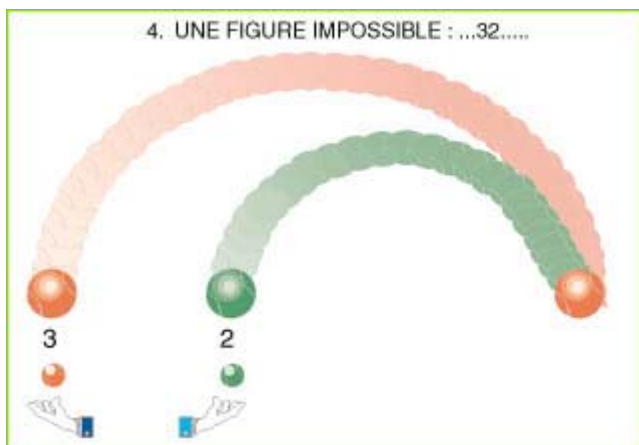




LES FIGURES IMPOSSIBLES

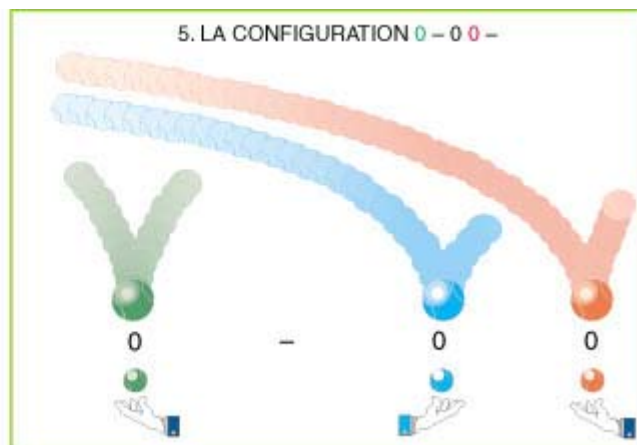
Avant d'aborder le problème lui-même dans toute sa généralité, nous allons d'abord nous poser une question très simple, qui orientera toute la suite de la construction. Nous avons codé une figure de jonglerie par une suite de nombres et nous nous posons la question : existe-t-il une figure de jonglerie correspondant à toute suite de nombres ? Comme souvent en mathématiques, l'exemple difficile, celui où nous voyons la difficulté, fait avancer la résolution, car il permet de localiser les pièges et, éventuellement, de s'en affranchir.

La réponse est non, comme l'illustre la figure 4. En effet, si nous lançons deux balles à deux temps successifs ne différant que d'une unité, par exemple la première pour trois temps et la seconde pour deux temps, ces deux balles retombent en même temps, ce qui est exclu par les règles précédemment énoncées. Ainsi, la contrainte que deux balles ne retombent jamais en même temps exclut un certain nombre de suites d'entiers. Notre but est de trouver toutes les suites valides, celles qui correspondent effectivement à des figures de jonglerie.

LES PHOTOS

En poursuivant cette idée, nous voyons qu'un lancer de n interdit un lancer de $n - 1$ au temps d'après, et même un lancer de $n - k$, k temps plus loin. Nous devons trouver une formalisation qui tienne compte de ces impossibilités.

Ainsi, quand nous avons une balle en main à lancer, nous ne pouvons pas lancer cette balle n'importe quel nombre de temps, car des balles précédemment lancées retomberont déjà à certains de ces temps (qui sont donc exclus pour cette balle-ci). Autrement dit, à chaque «top» du métronome, nous disposons d'une photo qui indique quand les balles qui sont en l'air vont retomber. Une figure



de jonglerie revient donc à une suite de photos, enchaînées rapidement, autrement dit à un film. Jusqu'à présent, nous avons une réception et un lancer de balle simultanés à chaque «top» d'horloge, mais cela n'est pas indispensable.

Dans une notation à la fois simple et claire, nous noterons, pour chaque «top» futur à partir du «top» présent, un «0» si une balle retombe à ce «top» et un «-» si aucune balle ne retombe à ce «top». Ainsi, chaque photo est une suite de 0 et de - dont le nombre de 0 est le nombre de balles (et dont la longueur est égale à la hauteur maximale de lancer autorisée).

Ainsi la configuration 0 - 00 - correspond à la photo (voir la figure 5) où le jongleur a une balle (verte) en main (le zéro le plus à gauche), où aucune balle ne retombera le prochain temps et où deux balles (rouge et bleue) retomberont respectivement dans deux, et trois temps.

TRANSITIONS

Maintenant que nous avons décrit les photos, il faut reconstruire le film, c'est-à-dire savoir quelles suites de photos on a le droit de faire et quelles suites sont interdites. Étant donné une photo dont on cherche les successeurs possibles, il y a exactement deux cas :

1. Si la photo commence par un -, le jongleur ne peut lancer aucune balle, puisqu'il n'en a aucune en main. Il attend donc passivement, et la seule transition possible amène à la même photo où le premier - a disparu (c'est-à-dire est passé à la fin).

Par exemple, la photo - 0 - 00 a un seul successeur possible, qui est la photo 0 - 00 -. Autre exemple : la photo -- 000 a un seul successeur possible, qui est la photo - 000 -

2. Si la photo commence par un 0, le jongleur a une balle en main et doit donc la relancer. Comme cette balle ne doit pas retomber en même temps qu'une

autre, il faut que le jongleur la lance dans un temps codé sur la photo par un -. Ainsi, les successeurs de la photo initiale sont les photos que l'on peut déduire de celle-ci ainsi : on part de la photo initiale, on lui retire son premier 0 et l'on place un - à la fin (ce qui consiste à prendre la photo un instant plus tard en faisant abstraction de cette balle), puis on remplace un des - par un 0 (celui de la balle que l'on vient de lancer). Par exemple, la photo 0 - 00 - a trois successeurs possibles que l'on trouve par le procédé :

$$0 - 00 - \Rightarrow - 00 - \Rightarrow \begin{cases} 000 - - \\ - 000 - \\ - 00 - 0 \end{cases}$$

AUTOMATE

Nous avons maintenant tous les instruments en main pour présenter l'automate de la jonglerie, c'est-à-dire l'objet (issu de l'informatique théorique) qui permet de visualiser agréablement les photos et leurs transitions possibles. Dans le langage des automates, les photos que nous venons de présenter sont dénommées les états de l'automate, et les transitions autorisées entre photos sont les transitions de l'automate.

L'automate à trois balles et de hauteur au plus cinq (voir la figure 6) se lit comme suit : les états correspondent aux diverses ellipses de la figure, l'intérieur de l'ellipse étant la «photo» correspondant à l'état lui-même. Il y a un état initial dans l'automate : c'est le seul état (en bleu) possédant une boucle marquée du nombre de balles (égal à 3). Dans cet état, les trois balles sont lancées respectivement dans les trois premiers temps. Toutes les transitions autorisées à partir d'un état sont représentées par une flèche partant de cet état et arrivant sur un de ses successeurs. Les numéros sur les flèches allant d'un état à un autre indiquent à quelle hauteur il faut lancer la balle de départ

(à gauche) pour passer de l'état de départ à celui d'arrivée.

Les suites périodiques valides (correspondant à des figures réalisables et répétables indéfiniment) sont les cycles de l'automate, c'est-à-dire les chemins qui bouclent sur leur point de départ. On retrouve par exemple la suite 5151... entre les deux états (rouges) les plus à gauche de l'automate. Et, comme celle-ci ne passe pas par l'état initial, on voit maintenant, sans avoir besoin de faire un test douloureux, pourquoi cette figure ne pouvait pas être réalisée de la position de départ. On trouve ainsi de nombreuses autres suites périodiques que le lecteur pourra chercher dans l'automate, par exemple 45141(en rouge), 504 (en bleu), 55500 (en noir) et 531 (en vert foncé).

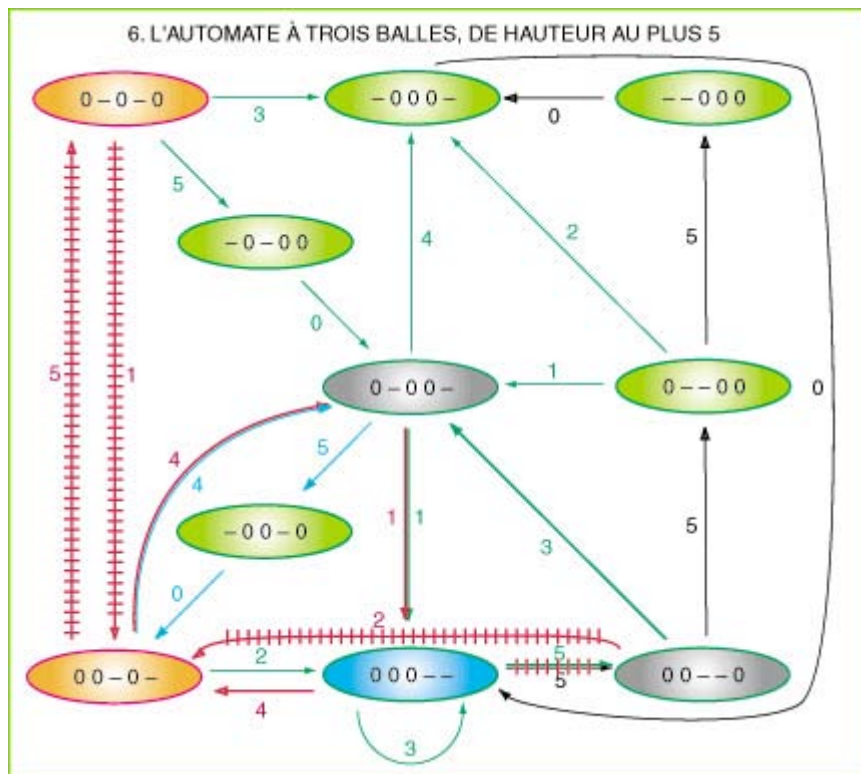
UTILISATION DE L'AUTOMATE

On raconte que plusieurs figures de jonglerie nouvelles ont été découvertes au moment de la construction de l'automate, notamment le 531, figure à trois balles assez complexe, ainsi que le 501, figure à deux balles, qui, depuis lors, a connu un grand succès parmi les jongleurs, car c'est la seule figure à deux balles que l'on ne fait pas du premier coup !

Mais l'apport essentiel de l'automate n'est pas limité aux figures périodiques. En réalité, il permet surtout d'imaginer de nouvelles transitions entre figures. Par exemple, la plupart des jongleurs connaissent le moyen le plus simple pour démarrer une douche (5151...) à partir de la position de départ : lancer deux balles de suite de la même main très haut vers l'autre main.

Cela est effectivement une transition, même si sa traduction dans notre langage contient un petit piège : les lancers très haut vers l'autre main sont manifestement des 5, mais, comme ils sont faits de la même main, c'est que l'autre main est intervenue au milieu, sans rien faire bien qu'ayant une balle en main, ce qui correspond à faire un 2. Ainsi, le démarrage «classique» de la douche consiste, à partir de la position de départ, à faire la suite 525, puis 151515...(rails rouges).

Mais l'automate permet de voir qu'il existe une autre transition, plus directe et plus «propre» vers la douche, qui consiste à faire un 4 à partir de la position de départ. On est alors immédiatement en douche. Ainsi, la variété infinie des figures de jonglerie, qui semblait un peu mise à mal par l'automate, retrouve sa réalité, les transitions entre figures permettant à l'exécutant de montrer son originalité. Nous avons vu l'utilité des



mathématiques dans la théorie de la jonglerie, et nous pourrions nous arrêter ici ; toutefois, pour ceux qui aiment jongler avec les nombres, nous allons ajouter quelques friandises.

SUITES DE MOUVEMENTS VALIDES

Grâce à l'automate, il nous est maintenant facile de savoir si une suite d'entiers donnée est une suite de mouvements valides ou non. En effet, il suffit de la chercher dans l'automate, jusqu'à, soit la trouver et conclure, soit essayer tous les cas et ne pas la trouver... et conclure encore.

Cette recherche est néanmoins fastidieuse, et les mathématiciens ont trouvé un critère simple, qui leur permet de ne pas consacrer leur précieux (?) temps à cette tâche de routine. Ici, nous ne traitons que le cas des suites périodiques valides et montrons le critère abstrait qui permet de décider si la suite est, ou non, valide. En réalité, il existe un autre critère (à peine plus compliqué) permettant de trouver sans doute possible l'état de départ d'une suite, pourvu qu'elle soit «suffisamment» longue.

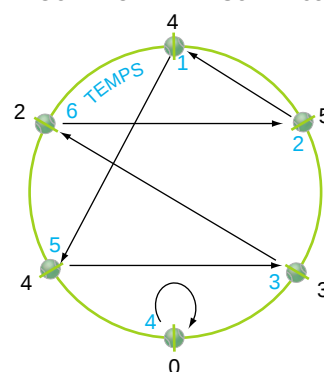
En ce qui concerne les suites périodiques valides, l'idée est la suivante : à chaque «top», une action (lancer de balle ou absence de tel lancer) et une seule se produit. Si l'on imagine ainsi un 0 comme le lancer d'une balle virtuelle, il se produit un lancer, éventuellement virtuel, à chaque «top». Comme la suite

est périodique, il faut aussi qu'une balle lancée dans une des périodes ne retombe pas en même temps qu'une balle lancée dans une autre des périodes.

On représente cela graphiquement de la façon suivante : on place tous les entiers d'une suite (par exemple, 453042) sur un cercle dans le sens des aiguilles d'une montre. On dessine ensuite une flèche partant de chaque entier (cette flèche représente une balle que l'on lance) et arrivant sur l'entier correspondant au moment où la balle retombe.

Ainsi, sur la figure 7, la balle lancée au premier temps (marqué 4) reste quatre temps en l'air et retombe donc à l'autre moment marqué 4. La balle lancée au deuxième temps (marqué 5) retombe cinq temps plus tard, soit sur le premier temps, etc. Le critère que nous avons donné plus haut se traduit sur ce dessin ainsi : chaque

7. FIGURATION DE LA SUITE 453042



flèche arrive à un endroit différent ou, ce qui est équivalent, chaque entier a exactement une flèche qui pointe sur lui. Il existe une traduction purement mathématique à l'aide de modulus, mais elle se ramène à cette vérification une fois décodée.

NOMBRE DE BALLES

Compter le nombre de balles d'une suite périodique supposée *a priori* valide ne nécessite pas d'avoir inventé ni construit l'automate ; cependant, celui-ci permet de conjecturer plus facilement le résultat. En examinant les suites 45051, 45141, 55500 ou 34242, nous constatons que la somme des éléments vaut 15, soit trois (le nombre de balles) fois cinq (la longueur du motif). Plus simplement sur la suite 151515, la somme des éléments est 6 et la périodicité 2, et le quotient $6/2$ est égal à 3. Cette phase (que l'on pourrait qualifier d'expérimentale) terminée, on a une intuition du résultat et, comme souvent en combinatoire, la phase « démonstration » se révèle beaucoup plus simple que la phase « recherche » du résultat.

Énonçons le théorème :

On considère une suite d'entiers $(u_1, \dots, u_n)$ que l'on suppose être une suite périodique valide à n balles. On a alors :

$$u_1 + \dots + u_n = kn.$$

La démonstration de ce résultat n'est pas très difficile et peut se voir graphiquement à l'aide de la figure sur un cercle vue au paragraphe précédent. Prenons l'exemple de la figure 564. Elle se présente de la façon suivante.

Le 5 est envoyé sur le 4 et réciproquement, tandis que le 6 boucle sur lui-même. On a ainsi une *partition* des balles de la figure en deux paquets : celles qui font des 5 et des 4, et celles qui font des 6, ces deux ensembles n'ayant aucune balle en commun, comme le montre le dessin.

Dans la figure 564564564..., le 6 se produit une fois tous les trois temps, alors qu'une balle de cette trajectoire particu-

lière met 6 temps à retomber. Il y a donc deux balles sur cette trajectoire. On constate que $6/3 = 2$. De même, les balles qui font des 5 (puis des 4) font un nouveau 5 après 9 temps ($9 = 5 + 4$). Comme les 5 se produisent une fois tous les trois temps, on a donc trois balles sur cette trajectoire particulière. On constate que $(5 + 4)/3 = 3$.

Ainsi, on a cinq balles en tout sur cette figure et, en rassemblant les deux égalités, on voit maintenant le petit miracle $(6+5+4)/3=5$.

NOMBRE DE FIGURES AUTORISÉES

Utilisons maintenant l'automate pour répondre à une question qui nous tarabuste depuis le début de cet article : la variété des figures de jonglerie vient-elle du nombre immense de celles-ci ou plutôt de l'art du jongleur à les juxtaposer ?

Notons $N(b, n)$ le nombre de suites périodiques valides de longueur n à strictement moins de b balles. Il faut une artillerie très développée (que l'on aura tout loisir de trouver expliquée en détail dans l'article de J. Buhler, D. Eisenbud, R. Graham et C. Wright indiqué en bibliographie) pour calculer effectivement ce nombre, ce qui est étonnant au vu de la simplicité du résultat. En effet, on a :

$$N(b, n) = b^n.$$

Pour calculer le nombre de suites valides de longueur n à exactement b balles, on calcule une petite différence et il vient :

$$N'(b, n) = N(b+1, n) - N(b, n) = (b+1)^n - b^n.$$

On trouve donc qu'il existe 37 figures de longueur 3 à trois balles. Mais il faut encore contourner deux difficultés avant d'avoir un résultat qui fait sens. D'abord, dans ces 37 suites, il y a la suite 333 qui est une suite en réalité de longueur 1. Plus généralement, quand on cherche les suites de longueur n , on compte aussi toutes les suites de longueur d où d est diviseur de n .

De plus, une autre difficulté vient du fait que chaque suite de plus petite période n est comptée plusieurs fois : par exemple, la suite 234 est comptée plusieurs fois, car on compte aussi la suite 342 et la suite 423 qui sont la même suite, simplement décalée dans le temps. De façon générale, on compte n fois une suite de plus petite période n .

En rassemblant les deux remarques précédentes, on trouve donc, si l'on note $S(b, n)$ le nombre de suites différentes de plus petite période n :

$$N'(b, n) = \sum_{d|n} d S(b, d).$$

La fonction de Möbius permet d'inverser une telle formule, et le résultat est

le suivant : si l'on note μ la fonction qui vérifie :

$$-\mu(1) = 1,$$

$$-\mu(p_1 \cdot p_2 \dots p_i) = (-1)^i \text{ si les } p_k \text{ sont des nombres premiers différents,}$$

$$-\mu(n) = 0 \text{ sur les autres entiers,}$$

on a alors la formule :

$$\sum_{d|n} (b, n) = 1/n \sum_{d|n} \mu(d) (b+1)^d - b^d$$

En faisant le calcul pour $b = n = 3$, on trouve qu'il y a 12 figures de plus petite période 3 à trois balles. Ce sont :

900 ; 801 ; 720 ; 711 ; 630 ; 612
603 ; 531 ; 522 ; 504 ; 441 ; 423.

CONCLUSION SUR LA DÉMARCHE UTILISÉE

Nous avons voulu illustrer ici la démarche mathématique classique face à un problème venant d'un domaine très éloigné (ici, la jonglerie) : on commence par modéliser le problème en extrayant les informations principales et en éliminant les inutiles ; cette phase est d'une grande importance, et il est impossible de la négliger dans la mesure où elle conditionne la réussite des autres phases. Ensuite, nous avons traité un problème purement mathématique, et ce avec les moyens *ad hoc*, ici la théorie des automates. Enfin, une fois l'automate construit, nous en avons retiré beaucoup de résultats, autant en ce qui concerne la jonglerie que des questions mathématiques. Le travail présenté ici, comme il est d'usage, ouvre plus de portes qu'il n'en ferme, à la fois dans les domaines mathématiques et artistiques...

Jean-Christophe NOVELLI est chargé de recherches à l'université de Lille. Il est lauréat du **Prix d'Alembert des lycéens 2000** organisé par la Société mathématique de France, que nous remercions de la permission de publier ce texte. L'auteur remercie Florent Hivert avec qui il a travaillé les mathématiques de la jonglerie.

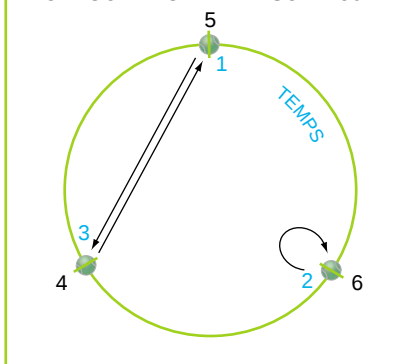
J. BUHLER, D. EISENBUD, R. GRAHAM et C. WRIGHT, *Juggling Drops and Descents*, in *American Mathematical Monthly*, 1994.

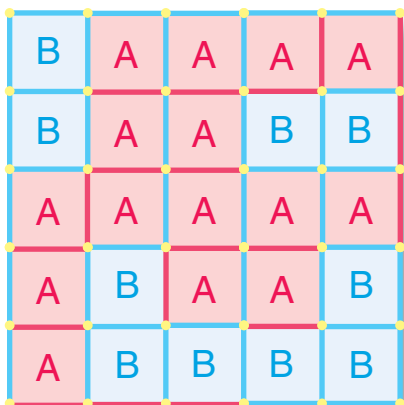
R. EHRENBORG et M. READDU, *Juggling and Applications to q-analogues*, Actes de la 6^e conférence SFCA (New Brunswick, NJ, 1994), *Disc. Math.* 157, (1996), n° 1-3, 107-125.

S.C. KLEENE, *Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata*, in *Automata Studies*, C.E. Shannon et J. McCarthy Eds, Princeton, 1956.

R.P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, Wadsworth and Brooks/Cole, 1996.

8. FIGURATION DE LA SUITE 564





Un jeu d'enfant pas enfantin

IAN STEWART

Dans le jeu des Petits carrés, pratiqué pendant les cours ennuyeux, il existe plusieurs niveaux de jeu.

La complexité mathématique des jeux les plus simples est stupéfiante, par exemple, le jeu des *Petits carrés*. Des générations d'enfants ont joué à ce jeu, mais pas un sur un million n'en a cherché les meilleures stratégies. Le mathématicien Elwyn Berlekamp, de l'Université de Berkeley, a décrit

les nombreuses subtilités de ce jeu dans son nouvel ouvrage *The Dots-and-Boxes Game* (A. K. Peters, 2000).

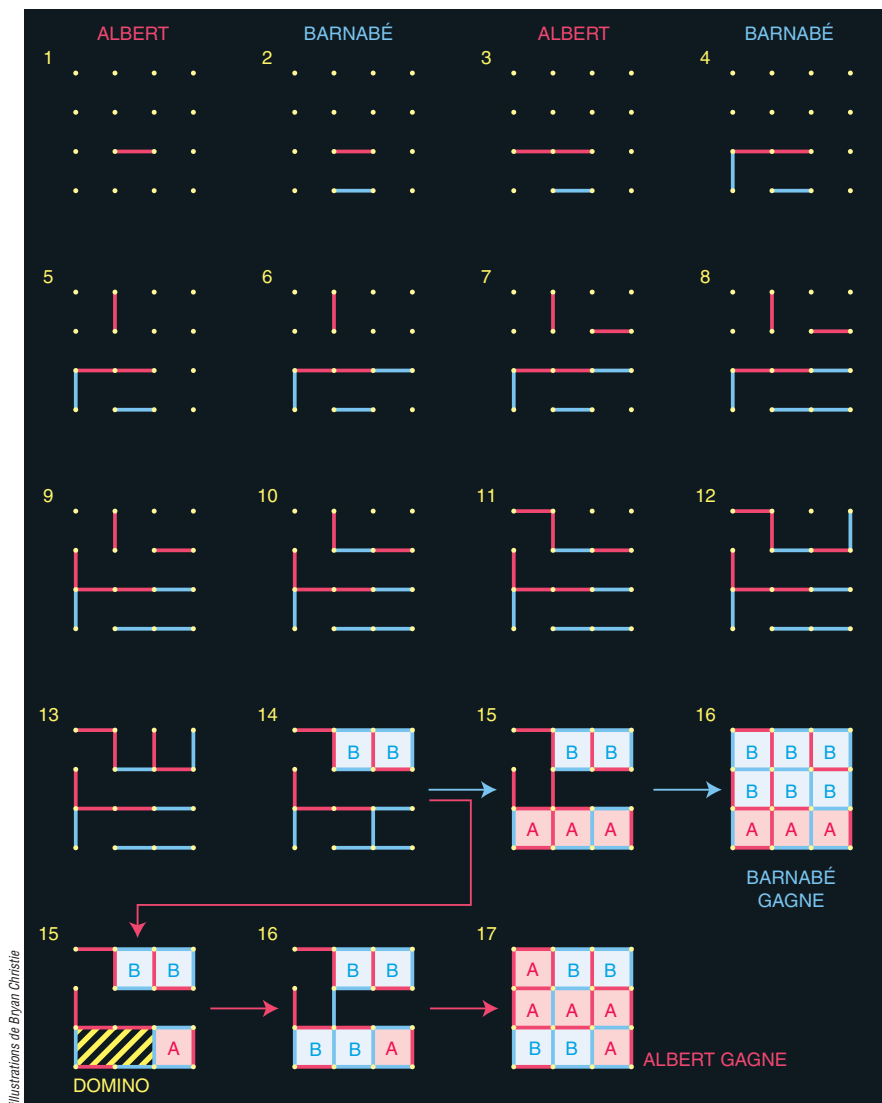
Quelles sont les règles du jeu ? Sur une grille rectangulaire de points, deux joueurs tracent à tour de rôle des segments de droites qui joignent deux points adjacents horizontalement ou verticalement. Lors-

qu'un joueur trace le quatrième segment d'une boîte (un carré de points adjacents), il la marque de son initiale et rejoue, et ce, aussi longtemps qu'il continue à fermer des boîtes. Quand la grille est finie, celui qui a le plus de boîtes a gagné.

Suivons les parties d'Albert et Barnabé. La figure 1 illustre un jeu sur une grille carrée de 16 points où les joueurs utilisent la stratégie la plus simple, nommée le jeu niveau zéro : Albert et Barnabé évitent, aussi longtemps que possible, de tracer le troisième côté d'une boîte et ainsi de donner l'occasion à l'adversaire de créer des boîtes. La grille est alors divisée en une série de chaînes, des régions filiformes d'un carré de largeur (voir la position 12 de la figure 1). Dès qu'un joueur trace une ligne dans une de ces chaînes, l'autre joueur s'octroie une boîte et continue de s'en approprier jusqu'à ce que la chaîne soit entièrement conquise.

À un certain point du jeu, la grille entière est divisée en chaînes ; cet état est dit saturé. Le plus souvent, le joueur suivant coupe la plus petite des chaînes qu'il « offre » ainsi à son adversaire. Ce coup est nommé une « brisure de chaîne ». Le joueur suivant prend ces boîtes, puis brise la plus petite chaîne suivante. Dans l'exemple de la figure 1, à saturation, la grille est divisée en trois chaînes, chacune de deux, trois et quatre boîtes. Au treizième coup, Albert offre la chaîne de deux boîtes à Barnabé. Ce dernier, à son tour, cède la chaîne de trois boîtes à Albert, qui est alors obligé de donner à Barnabé la chaîne de quatre boîtes. Au final, Barnabé gagne par six boîtes à trois.

Dans le jeu de niveau zéro, deux facteurs déterminent le vainqueur : la parité du nombre de chaînes après la saturation, et qui a la main à cet instant du jeu. Par exemple, quand il y a un nombre pair de chaînes à saturation, alors le joueur qui brise la première chaîne gagnera, car, à chaque coup, ce joueur offrira une chaîne plus courte que celle qu'il recevra au tour suivant. En revanche, lorsque le nombre de chaînes est impair à la saturation, le joueur qui brise la première chaîne



1. Une partie typique de « petits carrés » qui atteint un moment critique au quinzième coup. Avec la stratégie de niveau zéro (flèches bleues), Albert perd. Avec une stratégie plus élaborée (flèches rouges), il gagne.