu de nouvelles variétés. L'une est bicolore (jaune et rouge) au centre du bouquet (10) : cette race est souvent nommée tulipe de Rembrandt, car elle apparaît régulièrement dans les toiles du maître hollandais. On sait aujourd'hui que cette propriété est due à un virus, celui de la mosaïque. Une autre, à gauche de la précédente, a des pétales un peu dentés : elle préfigure les futures tulipes dites «perroquets» que l'on cultive aujourd'hui.

Une belle diversité caractérise aussi les jonquilles (Amaryllidacées) : des narcisses à bouquets, jaunes ou blancs ; des jeannettes blanches ou jaunes (11) et peut-être aussi une petite espèce dite trompette de méduse. Quelques rameaux complètent le bouquet : au centre à gauche, une «boule de neige» (*Viburnum opulus*), en bas à droite, une branche de mûrier noir (*Morus nigra*) en fruit et un agrume à fleurs blanches du genre *Citrus*, peut-être un oranger.

Au pied du vase, à gauche, la seule plante dont on aperçoit un organe souterrain (12) est un cyclamen (Primulacées) : le tubercule aplati ainsi que les marbrures caractéristiques des feuilles indiquent un cyclamen printanier du groupe *Cyclamen repandum*, plutôt qu'un cyclamen d'Europe, à tubercules plus petits et sphériques, ou qu'un cyclamen à feuilles de lierre. Ces derniers, automnaux, contrasteraient avec le reste du bouquet, principalement printanier, à l'exception du mûrier en fruits.

Parmi les fleurs tombées sur la table, on identifie une pervenche, de la bourrache,



9

10



11

12



une rose en boutons et un petit brin de romarin dont un rameau pend du bouquet.

Si les grandes fleurs sont assez aisées à identifier, il en va autrement de l'entrelacs des fleurettes. Ce bouquet est plus riche que d'autres comparables, tels les bouquets de Bruegel «en vase d'argile» et «en vase de verre».

Dans cette masse foisonnante, le bleu est celui, de droite à gauche, d'une bourrache officinale, d'une scille, d'une nigelle de Damas (13) *flore pleno* d'allure ébouriffée, de fines tiges pendantes de myosotis, d'une pervenche vue de face et d'une autre vue de côté.

Le blanc est celui des fleurs du fraisier, des cyclamens, d'un œillet double au centre. Ce dernier est surmonté d'une fleurette blanche, à corolle penchée, qui illustre les deux types de tépales (les tépales sont des sépales ressemblant à des pétales) : c'est l'une des fleurs les plus précoces du bouquet, le perce-neige (*Galanthus nivalis*) dont la famille botanique, les Amaryllidacées, est aussi représentée par plusieurs

nivéoles (14). Les clochettes les plus visibles de ces fleurs sont entre la tulipe rouge et la tulipe bicolore, au bas de la tige de la grande fritillaire.

Les fleurs rouges ou roses sont aussi diverses : à droite, une fleur parfois affiliée aux coquelicots, cependant l'absence de tâches noires à la base des pétales atteste plutôt une anémone double.

De la même famille, bien que l'on n'en distingue pas le fin feuillage, des gouttes-de-sang (*Adonis annuels*) déploient leurs petites corolles rouge sombre, en bas à gauche (15). En trois endroits, et notamment à gauche de la tige de la fritillaire centrale, on remarque les nombreuses corolles à cinq pétales vermillon des croix de Jérusalem (*Lychnis chalcidonica*) qui auraient inspiré la croix de l'ordre des Chevaliers de Malte.

En jaune et en orange, on reconnaît les capitules de composées – des soucis doubles ou des œillets d'Inde –, les petites corolles vives des boutons d'or, une fleur pompon d'une espèce cultivée de renoncule d'Asie. Sur le bord du vase, de nombreuses petites pensées étalent leurs trois pétales basaux jaunes. Enfin, au centre, une sphère jaune est entourée de bractées vertes : il s'agit de l'hellébore d'hiver (16) qui fleurit, dès janvier, avec les perce-neige.

Nous l'avons remarqué, ce magnifique bouquet ne peut être le fait d'une cueillette de fleurs dans la nature.

Plus encore, il est difficile d'imaginer un montage à un instant précis, même à l'aide des premières orangeries qui protégeaient les plantes durant l'hiver : la floraison, entre autres, des perce-neige, des fritillaires, des pivoines et des rosiers, ainsi que la présence de fraises mûres montrent qu'il s'agit plutôt d'une œuvre de longue haleine. Bruegel avait une bonne mémoire, ou il a inséré les fleurs de sa composition au gré des saisons.

15



16



Gérard-Guy AYMONIN est botaniste au Laboratoire de phanérogamie du Muséum national d'histoire naturelle.



Ce qui est faux... peut être utile

JEAN-PAUL DELAHAYE

La variété des erreurs commises éclaire la nature du travail mathématique : *Errare mathematicum est.*

Les principes du raisonnement par syllogisme énoncés par Aristote il y a 20 siècles nous enseignent que l'homme est faillible (*Errare humanum est*) et que le mathématicien étant un homme, il est nécessairement faillible.

Pourtant en consultant l'index de livres d'histoire des mathématiques, j'ai constaté que le mot « erreur » y était toujours absent. Les historiens des mathématiques tentent-ils de masquer les innombrables cas d'erreurs, graves ou bénignes, qui les empêchent de concevoir le développement des mathématiques comme une avancée régulière produisant une accumulation continue de vérités garanties.

Sans doute, plus simplement, l'histoire ne retient que ce qui est juste et engloûtait dans l'oubli toutes les démarches infructueuses, les preuves erronées, les prétentions ridicules et infondées dont l'existence même finit par être niée.

Pourtant, combien de fausses démonstrations du grand théorème de Fermat avant qu'enfin une preuve complète en soit proposée il y a six ans ! Combien de prétendues quadratures du cercle jetées au panier avant que Ferdinand Lindemann établisse de manière irréfutable, en 1882, qu'aucune construction ne conviendra jamais ! Combien de prétendues solutions envoyées aux académies par des passionnés souvent mal informés pour chacune des conjectures célèbres (Goldbach, Syracuse, Riemann, nombres parfaits impairs, $P \neq NP$, etc.) et que l'examen attentif révèle inopérantes !

S'il est vrai que les amateurs sont les champions des arguments inexacts, il serait naïf de croire que les erreurs sont uniquement le fait des incompetents : les plus grands mathématiciens commettent des fautes dans leurs travaux, et ne les voient parfois que tardivement après avoir clamé partout victoire. Il arrive même qu'ils ne voient pas leurs erreurs et c'est seulement lorsqu'un collègue s'interroge sur un point qui semblait aller de soi qu'ils découvrent la faille qui, selon les cas, est répa-

vable ou ne l'est pas. Les mathématiques contrairement à l'image populaire ne sont pas cette science de la précision absolue qui assure au professionnel consciencieux de ne jamais se tromper. Les volumineuses colonnes d'errata des livres de mathématiques en témoignent.

Tous les mathématiciens chercheurs ont d'ailleurs connu la désagréable expérience du résultat remarquable qu'ils viennent de prouver et qui s'effondre douloureusement à l'issue d'une série d'étapes implacables vécues comme un cauchemar. Un point « évident » de la démonstration qu'on avait pourtant pris le soin de rédiger minutieusement devient suspect. Quelque temps plus tard, après examen, le point soulevé apparaît douteux. Enfin, il se révèle irrémédiablement incorrect. Ensuite – et c'est le pire – vient parfois la découverte qu'il est impossible de contourner la difficulté et de réparer la brèche ouverte par la maudite question, et cela malgré toute l'énergie et le temps qu'on y consacre. Cet écroulement de l'édifice qu'on avait amoureux-ement construit durant des jours entiers est une déconvenue traumatisante seule comparable à celle que ressent le joueur de loto qui venant toucher le gros lot s'aperçoit que son billet porte le bon numéro... au détail près qu'il a confondu un 1 avec un 7 et qu'il n'a rien gagné du tout.

Toute l'histoire des mathématiques est semée d'épisodes où l'erreur joue un rôle. Parfois ce rôle est anecdotique et, une fois repérée et corrigée, l'erreur ne laisse plus de trace. Parfois, en revanche, l'erreur est centrale parce qu'elle oblige à reformuler une idée ou un théorème qui changent tout. Alors l'erreur est constructive et amène une avancée importante.

Les quelques exemples que nous allons évoquer ne représentent que la partie immergée de l'iceberg de l'erreur mathématique, erreur que la communauté s'efforce avec application de masquer, offrant au public une image nette et impeccable qui ne correspond pas à la réalité.

IL SUFFIT DE FAIRE LE CALCUL...

L'Antiquité est l'époque pendant laquelle la notion de preuve mathématique s'élabore et fluctue (quoique pour l'essentiel les démonstrations qu'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide sont aujourd'hui considérées comme parfaitement rigoureuses). Aussi nous commencerons nos exemples bien au-delà, au XVII^e siècle.

Dans le simple domaine du calcul, des erreurs étonnantes ont été perpétrées et se sont transmises parfois durant de longues années. Le père Mersenne affirme en 1644 que $M_p = 2^p - 1$ est un nombre premier pour $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ et composé pour les autres exposants jusqu'à 257. Certes les calculs pour établir la divisibilité sont longs, mais puisqu'ils donnent ces résultats, on imagine que Mersenne a vérifié avec soin ses affirmations. Un siècle plus tard, Leonhard Euler prétend corriger Mersenne et écrit que M_{41} et M_{47} sont des nombres premiers. Il se trompe : aucun des deux nombres M_{41} et M_{47} n'est premier. Cela ne signifie pourtant pas que la liste de Mersenne est bonne et une première erreur y est trouvée en 1886 (plus de 200 ans après) par I. Persuvin qui établit que M_{61} est premier. Quatre autres erreurs seront découvertes par la suite : M_{67} et M_{257} ne sont pas premiers alors que M_{89} et M_{107} le sont (aujourd'hui ces résultats ont été vérifiés et revérifiés, et aucun doute ne subsiste concernant la bonne liste).

Toujours dans le domaine des nombres premiers, le grand Fermat à qui on doit tant de merveilles arithmétiques a en quelque sorte battu un record, celui de la conjecture la plus fausse possible. Fermat remarque que les nombres de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ (dénommés par la suite nombres de Fermat) sont premiers pour n égal à 1, 2, 3 et 4. Il généralise ensuite en proposant que tout nombre de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ est premier. Euler montrera que $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$, puis en

1. LES PLUS GRANDS MATHÉMATIENS COMMETTENT DES ERREURS

Srinivasa Ramanujan (1887-1920) est considéré comme le plus formidable créateur de formules mathématiques qui ait jamais existé. Il possédait une invraisemblable capacité d'invention pour les résultats complexes et profonds dont en général il ne prenait pas la peine de donner la preuve. En 1913, Ramanujan qui était un employé inconnu et isolé dans son Inde natale, souhaitant prendre contact avec des mathématiciens européens, adressa une lettre à Godfrey Hardy (1877-1947) célèbre mathématicien britannique. Sa lettre contenait 120 énoncés purs, le plus souvent des formules, qu'il avait extrait de ses notes. Certains étaient déjà connus, mais beaucoup étaient nouveaux. Hardy indique que certaines des formules étaient très étonnantes : « Il suffisait d'un coup d'œil pour se rendre compte qu'elles n'avaient pu être écrites que par un mathématicien de tout premier rang : elles étaient sûrement vraies, car personne n'aurait pu avoir assez d'imagination pour les inventer. » Hardy fit venir Ramanujan en Angleterre où, en 1917, il devint membre de la *Royal Society*. Pourtant, comme Hardy le fait remarquer, certaines des formules de la lettre de 1913 sont fausses (la formule (1.14) par exemple). D'après Hardy, elles « montrent les limites de Ramanujan, mais en même temps constituent un signe de plus de ses dons extraordinaires ». Ailleurs, à propos de l'échec de Ramanujan en théorie des nombres où il commit de nombreuses erreurs, Hardy indique que « cet échec était plus important que n'importe lequel de ses triomphes ».

Jacques Herbrand, un des plus profonds logiciens français, mourut en 1931 lors d'un accident de montagne dans le massif du Pelvoux. Il était âgé de 23 ans, mais sa thèse contenait un résultat fondamental qui fit le tour du monde et qu'on appelle aujourd'hui théorème de Herbrand (ce résultat indique que si un ensemble de formules peut être rendu vrai par un ensemble d'objets, alors il existe une façon systématique de construire un tel ensemble d'objets). Le logicien Paul Bernays considérait ce théorème comme le « théorème central de la logique des prédicats ». Kurt Gödel dès 1943, dans des notes personnelles, remarqua que les preuves de Herbrand étaient fausses. Ce n'est cependant qu'en 1963 que B. Dreben, P. Andrews et S. Aanderaa publièrent un article dans *les Proceedings of the American Mathematical Society* intitulé « False lemmas in Herbrand ». Ils y indiquaient que certains lemmes utilisés par Herbrand étaient irrémédiablement faux, et donc la preuve de son théorème était erronée. Heureusement ils proposaient de remplacer les lemmes fautifs par d'autres (plus compliqués) qui permettaient d'arriver au fameux résultat qui pendant plus de 30 ans avait donc été considéré comme juste sans être vraiment démontré : les mathématiques l'avaient échappé belle ! Notons que l'importance du résultat des travaux consignés dans la thèse de Herbrand est telle que celle-ci a été éditée intégralement en 1968 aux *Presses universitaires de France* avec les erreurs originales juste signalées dans la préface qui fournit même des contre-exemples !

Hans Rademaker, de l'Université de Pennsylvanie, pensa un moment avoir démontré l'hypothèse de Riemann (qui concerne la répartition des nombres premiers et est considérée par de nombreux mathématiciens comme la plus grande énigme mathématique actuelle). Il le fit savoir et eut alors droit à divers articles dans la presse dont un dans le prestigieux *Times*... avant qu'on découvre une erreur irrattrapable dans son raisonnement. Aujourd'hui, on attend toujours une preuve de ce qui reste donc l'hypothèse de Riemann.

Le théorème des quatre couleurs indique qu'avec quatre couleurs on peut toujours colorier les pays d'une carte géographique sans que deux voisins portent des couleurs identiques. Ce résultat conjecturé en 1852 par Francis Guthrie ne fut démontré qu'en juin 1976 par Kenneth Appel et Wolfgang Haken à l'aide d'un calcul par ordinateur. Le fait que la démonstration repose sur des calculs informatiques (vérifiés récemment) est remarquable comme l'est le fait que la démonstration de 1976 s'appuie sur des idées qui furent introduites par des mathématiciens ayant proposé des solutions... erronées. La première d'entre elles fut publiée par A. Kempe en 1878 et fut considérée exacte pendant 11 ans, date à laquelle P. Heawood pointa une erreur irrattrapable. En 1880, P. Tait prouva à son tour la conjecture qui fut donc considérée comme résolue jusqu'en 1891, date à laquelle J. Petersen identifia une erreur là encore impossible à corriger. Il n'en reste pas moins que c'est à partir de ces preuves initiales fausses que les méthodes qui conduisirent à la démonstration de 1976 furent élaborées, ce qui prouve une fois encore que disposer d'une preuve, même fausse, est parfois mieux que de ne pas avoir de preuve du tout.



$$(1.5) \int_0^{\infty} \frac{1 + \left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a+1}\right)^2} \dots dx = \frac{1}{2} \pi^2 \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2}) \Gamma(b+1) \Gamma(b-a + \frac{1}{2})}{\Gamma(a) \Gamma(b + \frac{1}{2}) \Gamma(b-a+1)}$$

$$(1.6) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\dots} = \frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^5+\dots)}$$

(1.7)* Si $\alpha\beta = \pi^2$, on a

$$\alpha^{-1} \left(1 + 4\alpha \int_0^{\infty} \frac{x e^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx \right) = \beta^{-1} \left(1 + 4\beta \int_0^{\infty} \frac{x e^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx \right).$$

$$(1.8)* \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\alpha + \alpha + 2\alpha + \alpha + 2\alpha + \dots}$$

$$(1.9)* 4 \int_0^{\infty} \frac{x e^{-\alpha x^2}}{\cosh x} dx = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

$$(1.10)* \text{ Si } u = \frac{x}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}, v = \frac{x^2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}},$$

$$\text{ alors } v^2 = u \frac{1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4}{1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4}.$$

$$(1.11)* \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} e^{-2x} = \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) e^{4x}.$$

$$(1.12)* \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} \frac{e^{-2x\sqrt{5}} e^{-4x\sqrt{5}}}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} = \left[\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^4 - 1} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right] e^{2x\sqrt{5}}.$$

$$(1.13) \text{ si } F(k) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k k + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^k k^2 + \dots \text{ et } F(1-k) = \sqrt{(210) F(k)},$$

alors

$$k = (\sqrt{2} - 1)^4 (2 - \sqrt{3})^3 (\sqrt{7} - \sqrt{6})^4 (8 - 3\sqrt{7})^3 (\sqrt{10} - 3)^4 \\ \times (4 - \sqrt{15})^4 (\sqrt{15} - \sqrt{14})^3 (6 - \sqrt{35})^3.$$

(1.14) Le coefficient de x^n dans $(1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 \dots)^{-1}$ est l'entier le plus proche de

$$\frac{1}{4n} \left(\cosh \pi \sqrt{n} - \frac{\sinh \pi \sqrt{n}}{\pi \sqrt{n}} \right).$$

2. LE LAISSER-ALLER TUE UNE ÉCOLE MATHÉMATIQUE

Jamais en mathématiques on ne peut baisser sa garde, car alors l'erreur fond sur vous et vous fait perdre tout crédit. L'école de géométrie algébrique italienne (dont on avait fini par penser qu'elle fournissait simultanément une démonstration d'un résultat et un contre-exemple) est un cas étonnant d'abandon fatal de la rigueur. Le mathématicien David Mumford explique cette histoire étrange :

«Il existe des exemples d'erreurs mathématiques graves du type suivant : une école de mathématiques se détourne du droit chemin, et après avoir donné des preuves rigoureuses se laisse lentement gagner par de mauvaises habitudes, jusqu'à ce que des faussetés évidentes soient publiées. Bien sûr, le reste du monde, après s'être laissé abuser, devient progressivement méfiant, puis finalement met le doigt sur des erreurs dans les textes imprimés par les membres de l'école. Le cas le plus connu de cette situation est celui de l'école italienne de géométrie algébrique, qui produisit d'excellents et profonds résultats pendant 50 ans, mais s'effondra ensuite. Trois noms clefs doivent être cités : Castelnuovo, Enriques et Severi. Castelnuovo le plus ancien était un splendide mathématicien parfaitement rigoureux. Enriques qui vient après lui, autant que je le sache, ne publia jamais rien de faux, quoiqu'il reconnaissait que certaines de ses démonstrations ne traitaient pas vraiment tous les cas possibles. Il avait ses propres critères, mais acceptait volontiers de réexaminer une "démonstration" et de la rendre plus complète. Malheureusement Severi, le troisième, qui était fasciste et possédait un tempérament autoritaire, tua finalement l'école entière, car bien qu'ayant débuté par une série de découvertes brillantes et correctes, il publia dans les années 1930 et 1940 des livres remplis d'erreurs. Le reste du monde devint hésitant sur ce qui avait été vraiment prouvé par toute cette école. Il fallut les efforts de deux grands hommes, Zariski et Weil, pour remettre les choses en ordre.»

1880, le mathématicien Landry montrera que $F_6 = 274177 \times 67280421310721$. On sait aujourd'hui que, de F_5 à F_{30} , tous les F_n sont composés et on conjecture que tous les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ sont composés, sauf les quatre premiers !

Ces erreurs ne sont pas très instructives : une fois repérées, rien n'en découle. Ce n'est pas le cas de celle commise à propos du «petit théorème de Fermat». Ce résultat, énoncé par Fermat en 1640 et démontré par Euler en 1736, indique que si p est un nombre premier, alors pour tout nombre entier a supérieur à 1, le nombre $a^p - a$ est un multiple de p . Ainsi, en particulier, si p est premier, $2^p - 2$ est un multiple de p . Cette affirmation ne doit pas être confondue avec l'affirmation inverse qui est fausse : si $2^p - 2$ est un multiple de p , alors p est premier. Fermat ne commit pas la confusion, pourtant tentante. En effet, les nombres qui font exception, c'est-à-dire qui vérifient que $2^p - 2$ est un multiple de p alors qu'ils sont composés (on les appelle 2-pseudo-premiers) sont très rares. Le plus petit est $341 = 11 \times 13$. En choisissant au hasard un nombre n inférieur à 25 milliards, on constate : (a) que $2^n - 2$ n'est pas multiple de n dans 95,64 pour cent des cas (on sait alors avec certitude qu'il est composé) ; (b) que $2^n - 2$ est multiple de n dans 4,36 pour cent des cas et alors n est un nombre premier dans 99,998 pour cent des cas. Pour un nombre inférieur à 25 milliards, le risque d'établir un diagnostic faux à partir de la croyance (erronée) que « n est premier si et seulement si $2^n - 2$ est multiple de

n » est inférieur à 0,00009 pour cent. La croyance erronée tendait les bras et, en 1886, le mathématicien chinois Li Shan-Lan (1811-1882) a publié ce faux critère. Le plus remarquable est qu'aujourd'hui cette croyance fautive (un peu améliorée pour l'être moins souvent encore) sert de base aux algorithmes probabilistes de test de primalité qui sont utilisés systématiquement en cryptographie. Personne ne commet vraiment d'erreur, cependant c'est bien de la fausse caractérisation qu'est née l'idée des algorithmes probabilistes, si importante aujourd'hui. De l'erreur (contrôlée et consciente), on a tiré une méthode importante et utile.

LES FAUSSES DÉCIMALES DU NOMBRE π

Avant l'ère des ordinateurs, quelques problèmes de calculs ont excité les passions et ont été l'occasion d'erreurs à répétition. Ainsi le calcul à la main des décimales de π a donné lieu à une multitude d'erreurs, dont la plus célèbre laisse des marques aujourd'hui encore.

William Shanks (1812-1882) publie 707 décimales de π en 1874. Au total, il a passé 20 ans de sa vie à mener ce calcul et heureusement... n'a jamais su qu'il était faux à partir de la 527^e décimale. Pendant plus de 50 ans d'ailleurs tout le monde fit confiance au calcul de Shanks. C'est seulement en 1945 que D. Ferguson, travaillant comme Shanks uniquement avec du papier et des crayons, recalcule 539 décimales de π et constate un désaccord avec le calcul de son pré-

décesseur. Le désaccord sera confirmé plus tard, par d'autres calculs utilisant cette fois des machines. Les chiffres faux de Shanks furent utilisés en 1937 pour l'aménagement du Palais de la découverte à Paris. La salle π du Palais vit son plafond décoré par les décimales de Shanks. Les fausses décimales de π restèrent jusqu'en 1949 date à laquelle les bons chiffres furent mis en place. On pourrait croire que depuis les fausses décimales de Shanks ont été oubliées. Ce n'est pas le cas : l'éditeur français Hermann en 2001 vend toujours le merveilleux livre de François Le Lionnais *Les grands courants de la pensée mathématique*, livre qui, page 99, reproduit sans indiquer qu'elles sont fausses, les 707 décimales de Shanks. Ne les apprenez pas par cœur !

L'erreur de Shanks est sans importance matérielle puisque l'on sait bien qu'en physique 40 décimales de π seront toujours suffisantes. Il n'empêche que suite aux erreurs répétées dans la course aux décimales de π (aujourd'hui on en connaît 206 milliards), les règles du jeu sont maintenant qu'un calcul doit être réalisé deux fois par deux méthodes différentes pour être pris en considération. Ici l'erreur a incité à la prudence.

LES MATHÉMATIQUES ERRONÉES DU JEU

Les erreurs mathématiques ne sont pas toujours aussi indolores. On raconte que le Chevalier de Méré (1607-1684), qui était philosophe et curieux des sciences, possédait un goût prononcé pour les jeux de hasard. Il recherchait des règles astucieuses et en tirait des paris qu'il proposait à tous. L'une des règles qu'il inventa consiste à faire rouler quatre dés et à parier à un contre un sur l'apparition d'au moins un 6. La probabilité de perdre est $(5/6)^4 = 625/1296$, soit 48,225 pour cent, ce qui donne donc un léger avantage à celui qui propose le jeu et l'assurance à la longue de gagner... beaucoup d'argent. Méré inventa une autre règle : lancer deux dés 24 fois de suite et parier que le double 6 apparaîtra au moins une fois. Cette fois, le calcul, que nous savons faire aujourd'hui, donne que la probabilité de perdre pour celui qui offre le pari, est $(35/36)^{24} = 50,859$ pour cent (pour que l'avantage soit à celui qui propose le pari, il faudrait changer le 24 en 25). Le Chevalier était donc condamné à la longue à perdre de l'argent avec ce second jeu.

La légende veut que le Chevalier de Méré après avoir gagné une fortune grâce au premier jeu, la perdit en pratiquant le second. Cette erreur d'appréciation et quelques autres du même type eurent des conséquences plus importantes que celles, pécuniaires, que subit le Cheva-

lier de Méré, car elles amenèrent la théorie des probabilités qui naquit, à cette époque, des échanges épistolaires entre Pascal, Fermat et Roberval.

Contrairement aux autres domaines des mathématiques où le plus souvent se tromper ne coûte rien, les erreurs dans le domaine de la combinatoire probabiliste ont des conséquences graves pour celui qui les commet : comme Méré l'a compris à ses dépens, les mathématiques sont parfois une science très concrète ! Aujourd'hui, pour élaborer les tableaux des primes de leurs contrats, les compagnies d'assurances sont encore grandes utilisatrices de la théorie des probabilités (et même de ses aspects les plus subtils) et elles aussi doivent éviter à tout prix les erreurs pour rester à flot.

POINCARÉ S'ACQUITTE DE SON ERREUR

L'erreur mathématique peut ruiner son auteur pour d'autres raisons. On m'a raconté qu'une université américaine avait engagé des poursuites contre l'un de ses enseignants mathématiciens qui avait commis une erreur dans une démonstration faite devant les étudiants. Je ne sais pas si l'histoire est vraie et ce qu'il en a réellement coûté au professeur fautif, mais ce n'est pas la première fois qu'un mathématicien doit payer de sa poche une erreur pour un théorème que pourtant il n'a pas même essayé d'appliquer.

En janvier 1889, les quotidiens parisiens annoncent avec fierté que le jeune mathématicien français Henri Poincaré vient de remporter le prix international de mathématiques que le roi de Suède Oscar II avait organisé pour son soixantième anniversaire. Le prix consiste en une médaille d'or d'une valeur de 1 000 francs accompagnée d'une somme de 2 500 couronnes. Charles Hermite, dans une lettre à Mittag-Leffler qui était chargé de l'organisation du prix, indique que « dans ce travail comme dans presque toutes ses recherches, M. Poincaré montre la voie et donne des indications, mais laisse considérablement à faire pour combler les lacunes ». Pire, quelques mois plus tard, le mathématicien Edward Phragmén, qui devait préparer le manuscrit de Poincaré, découvre des passages gênants dont Poincaré réalise qu'ils remettent en question l'ensemble même du mémoire pour lequel il a remporté le prix du roi Oscar.

Poincaré avait gagné un prix pour un mémoire fautif ! Mittag-Leffler reprit possession des exemplaires imprimés du mémoire et demanda à Poincaré d'en rembourser les frais d'impression. La somme que Poincaré payait ainsi dépassait de 1 000 couronnes le prix qu'il avait reçu... Poincaré retravailla soigneusement son

mémoire, le modifiant, le réorganisant et le complétant. La version finalement publiée en novembre 1890 avait pris sensiblement du volume mais, et c'est là tout le charme de l'histoire, constitue un des textes les plus importants des mathématiques modernes : Poincaré, à propos du *Problème des trois corps*, introduit des idées et des méthodes qui fondent la théorie des systèmes dynamiques chaotiques et mettent en évidence que le déterminisme ne garantit pas la prédictibilité.

Après quelques péripéties, sans doute douloureuses, et, même si cela l'avait plutôt appauvri, Poincaré avait, en fin de

compte, largement mérité son prix : l'erreur de Poincaré fut donc fructueuse. Cette édifiante histoire n'est pas le seul cas d'erreur mathématique cruciale : un peu plus tôt, au XIX^e siècle, une autre faute commise par un grand mathématicien avait déjà été à l'origine de progrès et d'éclaircissements en analyse.

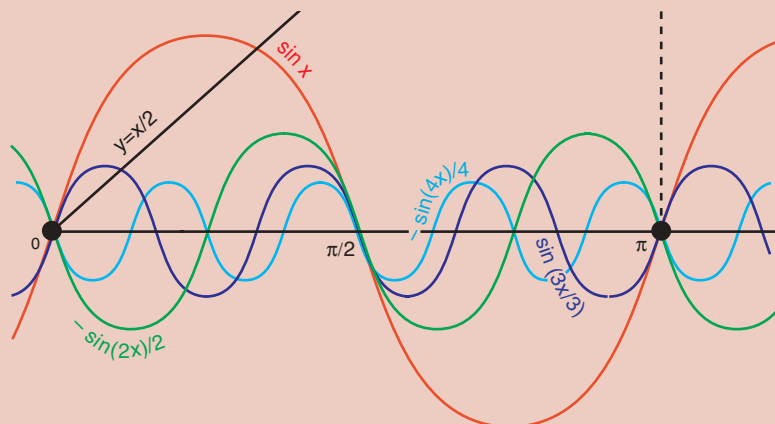
MÊME LE PLUS RIGOUREUX...

Cette erreur fut commise par un des plus grands mathématiciens du XIX^e siècle, Augustin Cauchy (1789-1857), et dans l'un

3. LA CONVERGENCE UNIFORME

Dans son *Cours d'analyse algébrique* de 1821, Louis Augustin Cauchy (1789-1857) affirme et « démontre » que la somme d'une série de fonctions continues est continue. Dans une lettre de 1826, Abel propose à Cauchy le contre-exemple :

$$\sin(x) - \sin(2x)/2 + \sin(3x)/3 - \sin(4x)/4 + \dots$$



La somme de cette série est la fonction qui vaut $x/2$ pour $0 \leq x < \pi$ et 0 en π (cette somme n'est pas continue en π). Bien qu'averti par la lettre d'Abel et bien qu'Abel ait publié son contre-exemple, Cauchy en 1833 répète dans un article son théorème inexact. Chose étrange aussi, dans l'article même où il donne son contre-exemple, Abel énonce à son tour un théorème faux sur la convergence des séries. Nous sommes dans une période de mise au point des concepts...

Le contre-exemple le plus simple montrant qu'une suite de fonctions continues n'a pas nécessairement une limite continue est le suivant :

$f_n(x) = a - nx$ si $0 \leq x \leq a/n$ et $f_n(x) = 0$ si $a/n < x \leq 1$, dont la limite est la fonction f définie par $f(0) = a$ et $f(x) = 0$ pour $0 < x \leq 1$

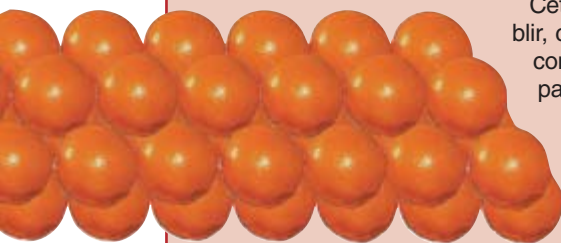


Pour qu'une limite de fonctions continues sur E soit continue, il faut non seulement demander que, en chaque point x de E , $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ (convergence ponctuelle), mais, ce qui est plus fort, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \text{ dans } E} (|f_n(x) - f(x)|) = 0$ (convergence uniforme). L'erreur de Cauchy permet de distinguer entre deux types de convergence pour les fonctions. Elle conduit à un progrès mathématique.

4. LA CONJECTURE DE KEPLER EST-ELLE RÉSOLUE?

La conjecture de Kepler énonce que lorsque vous voulez ranger des sphères, la plus grande densité de rangement est obtenue :

- en composant un réseau triangulaire de sphères sur un même plan ;
- en plaçant sur ce plan un second réseau triangulaire occupant soigneusement un trou sur deux des trous créés par le premier plan ;
- et en recommençant, etc.



Cet énoncé simple est en fait très difficile à établir, car un grand nombre de configurations plus complexes doivent être envisagées et qu'il n'est pas du tout évident que certaines d'entre elles ne sont pas meilleures : toute la difficulté est de proposer un raisonnement qui élimine proprement toutes les autres dispositions.

On considère que la conjecture a été démontrée en 1998 par Thomas Hales de l'Université du Michigan à Ann Harbor. Pour-

tant plusieurs faits troublants liés aux erreurs en mathématiques accompagnent l'histoire de cette démonstration qui pendant un moment encore restera sans doute suspecte. Voici pourquoi.

Un autre mathématicien Wu-Yi Hsiang a prétendu avoir prouvé la conjecture avant T. Hales en 1990. Ce mathématicien n'est pas un amateur puisque W.-Y. Hsiang est titulaire d'un doctorat de l'Université de Princeton et a été professeur à l'Université de Berkeley en Californie, l'une des plus prestigieuses universités des États-Unis. Nous ne sommes pas dans le cas des passionnés aux compétences incertaines qui clament par exemple avoir démontré le théorème de Fermat avant Andrew Wiles et qui refusant de voir que leur preuve est fausse ou incomplète se persuadent qu'ils sont victimes d'une cabale destinée à les déposséder d'un prix et de la gloire que leur génie mérite.

En 1992, l'*Encyclopaedia Britannica* écrivait dans sa mise à jour annuelle que «Sans aucun doute, l'événement mathématique de l'année est la résolution de la conjecture de Kepler par W.-Y. Hsiang.» En 1993, à une réunion de l'*American Mathematical Society*, W.-Y. Hsiang était invité à donner une conférence plénière sur sa démonstration. En 1993, il publiait sa preuve : *On Sphere Packing Problems and the Proof of Kepler Conjecture* dans l'*International Journal of Mathematics*.

On aurait pu croire que l'affaire était réglée. Pourtant des voix s'élevèrent alors pour contester la preuve de W.-Y. Hsiang. Dans la seconde édition de leur livre *Sphere Packing, Lattices and Groups* paru en 1993, J. Conway et N. Sloane qui sont d'éminents mathématiciens spécialistes de ces questions de géométrie indiquent que «des insuffisances persistent dans la preuve de W.-Y. Hsiang, et donc, la question de la conjecture de Kepler ne peut pas être considérée comme réglée». En 1994, un article de T. Hales fut publié par la revue la plus lue par la communauté mathématique *The Mathematical Intelligencer*. Cet article intitulé «Le statut de la conjecture de Kepler» était entièrement consacré à dénoncer les insuffisances de la preuve de W.-Y. Hsiang. L'année suivante, W.-Y. Hsiang publia un article réponse, mais semble-t-il, la communauté des spécialistes était tombée d'accord pour juger sa démonstration définitivement insatisfaisante. Après avoir été acceptée et même acclamée, la démonstration de W.-Y. Hsiang était condamnée, «faute de preuve». Les reproches qu'on lui fait sont graves : dans sa preuve, il admet implicitement certains résultats aussi difficiles à prouver que la conjecture elle-même.

La démonstration proposée finalement par T. Hales en 1998, – qui avait dénoncé les insuffisances de la preuve de W.-Y. Hsiang – est fondée sur des idées assez différentes et a nécessité pour certaines de ses parties l'utilisation d'ordinateurs. Aujourd'hui, malgré l'avis de J. Conway qui a indiqué que «la preuve de T. Hales semblait bonne», certains hésitent à considérer que l'affaire de la conjecture de Kepler est définitivement réglée. Les spécialistes, T. Aste et D. Weaire, affirment prudemment que «d'après la situation en 2000, il apparaît que le crédit de la démonstration de cette conjecture vieille de plusieurs siècles pourrait bien aller à Hales».

Indiquons que la preuve de T. Hales comporte 250 pages et que les logiciels qui l'ont aidé occupent un espace de 3 gigaoctets (soit environ l'équivalent de 3 000 ouvrages de 200 pages). On peut craindre, et même juger certain, que quelque part dans ces logiciels, une erreur au moins se trouve terrée ! Celle-ci ne se reportera pas forcément sur la preuve de T. Hales, mais le risque ne peut être négligé et donc, en attendant des confirmations ou des simplifications qui éviteraient l'utilisation de l'ordinateur, la prudence s'impose.

des plus importants livres qui soit, son cours d'analyse paru en 1826. L'erreur fit naître la notion de convergence uniforme qui joue aujourd'hui un rôle capital dans toute l'analyse. Ce livre prétend, à juste titre, introduire plus de rigueur dans ce domaine en développement accéléré depuis un siècle : «Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie» écrit Cauchy fier d'avoir su mettre un peu d'ordre dans un domaine bouillonnant, mais parfois incertain ; il critique les méthodes de son prédécesseur Lagrange, et admet à regret que les séries divergentes n'ont pas de somme (plus tard, on saura donner un sens à certaines sommes de séries divergentes ; voir l'article de janvier de cette rubrique). Cauchy énonce des règles de convergence des séries et, en particulier, «le critère de Cauchy». Pourtant dans ce monument de l'histoire des mathématiques, Cauchy y démontre, que si une série de fonctions continues est convergente dans le voisinage d'un point, alors sa somme est une fonction continue dans le même voisinage !

Aujourd'hui cette affirmation vaudrait un zéro pointé à un étudiant de mathématiques, car il est faux en général qu'une limite de fonctions continues le soit. Pour que le résultat devienne vrai, il faut introduire la notion de convergence uniforme : ce n'est pas séparément en chaque point du voisinage autour d'un point x que la convergence doit avoir lieu, mais globalement. Le concept d'uniformité avait échappé à Cauchy.

Dès 1826, le mathématicien norvégien Niels Abel (1808-1829) attira l'attention des autres mathématiciens en proposant un contre-exemple au résultat de Cauchy. Remarquons que la découverte de l'erreur de Cauchy ne vint pas de l'étude de la démonstration, mais de la mise à jour d'un contre-exemple. Cela s'explique par l'état immature de la logique de cette époque : la maturité de la logique ne viendra qu'avec le calcul des quantificateurs et l'extension de la logique aristotélicienne, à la fin du XIX^e siècle. Précisément l'erreur était due à une confusion dans l'ordre des quantificateurs : dire «pour tout a , il existe b tel que $b > a$ » n'équivaut pas à dire «il existe un b tel que pour tout a , $b > a$ ». Outre les conséquences sur l'analyse, l'erreur de Cauchy obligea à un approfondissement des concepts logiques.

Cet exemple prouve que, même le mathématicien le plus soucieux de rigueur et le plus compétent, peut, lors de la naissance d'un domaine mathématique nouveau, se prendre les pieds dans le tapis. Ni l'intuition exceptionnelle d'un génie comme Poincaré ni le souci minutieux de rigueur d'un Cauchy, ne suffisent pour éviter la faute mathématique.

UNE ÉPISTÉMOLOGIE DE L'ERREUR

Bien d'autres exemples d'erreurs commises par de grands mathématiciens peuvent être cités, si bien d'ailleurs que certains philosophes des mathématiques ont proposé l'idée que le développement mathématique se fait grâce aux erreurs commises puis corrigées. C'est en effet la thèse soutenue par le philosophe Imre Lakatos, disciple de Karl Popper, dont la position appelée parfois *faillibilisme* peut être résumée ainsi :

- l'erreur est une caractéristique essentielle de la connaissance mathématique qui, contrairement à ce que soutiennent les *infaillibilistes*, ne progresse pas par une simple accumulation continue de vérités ;
- les théories mathématiques sont empiriques, c'est-à-dire confrontées aux expériences que constituent contre-exemples et calculs ; comme les physiciens, les mathématiciens passent d'une théorie à une autre sans que jamais aucune ne puisse être considérée comme ultime.

Les principaux exemples sur lesquels Lakatos appuie sa thèse sont celui de la convergence uniforme et celui de la formule d'Euler qui lie les nombres associés à un polyèdre. Cette formule donna lieu à toute une série d'énoncés faux pendant plus d'un siècle (car utilisant des définitions inappropriées de la notion de polyèdre).

Cependant pour la grande majorité des mathématiciens, l'épistémologie faillibiliste n'est adaptée qu'à la description des périodes courtes de l'histoire des mathématiques où une théorie élabore ses concepts et ses méthodes de preuve. Cela s'est produit pour l'analyse et la topologie au XIX^e siècle (d'où l'exemple de Cauchy et celui de la formule d'Euler), mais ne se produit plus aujourd'hui depuis la mise au point de la logique du calcul des prédicats et la formulation de cadres formels généraux qui sont aptes à la représentation de toutes les mathématiques.

Depuis l'invention du formalisme ensembliste au début du XX^e siècle, les erreurs qu'on rencontre en mathématiques ne sont non plus dues à des théories fausses ou à des concepts en cours d'élaboration, mais de «vraies belles erreurs» dues à l'étourderie, la paresse de donner tous les détails, la complication d'une situation, l'insuffisance des contrôles.

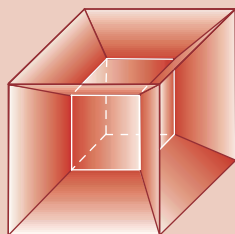
Non, les mathématiques ne sont pas comme la physique, soutiennent la majorité des mathématiciens et ce qui a été démontré avec soin il y a 100 ans ou 2 000 ans reste vrai et le restera. Le mathématicien John Conway précise : «Il est trompeur de considérer l'exemple de la formule d'Euler comme caractéristique du développement des mathématiques. La plu-

5. LA FORMULE D'EULER ET LA THÈSE FAILLIBILISTE

Imre Lakatos (1922-1974) s'est servi de l'exemple de la formule d'Euler pour expliquer sa conception faillibiliste des mathématiques : les mathématiques progressent par corrections d'erreurs. La formule d'Euler (énoncée en 1750) indique que pour tout polyèdre donné, si on désigne par S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces alors :

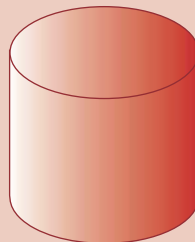
$$F - A + S = 2 \quad (\text{pour le cube on a } S = 8, A = 12, F = 6).$$

L'énoncé semble juste, pourtant des contre-exemples existent :

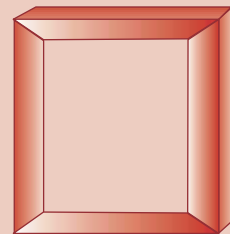


$$12 - 24 + 16 = 4$$

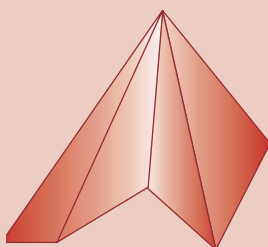
Faces – Arêtes + Sommets



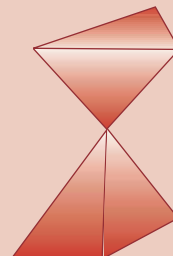
$$3 - 2 + 0 = 1$$



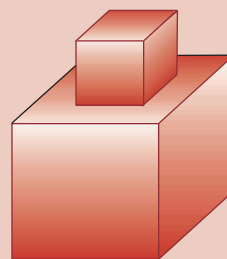
$$12 - 24 + 12 = 0$$



$$8 - 11 + 6 = 3$$



$$8 - 12 + 7 = 3$$



$$11 - 24 + 16 = 3$$

Comme Euler n'avait pas donné de définition précise de ce qu'il appelait polyèdre, les contre-exemples amènent à en rechercher une qui exclurait le contre-exemple. C'est seulement en 1895 que Poincaré proposera une définition convenable après que de nombreuses tentatives imparfaites amènent une succession d'énoncés faux, rectifiés par d'autres énoncés faux. Ces contre-exemples provoquant un processus d'ajustements successifs sont vus par Lakatos comme une caractéristique du développement mathématique. Ce point de vue n'est guère partagé aujourd'hui où on considère que seules les périodes de mise au point de nouveaux domaines (ici la topologie) sont sujettes à ce type d'hésitation.

part des résultats mathématiques une fois prouvés le restent définitivement. Si la preuve originale ne satisfait plus tout à fait les critères de rigueur adoptés ensuite, les adapter est en général facile. Bien souvent, il y a eu des omissions importantes ou des erreurs dans les premières tentatives de preuve de résultats importants, mais elles sont vite corrigées, et au total il existe très peu de cas analogues à la formule d'Euler.»

ENSEMBLE TOUT S'ARRANGE !

Finalement, si l'on est étonné du nombre important d'erreurs commises par chaque mathématicien et par la gravité de certaines d'entre elles, jusqu'à présent, jamais un théorème faux et important n'est passé inaperçu longtemps ou n'a été utilisé comme base pour formuler et développer une théorie fautive qui aurait berné toute la communauté. Collectivement les mathématiciens ne semblent pas être faillibles.

L'image d'une science qui, en dehors de quelques périodes courtes, progresse continûment et sans remise en cause profonde est pour l'essentiel confirmée par l'examen des faits historiques. L'erreur est fréquente et gênante, mais aussi fructueuse et stimulante et en définitive toujours rapidement effacée.

U. BOTTAZZINI, *Poincaré, philosophe et mathématicien*, Collection *Les génies de la science*, Pour la Science, 2000.

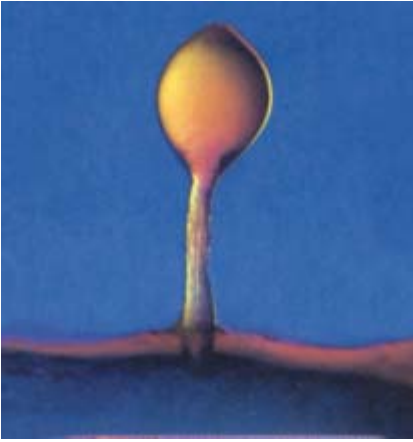
T. C. HALES, *The Kepler Conjecture*. <http://www.math.lsa.umich.edu/~hales/countdown/>

J. HERBRAND, *Écrits logiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1968.

W.-Y. HSIANG, *A Rejoinder to Hales's Article*, in *Math. Intel.* 17, 35-42, 1995.

C. PÖPPE, *La conjecture de Kepler*, in *Pour la Science*, n° 259, mai 1999.

I. LAKATOS, *Preuves et réfutations*, Essai sur la logique de la découverte mathématique, Hermann, Paris, 1984.



Le fond et l'informe

IAN STEWART

Les mathématiques modifient notre perception du monde animal, des micro-organismes aux tigres en passant par les poissons.

Lors d'un colloque sur les mathématiques de la genèse des formes, et notamment lors d'une des conférences, un de mes animaux favoris me revint à la mémoire. Mon préféré est le tigre pour sa magnifique fourrure rayée, mais l'autre, s'il n'a pas l'élégance d'un félin, a pourtant une apparence remarquable : il s'agit d'une moisissure visqueuse de l'embranchement des acrasiomycètes, nommée *Dictyostelium discoideum*.

Ces organismes fascinent les biologistes, car ils sont à la frontière entre les animaux unicellulaires et pluricellulaires. Ils illustrent également une vérité que les nouveaux explorateurs du génome se doivent de garder en mémoire : ce ne

sont pas seulement les gènes qui importent, mais ce que l'on en fait.

Malgré son humble position dans l'arbre des espèces, *Dictyostelium discoideum* rivalise avec les animaux dits supérieurs par les belles structures spiralées qu'il crée (voir la figure 2). Dans quelle mesure ces formes sont-elles inscrites dans les gènes ? Y a-t-il un gène des spirales ? À l'inverse, doit-on voir dans ces formes le résultat de lois physiques et d'équations mathématiques ?

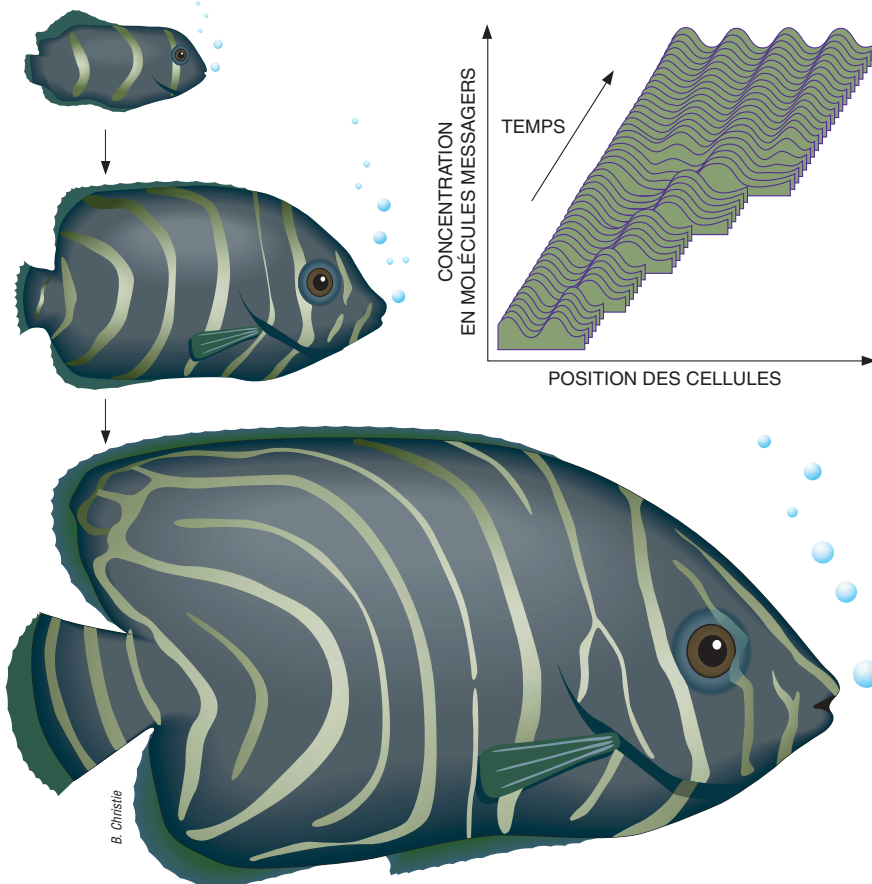
Afin de répondre à ces questions, examinons le cycle de vie de *Dictyostelium discoideum*. Ces organismes sont issus de spores transportées par le vent en un lieu propice, humide et riche en nour-

riture (principalement des bactéries et des levures qu'ils phagocytent). Les spores germent et donnent naissance à des cellules, semblables à des amibes, qui partent en quête de nourriture. Lorsque ces cellules sont suffisamment grosses, elles se reproduisent en se divisant en deux cellules identiques. Quand la nourriture abonde, elles aussi. Elles conservent un mode de vie autonome : elles ne se préoccupent pas de leurs voisines !

De même que certains artistes ne sont talentueux qu'en période de bohème, l'expression artistique de ces organismes apparaît lorsque la nourriture se raréfie. Dans ces conditions, les cellules sécrètent de l'adénosine monophosphate cyclique (une molécule messager). Attirées vers la source de cette molécule, les autres cellules sécrètent à leur tour de l'adénosine monophosphate cyclique : chaque cellule «clame» sa présence à ses voisines en émettant cette molécule. De ce mouvement de foule naît parfois une élégante spirale. La population devient de plus en plus dense, tandis que la spirale se resserre jusqu'à se transformer en une structure arborescente qui rappelle les racines ou les branches d'un arbre. Ces ramifications s'épaississent et les cellules s'agglutinent. L'ensemble s'entoure alors d'une gaine visqueuse et prend finalement la forme d'une «limace» (à ne pas confondre avec le gastéropode du même nom).

La «limace» est une colonie de cellules autonomes, cependant elle se déplace à la manière d'un organisme pluricellulaire unique. Parvenue dans une zone sèche, la colonie s'ancre solidement au sol, puis certaines des cellules «se sacrifient» et forment une longue tige à l'extrémité de laquelle les autres cellules s'agencent en une masse arrondie, nommée sporocarpe. Les cellules s'y transforment en spores qui, libérées à maturité et transportées par le vent, commencent un nouveau cycle.

Thomas Höfer, biophysicien à l'Université de Berlin, a découvert un système d'équations mathématiques dont les solutions reproduisent les formes spiralées et arborescentes de *Dictyostelium discoideum*. Par ailleurs, Cornelis Weijer, de



1. Le scalaire se pare de nouvelles rayures à mesure qu'il grandit. Dans une simulation sur un ordinateur, les pics des ondes représentent les rayures.