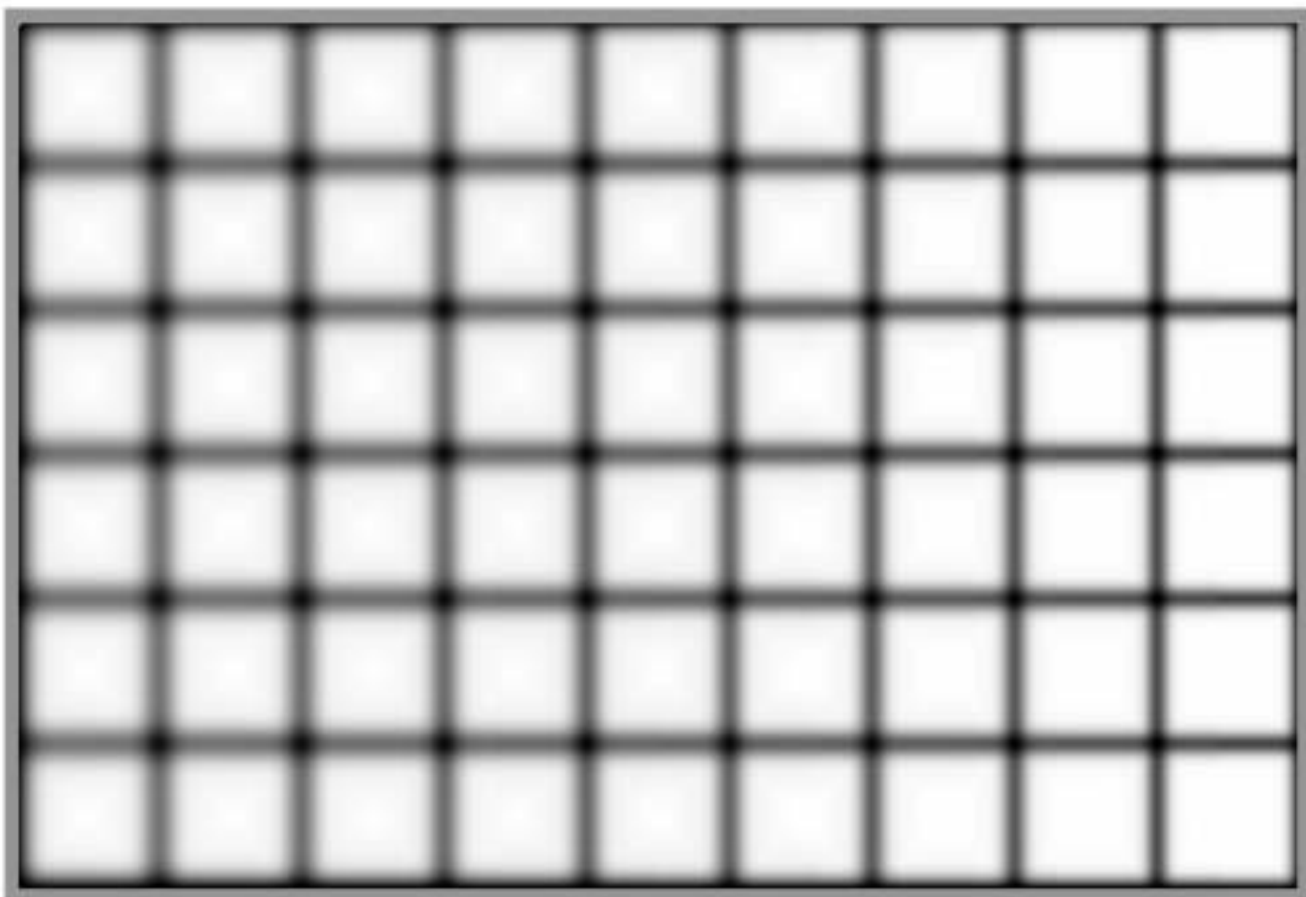
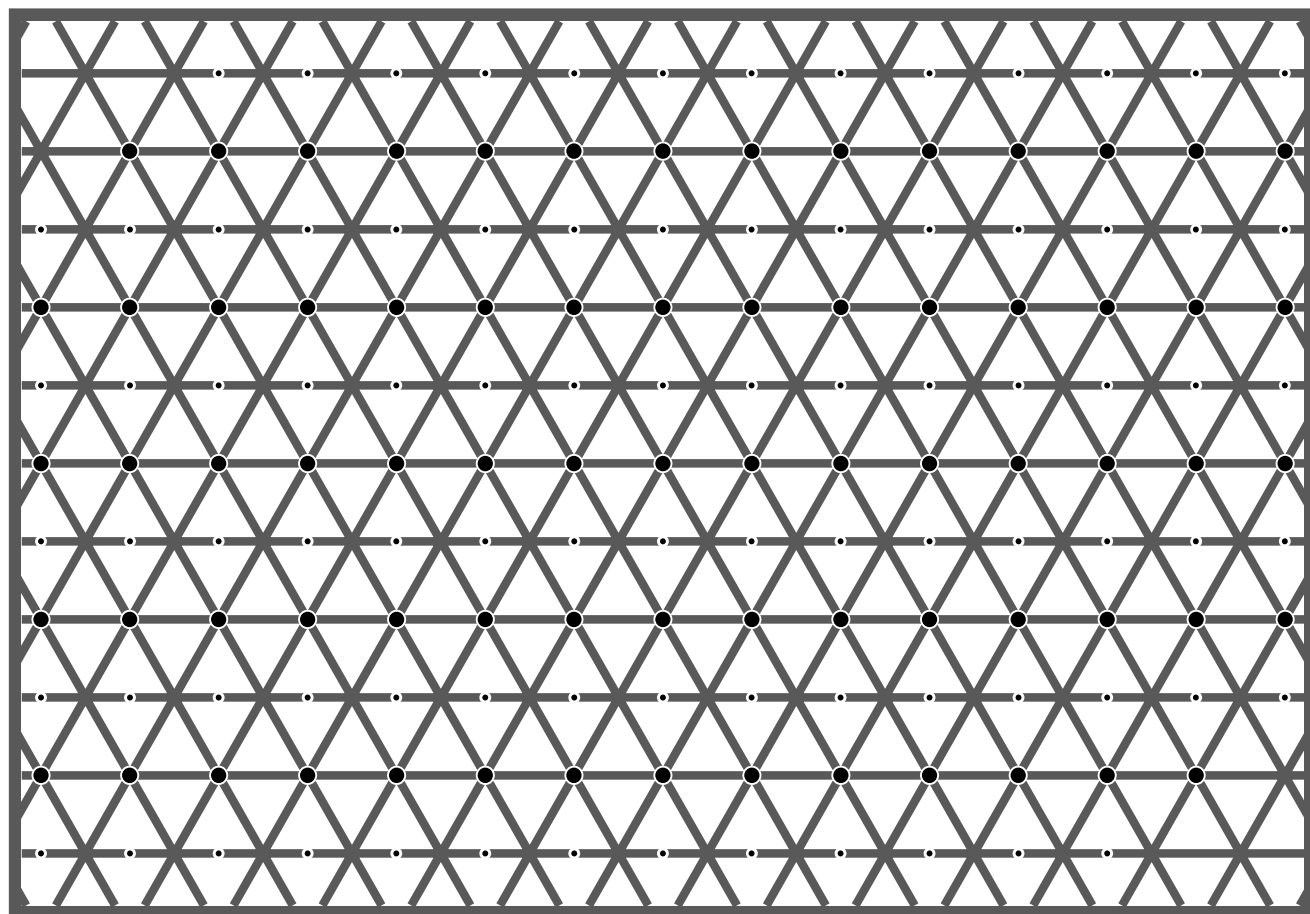


2



4



Le jeu des erreurs séduisantes

JEAN-PAUL DELAHAYE

De même qu'il y a de belles escroqueries, il y a aussi de magnifiques erreurs mathématiques : la beauté réside dans l'apparente vérité du faux.



L'art de bien raisonner et l'art de reconnaître les raisonnements fautifs sont deux facettes d'une même médaille : pour raisonner juste, il faut savoir identifier les erreurs et inversement. Certaines démonstrations erronées sont des pièges où on se laisse entraîner, à moins d'être particulièrement attentif ou averti.

Dans la rubrique du mois dernier, nous avons examiné des erreurs mathématiques commises par les meilleurs savants et montré que les mathématiciens, plus peut-être que les autres hommes de sciences, commettent d'énormes bourdes, aux conséquences ennuyeuses ou bénéfiques. L'abstraction, la variété, la complication et la longueur des argumentations mathématiques sont l'explication la plus simple de ce phénomène attesté par les volumineux errata des manuels de mathématiques.

Ce mois-ci, nous allons examiner une série de raisonnements pièges conduisant, par des cheminements d'une rigueur en apparence irréprochable, à d'évidentes absurdités. Les exemples que nous citerons ne proviennent pas d'études historiques, mais sont des pièges conçus dans des buts didactiques ou tout simplement des erreurs commises par des élèves.

SOPHISMES ANTIQUES

L'étude des raisonnements fautifs est antique : Aristote, dans son traité des Réfutations des arguments sophistiques conçut, le premier, l'art d'identifier et de démontrer les arguments erronés que les philosophes sophistes professaient pour ridiculiser leurs adversaires. Voici un exemple des raisonnements qu'analyse Aristote :

Est-ce que le malade qui est guéri se trouve en bonne santé? Oui? Donc le malade est en bonne santé!

Qu'est-ce qui cloche?

Solution : Aristote explique que l'absurdité vient d'une ambiguïté dans le sens

d'un mot. Le mot malade signifie, selon les contextes, personne qui est malade en ce moment (exemple : le malade souffre) ou personne qui a été malade (exemple : quand le traitement a fait son effet, le malade rentre chez lui). La conclusion du sophisme semble paradoxale, car on y utilise le mot malade pour désigner une personne malade (premier sens de malade), alors que, dans la question initiale, qui appelle un oui, c'est le second sens qui est utilisé.

Voici d'autres exemples de sophismes proposés par Aristote que je vous laisse décortiquer vous-même.

Est-ce qu'il faut décider en faveur de celui qui dit des choses justes ou des choses injustes? En faveur de celui qui dit des choses justes. Pourtant il est juste que celui qui a subi une injustice dise d'une manière complète ce dont il a souffert ; or il a souffert de choses injustes. Il nous faut donc décider en faveur de celui qui dit des choses injustes.

Et encore : *Si le non-être est objet d'opinion, le non-être est.*

La classification des erreurs proposée par Aristote expose l'art de la déduction et la manière de ridiculiser un adversaire en l'amenant à se contredire, ce qui est utile dans les débats politiques. Il s'agit toutefois essentiellement de jeux linguistiques, le plus souvent élémentaires. Dès qu'on entre dans le domaine mathématique, des pièges de natures bien différentes surgissent.

ÉVIDENT... MAIS FAUX

Parfois les pièges mentaux sont si simples qu'un petit effort permet à chacun de se corriger. Les exemples suivants, destinés aux enfants, sont dus à E. Northrop.

Une horloge sonne 6 heures en 5 secondes. Combien de temps lui faut-il pour sonner midi?

Non, la réponse n'est pas 10 secondes. Une bouteille et son bouchon coûtent

ensemble 110 F. La bouteille coûte 100 F de plus que le bouchon. Combien coûte la bouteille?

Non, la réponse n'est pas 10 F.

Une grenouille est au fond d'un puits de 30 mètres. En une heure, elle gravit 3 mètres, puis glisse de 2 mètres. Combien d'heures lui faut-il pour sortir?

Non, la réponse n'est pas 30 heures.

Un TGV part de Paris pour Orléans en même temps qu'un omnibus part d'Orléans pour Paris. Le TGV roule à 250 km à l'heure, l'omnibus roule à 120 km à l'heure. Lequel sera le plus loin de Paris quand ils se croiseront?

Non, la réponse n'est pas le TGV.

L'exemple suivant est très classique, mais n'a pas piégé que des enfants : *Le père de Toto a trois fils : Pim, Pam et ...? Non, la réponse n'est pas Poum.*

RETOUR VERS LE PASSÉ

Dans le numéro de l'été 1997 d'Adobe Magazine, Apple faisait la publicité pour son ordinateur Power Mac en indiquant : *En fait, Adobe Photoshop fonctionne 50 pour cent plus rapidement avec un Power Mac. Cela se traduit par un gain de 50 pour cent sur le temps que vous passez devant votre écran à attendre que votre machine retouche les photos, transforme les images ou applique des filtres.*

Fonctionner 50 pour cent plus rapidement signifie que, pendant un temps donné, par exemple 10 secondes, le Power Mac traitera 50 pour cent de segments ou de surface d'image en plus que le modèle d'ordinateur précédent. Si ce que dit la publicité est vrai, alors se pose le problème suivant : avec un

1. Dans son autoportrait, Chagall, pour attirer l'attention, dessine plusieurs doigts à ses mains. L'erreur, voulue, illustre l'habileté du peintre polydactyle. En mathématiques, les erreurs ne sont pas destinées à attirer l'attention sur les qualités du mathématicien.



Autoportrait aux couleurs de l'Israël, Marc Chagall, 1948. © Adagp, Paris 2001. Stedelijk Museum Amsterdam on loan from Netherlands Institute for Cultural Heritage

2. CLASSIFICATION DES ERREURS

Tout le monde commet des erreurs, et tout auteur de livre de mathématiques est étonné quand, malgré le soin qu'il prend à relire les épreuves, il découvre, quelques mois après la parution, une multitude d'imperfections dans les exemplaires mis en vente. Les longs *errata* étonnent les non-mathématiciens et ont parfois donné l'impression que les auteurs des livres de mathématiques ne sont pas sérieux ! La difficulté d'écrire un texte mathématique sans erreur provient de ce que celles-ci peuvent être de natures très différentes et qu'en effectuant une relecture il est impossible de penser simultanément à tout. Outre les fautes de «typo», d'orthographe et de grammaire qui sévissent en mathématiques comme partout, un document de mathématiques peut contenir une grande variété d'erreurs de gravité variée. Par ordre, de gravité voici quelques erreurs typiques.

– L'erreur d'inattention faite au dernier moment, qui conduit à écrire une formule fautive ou un énoncé faux, car on recopie mal son brouillon (qui, lui, était correct) : avec un peu de chance le lecteur attentif «rectifiera de lui-même». Dès qu'on s'en aperçoit, l'erreur peut être corrigée.

– Plus ennuyeuse, l'erreur vraie de calcul ou de raisonnement conduit à une affirmation fautive dont on n'utilise qu'une partie, elle, vérifiée. Par exemple, on sait que $x \leq 0$ et l'on démontre que $A = 2x$, ce qu'on utilise ensuite pour conclure que $A \leq 0$. Le calcul exact devait conduire à $A = x$ qui, lui aussi, a pour conséquence que $A \leq 0$; l'erreur s'est effacée d'elle-même et n'a pas laissé de trace. Un célèbre cas de deux erreurs s'annulant l'une l'autre est dû à l'astronome anglais Edmond Halley lorsqu'il calcula l'orbite de la comète de 1682 qui porte son nom. Sa double erreur fut notée lorsque Alexis Clairaut, Joseph Lalande et Nicole Lepaute reprirent ses calculs en 1757 pour obtenir une plus grande précision (ce qui leur permit finalement de prédire le retour de la comète avec une exactitude prouvant que la mécanique newtonienne «voit l'avenir» et que la loi d'attraction universelle en $1/r^2$ ne nécessite pas de terme correcteur).

– Plus grave est l'erreur provenant d'un oubli qui conduit à une démonstration trouée : un cas n'a pas été traité. S'il l'avait été, on aurait pu conclure comme dans les autres cas, et donc l'oubli est à nouveau sans gravité. Le raisonnement est faux, mais se complète sans trop de mal. Bien sûr, le mathématicien qui commet souvent cette faute risque un jour de laisser un trou qui ne se rebouchera pas !

– Plus grave encore est l'erreur réparable, mais qui demande un effort important pour être effacée. C'est ce type d'erreur que commit Andrew Wiles quand il proposa sa première démonstration du théorème de Fermat en 1993 (annoncée en première page du *New York Times* du 24 juin). L'effort pour réparer exigera plus d'un an de travail et la participation de certains des collègues de Wiles. Dans le film réalisé par Simon Singh sur cette démonstration, on voit Wiles sur le point de pleurer à l'évocation de la pénible période d'incertitude qu'il vécut à la recherche du contournement de son erreur.

– Une autre catégorie d'erreurs plus graves est celle qui conduit à un énoncé irrémédiablement faux, mais qu'on peut modifier un peu pour en tirer un énoncé vrai. C'est ce type d'erreur qui fut commis par Cauchy quand il crut que toute limite de fonctions continues est continue. Ce type d'erreur est généralement très instructif, car il permet d'isoler une condition oubliée qui n'allait pas de soi et qui parfois fait découvrir un concept important.

– Le dernier cas d'erreur est bien sûr celui qui met tout définitivement par terre, sans qu'aucune leçon puisse en être tirée.

ordinateur procurant un gain de 150 pour cent (ce qui est largement atteint par les machines actuelles), est-ce que vous gagnez 150 pour cent du temps ? Auquel cas, lorsque vous utilisez votre ordinateur, vous retournez dans le passé !

Où est l'erreur du texte publicitaire ?
Solution : Il s'agit là d'un piège classique dans lequel tout le monde tombe un jour : une hausse de X pour cent n'est pas l'inverse d'une baisse de X pour cent et réciproquement. Cette erreur est à rapprocher de celle, tout aussi courante, qui

consiste à croire qu'une hausse de Y pour cent suivie d'une hausse de Z pour cent est équivalente à une hausse de $(Y + Z)$ pour cent.

En réalité, une hausse de X pour cent fait passer de A à $A(1 + X/100)$ et donc, pour la compenser, il faut passer de $A(1 + X/100)$ à A , ce qui correspond à une multiplication par $1/(1 + X/100)$ et non pas à une multiplication par $(1 - X/100)$. Dans notre exemple, une hausse de 50 pour cent (qui fait passer de 100 à 150) est compensée par une

baisse de 33,33 pour cent (qui fait passer de 150 à 100). La publicité aurait dû dire que le temps économisé était de 33,33 pour cent. Avec un ordinateur procurant un gain de 150 pour cent, le gain est 60 pour cent, et non pas un voyage dans le temps passé.

Une erreur analogue à celle d'*Apple* a été commise dans les années 1990 par *France Télécom*, qui utilisait un slogan stupide : «Après 18 heures, le téléphone est 30 pour cent moins cher, soit 30 pour cent de temps en plus.» Ce slogan était pourtant moins favorable que la réalité, car si, après 18h, le téléphone est 30 pour cent moins cher, alors le temps en plus est de 42,8 pour cent (ce qui vous coûtait 100 F vous coûte maintenant 70 F, et donc, si vous utilisez les 30 F gagnés pour prolonger votre coup de téléphone, vous disposez d'une durée supplémentaire de 30/70 de votre coup de téléphone initial, soit 42,85 pour cent). Reconnaissons toutefois que le slogan juste aurait été incongru et incompréhensible pour la majorité des gens.

Venons-en maintenant à des erreurs de raisonnement faites dans le cours d'une démonstration, si possible brève.

EXISTENCE DANGEREUSE

Théorème : 1 est le plus grand entier.

Démonstration. Soit A le plus grand entier. Pour tout entier A supérieur à 1, le carré (entier) A^2 de cet entier A , est plus grand que A , donc A n'est pas le plus grand entier. Sauf si A est égal à 1, le carré de 1 étant égal à 1. Donc 1 est le plus grand entier.

Où est l'erreur ?

Solution : Supposer l'existence d'objets qui n'existent pas conduit à la catastrophe, et c'est ce qu'illustre l'exemple. Dans le raisonnement, nous faisons l'hypothèse qu'il existe un plus grand entier, ce qui est faux. Puisque, à part cela, le raisonnement est entièrement correct et aboutit à une contradiction, il montre rigoureusement qu'il n'existe pas de plus grand entier.

MAIS QU'AI-JE FAIT D'INTERDIT ?

Considérons l'équation :

$$(x + 5)/(x - 7) - 5 = (4x - 40)/(13 - x).$$

Elle peut s'écrire :

$$[x + 5 - 5(x - 7)]/(x - 7) = (4x - 40)/(13 - x),$$

ou encore :

$$(4x - 40)/(7 - x) = (4x - 40)/(13 - x).$$

Les numérateurs étant égaux, les dénominateurs le sont aussi : donc $7 - x$ est égal à $13 - x$, et donc $7 = 13$.

Où est l'erreur ?

Solution : Le piège est subtil. L'affirmation : «les numérateurs étant égaux,

les dénominateurs le sont aussi» n'est vraie que si les numérateurs ne sont pas nuls : par exemple, $0/12 = 0/7$, et 12 n'est pas égal à 7!

Dans notre exemple, $4x - 40$ est nul, car x n'est pas n'importe quel nombre, mais la solution de l'équation de départ, qui justement est 10, ce que l'on vérifie par les calculs suivants.

L'équation de départ donne :

$$(13 - x)(4x - 40) = (7 - x)(4x - 40),$$

ce qui, après regroupement dans le premier membre, conduit à $24(x - 10) = 0$, c'est-à-dire $x = 10$.

PLUS QUE LUI-MÊME?

Prouvons que tout nombre est plus grand que lui-même! Soit a et b deux nombres positifs tels que : $a > b$.

On multiplie les deux nombres par b : $ab > b^2$, on soustrait a^2 de chaque côté et l'on factorise : $a(b-a) > (b-a)(b+a)$.

On divise maintenant par $(b-a)$, qui n'est pas nul, et l'on obtient : $a > b+a$. Puisque b est positif, a est donc plus grand que lui-même et même plus grand que tout nombre plus grand que lui-même. Où est l'erreur?

Solution : Simplement dans le fait (à ne jamais oublier) que, lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité, celle-ci n'est préservée que si ce par quoi on multiplie ou divise est positif. Si ce par quoi on multiplie ou divise est négatif, l'inégalité est inversée. Ici, en divisant par $(b-a)$, qui est négatif, on obtient : $a < b+a$, ce qui n'est nullement paradoxal.

TROIS FOIS RIEN

L'exemple suivant est encore élémentaire, mais, à la fin d'un cours, il ne manquera pas de faire son petit effet.

On démontre que $1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$ par la méthode que l'on veut (par exemple en écrivant $1+2+3+\dots+n$, et juste en dessous $n+ \dots+3+2+1$).

L'égalité étant vraie pour tout n , écrivons-la pour $n-1$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = (n-1) n/2.$$

Ajoutons 1 de chaque côté de cette égalité :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + 1 = (n-1) n/2 + 1.$$

Arrangeons tout cela en sachant que $(n-1) + 1 = 0n$ on obtient :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = (n-1) n/2 + 1.$$

On a donc : $n(n+1)/2 = (n-1) n/2 + 1$ ce qui donne : $n^2 + n = n^2 - n + 2$, et finalement $n=1$. Tout entier est égal à 1!

Que doivent vous dire les élèves endormis que la conclusion étrange a peut-être sortis de leur torpeur?

Solution : Si $(n-1) + 1 = n$ est vrai, il n'est pas exact que $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + 1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, car, l'avant-dernier

3. LES PAGES D'ERRATA DES LIVRES DE MATHÉMATIQUES

Les livres de mathématiques ont une particularité remarquable : ils sont bourrés de fautes. Les auteurs consciencieux collectent les erreurs que leur signalent les lecteurs et publient alors des «errata» qui sont parfois étonnants.

Chaque chapitre du traité général de mathématiques de Bourbaki était lu et relu par les membres du collectif qui se cachait sous le nom de Bourbaki (voir *Bourbaki*, par Maurice Mashaal, collection *Les génies de la science*). Après un tel passage au crible, on s'attend à ce qu'aucune erreur ne subsiste. Les fascicules d'*errata* publiés par le vrai-faux Général Bourbaki montrent que c'est loin d'être le cas. On a reproduit ci-dessous les premières pages du fascicule d'*errata* numéro 13 (il y en a donc déjà eu 12 auparavant!), qui comporte 7 pages.

Aujourd'hui l'Internet rend le travail plus simple. Outre qu'il permet à l'auteur d'être rapidement informé de ses erreurs par courrier électronique, il permet aussi la publication de volumineux textes d'*errata* qu'aucun éditeur n'aurait accepté d'imprimer, de peur d'y perdre tout crédit. À titre d'exemple, les *errata* de l'*Encyclopédie concise des mathématiques* d'Éric Weisstein (*Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 1999) comportent 69 pages bien serrées (on n'ose pas penser ce qu'auraient été les errata si l'*Encyclopédie* n'avait pas été «concise»). Son adresse est : www.treasure-troves.com/buy/math/book/errata/

Donald Knuth, le mathématicien créateur du traitement de texte *Tex* (utilisé par la communauté mathématique) et auteur du *Traité de référence sur les mathématiques de la programmation* (*The Art of Computer Programming*) a lui aussi mis à la disposition des lecteurs une série de fascicules d'*errata* qui comportent 80 pages pour le volume 1, 142 pages pour le volume 2, 109 pour le volume 3. Adresse internet : www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/taocp.html

Bon joueur, D. Knuth offre 2,56 dollars pour chaque nouvelle erreur qu'on lui signalera. (Il n'explique pas pourquoi 2,56, mais, n'en doutons pas cela résulte d'un savant calcul – exact espérons-le – rattaché à ses droits d'auteur).



Théorie des ensembles

CHAPITRE III

Ensembles ordonnés. Cardinaux. Nombres entiers

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE, FASCICULE XX TROISIÈME ÉDITION

- P. 40, ligne 9 du haut, au lieu de : $r \in E$, lire : $r \in E$.
P. 77, ligne 15 du bas, au lieu de : $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, lire : $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ligne 3 du bas, au lieu de : *ordonné*, lire : *préordonné*.
P. 82, ligne 9 du haut, au lieu de : de E_n dans E_n , lire : de F_n dans F_n .
P. 83, ligne 6 du haut, au lieu de : prop. 2, lire : prop. 1. Ligne 15 du bas, au lieu de : $\lambda \geq \mu$, lire : $\lambda \leq \mu$.
P. 86, ligne 13 du haut, au lieu de (ii), lire (ii').
P. 90, ligne 6 du haut, au lieu de : $f_{\alpha\beta}(u)$, lire : $f_{\beta\alpha}(u)$.
P. 95, ligne 7 du haut, au lieu de : $f_{\beta\alpha}(u_\alpha(x_\alpha))$, lire : $f_{\beta\alpha}(u_\alpha(x_\alpha))$. Ligne 8 du haut, au lieu de : $u_\alpha(f_{\beta\alpha}(x_\alpha))$, lire : $u_\beta(f_{\beta\alpha}(x_\alpha))$.
P. 96, ligne 8 du bas, au lieu de : $\lim_{\alpha} E_\alpha^1$, lire : $\lim_{\alpha} E_\alpha^1$. Ligne 1 du bas, au lieu de F_α^1 , lire F_α^1 .
P. 97, ligne 14 du haut, au lieu de g^α , lire g_α^1 (deux fois). Ligne 5 du bas, au lieu de : $\lim_{\alpha} (\lim_{\beta} u_\beta^1)$, lire : $\lim_{\alpha} (\lim_{\beta} u_\beta^1)$.
P. 103, ligne 14 du bas, au lieu de A, lire X; au lieu de B, lire Y.

terme (non écrit) à gauche est $n-2$, alors qu'à droite c'est $n-1$. Les trois petits points, selon les contextes, ne désignent pas la même chose.

PEUT-ON ÉCRIRE $\sqrt{-1}$?

Les nombres complexes sont définis à partir de l'idée que -1 possède une racine carrée que l'on considère comme un nombre nouveau et que l'on note souvent par la lettre i . Par définition, $i^2 = -1$. Pour plus de commodité on peut noter ce nombre supplémentaire par $\sqrt{-1}$.

On obtient alors de drôles de choses, comme cette suite d'égalités :

$$\begin{aligned} -1 &= \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1, \\ \text{ou ce raisonnement :} \\ \sqrt{-1} &= \sqrt{-1}, \text{ donc } \sqrt{1}/(-1) = \sqrt{(-1)/(1)}, \text{ donc} \\ \sqrt{1} \sqrt{1} &= \sqrt{-1} \sqrt{-1}, \text{ donc } 1 = -1. \end{aligned}$$

Comment expliquer cela? Les nombres complexes sont-ils contradictoires, et les mathématiciens qui les utilisent sont-ils nécessairement conduits à écrire des choses absurdes?

Solution : Les nombres complexes ne sont pas plus contradictoires que les nombres réels (cela se démontre en faisant la

$b - 1$, d'où l'on déduit que $a = b$, ce que nous souhaitons.

Maintenant, soit un entier positif ou nul quelconque b . Soit n le maximum de 0 et b (bien sûr $n = b$). Le raisonnement précédent a montré que 0 et b étaient égaux, donc $b = 0$. En conclusion, tous les entiers positifs ou nuls sont nuls.

Si tel était le cas, là aussi les entiers seraient majorés par 0! Où est l'erreur? *Solution* : Simplement dans le fait que, même si a et b sont des entiers positifs ou nuls, $a - 1$ et $b - 1$ ne le sont pas nécessairement (car $0 - 1 = -1$). On ne peut donc pas appliquer l'hypothèse de récurrence au couple $a - 1, b - 1$.

DÉSOLANTES DÉRIVÉES

Calculons la dérivée de x^3 de deux façons différentes :

(a) Par la formule habituelle $(x^n)' = nx^{n-1}$. Pour tout x , on a donc $(x^3)' = 3x^2$

(b) Par le raisonnement suivant. Pour x entier, on écrit :

$x^3 = x^2 + x^2 + x^2 + \dots + x^2$ (la somme comporte x fois le terme x^2)

On dérive de chaque côté :

$(x^3)' = (x^2)' + (x^2)' + (x^2)' + \dots + (x^2)'$ (la dérivée d'une somme est la somme des dérivées).

$(x^3)' = 2x + 2x + 2x + \dots + 2x$ (application de la formule générale rappelée plus haut).

$(x^3)' = 2x^2$ (car, sur la ligne précédente il y a x fois le terme $2x$, ce qui permet de remplacer le second membre par $2x^2$).

Pour tout x entier, on a donc :

$(x^3)' = 3x^2 = 2x^2$.

En prenant pour x un entier non nul et en simplifiant par x^2 , on a : $2 = 3$.

Où est l'erreur?

Solution : Le raisonnement (b) suppose que x est entier (sinon, on ne pourrait pas écrire : $x^3 = x^2 + x^2 + x^2 + \dots + x^2$). Appelons n l'entier auquel on s'intéresse.

Les fonctions $x \rightarrow x^3$ et $x \rightarrow x^2 + x^2 + x^2 + \dots + x^2$ (n fois le terme x^2) ont effectivement la même valeur au point $x = n$, et cette valeur est n^3 . Mais, autour de la valeur n , ces deux fonctions n'ont plus les mêmes valeurs, car : $(n+\epsilon)^3 \neq (n+\epsilon)^2 + (n+\epsilon)^2 + \dots + (n+\epsilon)^2 = n(n+\epsilon)^2$. Puisque les deux fonctions sont différentes, il est sans surprise que leur dérivée le soit.

L'endroit où se produit l'erreur est lorsqu'on écrit «on dérive de chaque côté» car, l'égalité $x^3 = x^2 + x^2 + x^2 + \dots + x^2$ désigne une égalité valable entre deux fonctions différentes en un point précis, et non pas une égalité entre deux fonctions sur tout leur ensemble de définition. L'erreur est en fait la même que celle qu'on commettrait en disant :

$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$, et donc que $(\sin 45^\circ)' = (\cos 45^\circ)'$, ce qui est absurde car en utilisant que $\sin x' = \cos x$ et que $\cos x' = -\sin x$, on en déduirait que $\cos 45^\circ = -\sin 45^\circ$, soit $\sqrt{2}/2 = -\sqrt{2}/2$.

5. LA PLUS BELLE PROPRIÉTÉ DE π

L'importance mathématique du nombre π n'est plus à démontrer. Pourtant la propriété suivante de π ne manquera pas de vous étonner : toute série converge vers π .

En effet, soit une série quelconque (par prudence, vous pouvez considérer une série absolument convergente) :

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots$

Les égalités (finies) suivantes sont immédiates :

$a_1 = \pi + (a_1 - \pi)$

$a_2 = -(a_1 - \pi) + (a_1 + a_2 - \pi)$

$a_3 = -(a_1 + a_2 - \pi) + (a_1 + a_2 + a_3 - \pi)$

$a_4 = -(a_1 + a_2 + a_3 - \pi) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \pi)$. Etc.

En ajoutant toutes ces égalités, nous obtenons :

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots = \pi + (a_1 - \pi) - (a_1 - \pi) + (a_1 + a_2 - \pi) - (a_1 + a_2 - \pi) + (a_1 + a_2 + a_3 - \pi) - (a_1 + a_2 + a_3 - \pi) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \pi) - \dots$

Toutes les parenthèses se simplifient deux à deux et disparaissent. Donc :

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots = \pi$.

Pensez-vous vraiment que cela soit normal?

Solution

Non, bien sûr, et d'ailleurs le même raisonnement, s'il était juste, s'appliquerait à n'importe quelle constante. Le raisonnement est faux, car l'expression obtenue au second membre après l'addition infinie est une série qui n'est pas même convergente (ni les parenthèses, ni leurs composants ne tendent vers zéro en général). Or avec une série de nombres réels qui n'est pas convergente, toute manipulation, même les simplifications les plus simples, est dangereuse et susceptible de nous entraîner dans l'absurde. Si vous en doutez, considérez l'exemple classique suivant :

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$
 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1$

SOMMES INFINIES

En analyse, on démontre que la série : $\ln(2) = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \dots$ est une série convergente, c'est-à-dire qu'en prenant 1, puis 2, puis 3, ... termes de la série, on obtient des nombres qui s'approchent de plus en plus d'une constante, qui est ici le logarithme népérien de 2 : $\ln 2 = 0,6931\dots$

Groupons les termes positifs d'une part et les termes négatifs de l'autre :

$\ln 2 = (1 + 1/3 + 1/5 + \dots) - (1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots)$.

Par ailleurs nous avons certainement :

$0 = (1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots) - (1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots)$.

ce qui, en ajoutant membre à membre avec l'égalité au-dessus, donne :

$\ln 2 = (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \dots) - 2(1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots)$,

c'est-à-dire :

$\ln 2 = (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \dots) - (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \dots) = 0$,

Donc, $\ln 2 = 0$.

D'où vient cette absurdité?

Solution : L'absurdité provient du fait général qu'on ne peut manipuler les séries sans précaution et qu'en particulier on ne peut changer l'ordre des termes sans risque. Il existe deux sortes de séries convergentes :
 - celles (dénommées «absolument convergentes») dont la série des valeurs absolues est convergente,
 - celles (dénommées «semi-convergentes») dont la série des valeurs absolues est infinie. C'est le cas de :

$\ln(2) = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \dots$

Pour les premières, on peut changer l'ordre des termes, additionner termes à termes, etc, comme nous l'avons fait ici. Pour les autres, Riemann a démontré au contraire que changer l'ordre des termes pouvait conduire à n'importe quelle valeur entre $-\infty$ et $+\infty$, et en fait toutes sortes d'absurdités peuvent être déduites de la manipulation sans précaution de séries semi-convergentes. L'exemple proposé est l'un des plus brefs qui le montre.

ARISTOTE, Organon VI, Réfutation des arguments sophistiques. Traduction J. Tricot. Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1987.

Edward BARREAU, Mathematical Fallacies, Flaws, and Flimflam, édité par The Mathematical Association of America, 2000, (ISBN 0-88385-529-1).

E.P. NORTHROP, Fantaisies et paradoxes mathématiques, Dunod, Paris, 1956, (tra-

duction de : **Riddles in Mathematics**, D. Van Nostrand Company Inc., New York, 1944).

Sylviane GASQUET-MORE, Plus vite que son nombre. Déchiffrer l'information. Éditions du Seuil, Paris 1999.

Massimo PIATELLI-PALMARINI, Inevitable Illusions : How Mistake of Reason Rule our Minds, John Wiley and Sons, New York, 1994 (ISBN 0-471-58126-7).