

flèche arrive à un endroit différent ou, ce qui est équivalent, chaque entier a exactement une flèche qui pointe sur lui. Il existe une traduction purement mathématique à l'aide de modulus, mais elle se ramène à cette vérification une fois décodée.

NOMBRE DE BALLES

Compter le nombre de balles d'une suite périodique supposée *a priori* valide ne nécessite pas d'avoir inventé ni construit l'automate ; cependant, celui-ci permet de conjecturer plus facilement le résultat. En examinant les suites 45051, 45141, 55500 ou 34242, nous constatons que la somme des éléments vaut 15, soit trois (le nombre de balles) fois cinq (la longueur du motif). Plus simplement sur la suite 151515, la somme des éléments est 6 et la périodicité 2, et le quotient $6/2$ est égal à 3. Cette phase (que l'on pourrait qualifier d'expérimentale) terminée, on a une intuition du résultat et, comme souvent en combinatoire, la phase «démonstration» se révèle beaucoup plus simple que la phase «recherche» du résultat.

Énonçons le théorème :

On considère une suite d'entiers $(u_1, \dots, u_n)$ que l'on suppose être une suite périodique valide à n balles. On a alors :

$$u_1 + \dots + u_n = kn.$$

La démonstration de ce résultat n'est pas très difficile et peut se voir graphiquement à l'aide de la figure sur un cercle vue au paragraphe précédent. Prenons l'exemple de la figure 564. Elle se présente de la façon suivante.

Le 5 est envoyé sur le 4 et réciproquement, tandis que le 6 boucle sur lui-même. On a ainsi une *partition* des balles de la figure en deux paquets : celles qui font des 5 et des 4, et celles qui font des 6, ces deux ensembles n'ayant aucune balle en commun, comme le montre le dessin.

Dans la figure 564564564..., le 6 se produit une fois tous les trois temps, alors qu'une balle de cette trajectoire particu-

lière met 6 temps à retomber. Il y a donc deux balles sur cette trajectoire. On constate que $6/3 = 2$. De même, les balles qui font des 5 (puis des 4) font un nouveau 5 après 9 temps ($9 = 5 + 4$). Comme les 5 se produisent une fois tous les trois temps, on a donc trois balles sur cette trajectoire particulière. On constate que $(5 + 4)/3 = 3$.

Ainsi, on a cinq balles en tout sur cette figure et, en rassemblant les deux égalités, on voit maintenant le petit miracle $(6+5+4)/3=5$.

NOMBRE DE FIGURES AUTORISÉES

Utilisons maintenant l'automate pour répondre à une question qui nous tarabuste depuis le début de cet article : la variété des figures de jonglerie vient-elle du nombre immense de celles-ci ou plutôt de l'art du jongleur à les juxtaposer ?

Notons $N(b, n)$ le nombre de suites périodiques valides de longueur n à strictement moins de b balles. Il faut une artillerie très développée (que l'on aura tout loisir de trouver expliquée en détail dans l'article de J. Buhler, D. Eisenbud, R. Graham et C. Wright indiqué en bibliographie) pour calculer effectivement ce nombre, ce qui est étonnant au vu de la simplicité du résultat. En effet, on a :

$$N(b, n) = b^n.$$

Pour calculer le nombre de suites valides de longueur n à exactement b balles, on calcule une petite différence et il vient :

$$N'(b, n) = N(b+1, n) - N(b, n) = (b+1)^n - b^n.$$

On trouve donc qu'il existe 37 figures de longueur 3 à trois balles. Mais il faut encore contourner deux difficultés avant d'avoir un résultat qui fait sens. D'abord, dans ces 37 suites, il y a la suite 333 qui est une suite en réalité de longueur 1. Plus généralement, quand on cherche les suites de longueur n , on compte aussi toutes les suites de longueur d où d est diviseur de n .

De plus, une autre difficulté vient du fait que chaque suite de plus petite période n est comptée plusieurs fois : par exemple, la suite 234 est comptée plusieurs fois, car on compte aussi la suite 342 et la suite 423 qui sont la même suite, simplement décalée dans le temps. De façon générale, on compte n fois une suite de plus petite période n .

En rassemblant les deux remarques précédentes, on trouve donc, si l'on note $S(b, n)$ le nombre de suites différentes de plus petite période n :

$$N'(b, n) = \sum_{d|n} d S(b, d).$$

La fonction de Möbius permet d'inverser une telle formule, et le résultat est

le suivant : si l'on note μ la fonction qui vérifie :

$$-\mu(1) = 1,$$

$$-\mu(p_1 \cdot p_2 \dots p_i) = (-1)^i \text{ si les } p_k \text{ sont des nombres premiers différents,}$$

$$-\mu(n) = 0 \text{ sur les autres entiers,}$$

on a alors la formule :

$$\sum_{d|n} (b, n) = 1/n \sum_{d|n} \mu(d) (b+1)^d - b^d$$

En faisant le calcul pour $b = n = 3$, on trouve qu'il y a 12 figures de plus petite période 3 à trois balles. Ce sont :

$$900 ; 801 ; 720 ; 711 ; 630 ; 612$$

$$603 ; 531 ; 522 ; 504 ; 441 ; 423.$$

CONCLUSION SUR LA DÉMARCHE UTILISÉE

Nous avons voulu illustrer ici la démarche mathématique classique face à un problème venant d'un domaine très éloigné (ici, la jonglerie) : on commence par modéliser le problème en extrayant les informations principales et en éliminant les inutiles ; cette phase est d'une grande importance, et il est impossible de la négliger dans la mesure où elle conditionne la réussite des autres phases. Ensuite, nous avons traité un problème purement mathématique, et ce avec les moyens *ad hoc*, ici la théorie des automates. Enfin, une fois l'automate construit, nous en avons retiré beaucoup de résultats, autant en ce qui concerne la jonglerie que des questions mathématiques. Le travail présenté ici, comme il est d'usage, ouvre plus de portes qu'il n'en ferme, à la fois dans les domaines mathématiques et artistiques...

Jean-Christophe NOVELLI est chargé de recherches à l'université de Lille. Il est lauréat du **Prix d'Alembert des lycéens 2000** organisé par la Société mathématique de France, que nous remercions de la permission de publier ce texte. L'auteur remercie Florent Hivert avec qui il a travaillé les mathématiques de la jonglerie.

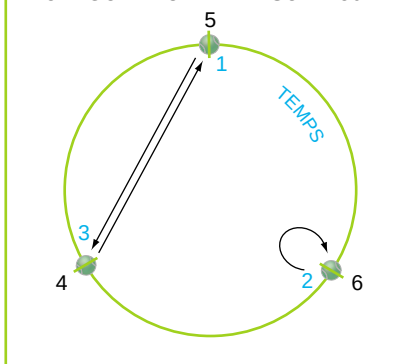
J. BUHLER, D. EISENBUD, R. GRAHAM et C. WRIGHT, *Juggling Drops and Descents*, in *American Mathematical Monthly*, 1994.

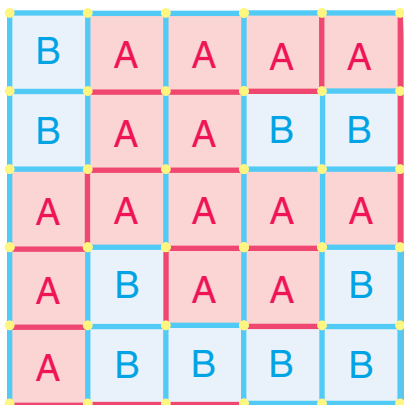
R. EHRENBORG et M. READDU, *Juggling and Applications to q-analogues*, Actes de la 6^e conférence SFCA (New Brunswick, MJ, 1994), *Disc. Math.* 157, (1996), n° 1-3, 107-125.

S.C. KLEENE, *Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata*, in *Automata Studies*, C.E. Shannon et J. McCarthy Eds, Princeton, 1956.

R.P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, Wadsworth and Brooks/Cole, 1996.

8. FIGURATION DE LA SUITE 564





Un jeu d'enfant pas enfantin

IAN STEWART

Dans le jeu des Petits carrés, pratiqué pendant les cours ennuyeux, il existe plusieurs niveaux de jeu.

La complexité mathématique des jeux les plus simples est stupéfiante, par exemple, le jeu des *Petits carrés*. Des générations d'enfants ont joué à ce jeu, mais pas un sur un million n'en a cherché les meilleures stratégies. Le mathématicien Elwyn Berlekamp, de l'Université de Berkeley, a décrit

les nombreuses subtilités de ce jeu dans son nouvel ouvrage *The Dots-and-Boxes Game* (A. K. Peters, 2000).

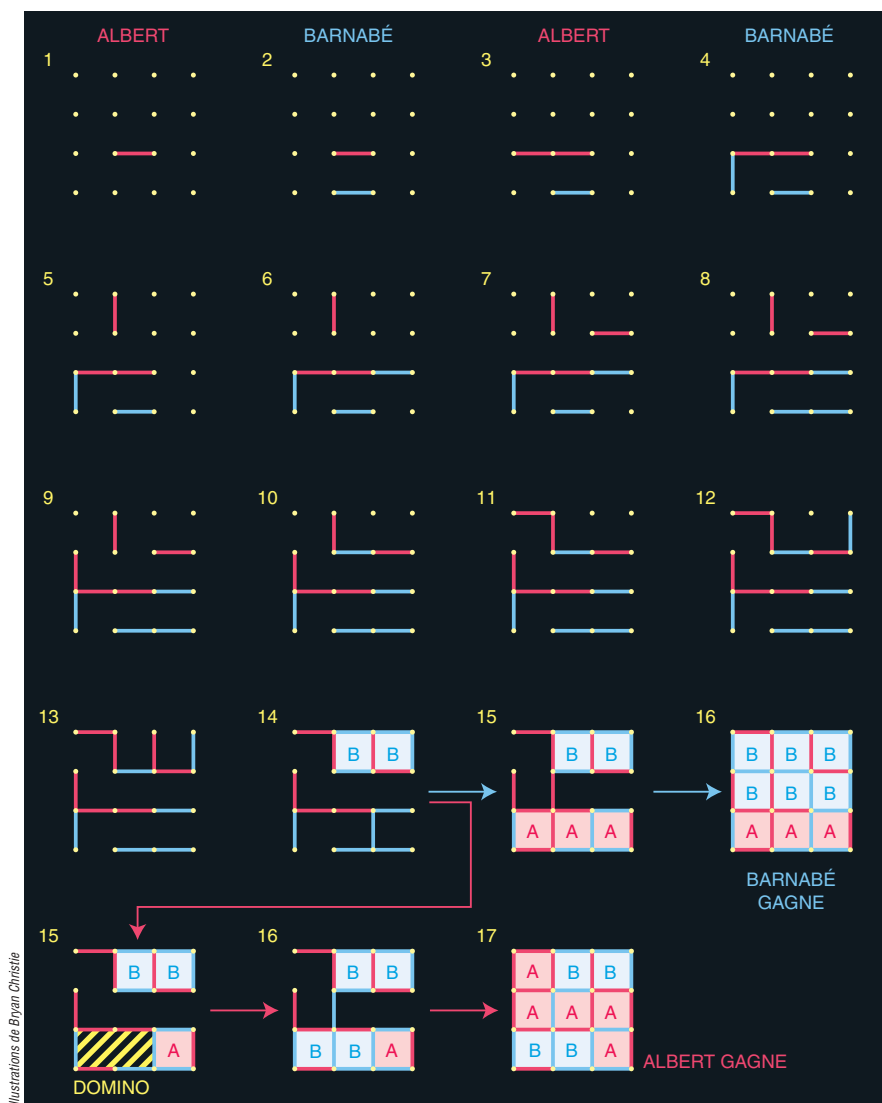
Quelles sont les règles du jeu ? Sur une grille rectangulaire de points, deux joueurs tracent à tour de rôle des segments de droites qui joignent deux points adjacents horizontalement ou verticalement. Lors-

qu'un joueur trace le quatrième segment d'une boîte (un carré de points adjacents), il la marque de son initiale et rejoue, et ce, aussi longtemps qu'il continue à fermer des boîtes. Quand la grille est finie, celui qui a le plus de boîtes a gagné.

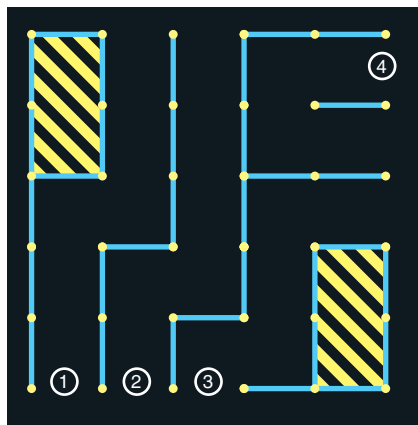
Suivons les parties d'Albert et Barnabé. La figure 1 illustre un jeu sur une grille carrée de 16 points où les joueurs utilisent la stratégie la plus simple, nommée le jeu niveau zéro : Albert et Barnabé évitent, aussi longtemps que possible, de tracer le troisième côté d'une boîte et ainsi de donner l'occasion à l'adversaire de créer des boîtes. La grille est alors divisée en une série de chaînes, des régions filiformes d'un carré de largeur (voir la position 12 de la figure 1). Dès qu'un joueur trace une ligne dans une de ces chaînes, l'autre joueur s'octroie une boîte et continue de s'en approprier jusqu'à ce que la chaîne soit entièrement conquise.

À un certain point du jeu, la grille entière est divisée en chaînes ; cet état est dit saturé. Le plus souvent, le joueur suivant coupe la plus petite des chaînes qu'il « offre » ainsi à son adversaire. Ce coup est nommé une « brisure de chaîne ». Le joueur suivant prend ces boîtes, puis brise la plus petite chaîne suivante. Dans l'exemple de la figure 1, à saturation, la grille est divisée en trois chaînes, chacune de deux, trois et quatre boîtes. Au treizième coup, Albert offre la chaîne de deux boîtes à Barnabé. Ce dernier, à son tour, cède la chaîne de trois boîtes à Albert, qui est alors obligé de donner à Barnabé la chaîne de quatre boîtes. Au final, Barnabé gagne par six boîtes à trois.

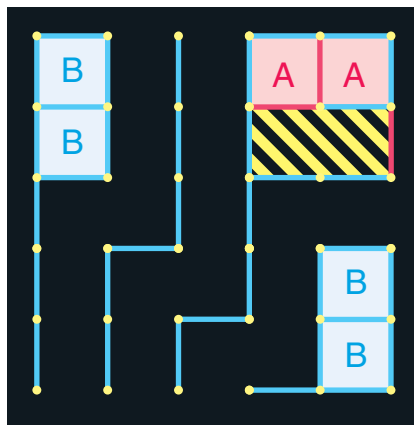
Dans le jeu de niveau zéro, deux facteurs déterminent le vainqueur : la parité du nombre de chaînes après la saturation, et qui a la main à cet instant du jeu. Par exemple, quand il y a un nombre pair de chaînes à saturation, alors le joueur qui brise la première chaîne gagnera, car, à chaque coup, ce joueur offrira une chaîne plus courte que celle qu'il recevra au tour suivant. En revanche, lorsque le nombre de chaînes est impair à la saturation, le joueur qui brise la première chaîne



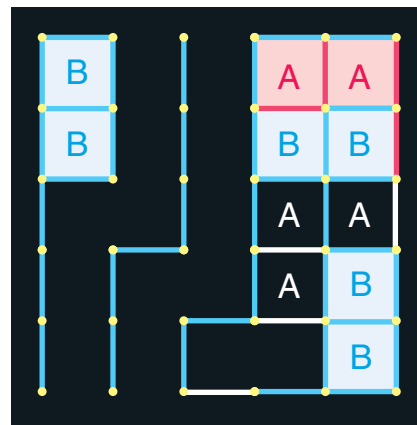
1. Une partie typique de « petits carrés » qui atteint un moment critique au quinzième coup. Avec la stratégie de niveau zéro (flèches bleues), Albert perd. Avec une stratégie plus élaborée (flèches rouges), il gagne.



2. Cette grille (à gauche) a quatre chaînes numérotées de 1 à 4, et deux dominos. Après avoir conquis les deux dominos, Barnabé est confiant, car, à son tour de jouer, le nombre de chaînes est pair : il brise la chaîne (4) de quatre boîtes. Cependant, Albert laisse un



domino que Barnabé ne peut, au tour suivant, que prendre, pour ensuite briser la chaîne (3) de cinq boîtes (à droite). Albert ne prend que trois boîtes (en blanc) et abandonne encore un domino... Finalement, Albert gagnera.



perdra, car son adversaire jouera le dernier coup. Dans notre exemple, le nombre de chaînes est impair et Albert joue le premier : Barnabé bat Albert.

Par ailleurs, l'identité du joueur qui à la main après saturation dépend de la parité du nombre de coups joués auparavant. Quand ce nombre est pair, Albert brise la première chaîne et Barnabé obtient le premier territoire. En revanche, lorsque ce nombre est impair, les rôles sont inversés. Pour gagner, Albert (le premier joueur) doit faire en sorte que le nombre de coups avant d'atteindre la saturation et celui des chaînes après la saturation soient de même parité, alors que Barnabé, qui souhaite aussi gagner, doit espérer que les parités soient différentes. Une étude attentive de la grille, lorsque la saturation est proche, permet souvent d'atteindre un de ces objectifs : cette stratégie est celle de niveau un.

Que faire quand cette stratégie échoue ? Imaginons que malgré ses efforts pour jouer à son avantage, Albert ne puisse empêcher la position du douzième coup de la partie illustrée. Il peut encore gagner en suivant la stratégie de niveau deux. Au treizième coup, il brise la chaîne de deux boîtes. Au coup suivant, Barnabé occupe deux boîtes et brise la chaîne de trois boîtes. Cependant, au quizième coup, Albert décline l'offre des trois boîtes de cette chaîne : il n'en accepte qu'une seule et trace un segment au bas de la grille qui clôt un rectangle, composé de deux carrés, nommé domino.

Cet abandon de deux boîtes dans une chaîne de trois est un sacrifice. Toutefois, ce sacrifice place Barnabé dans une position fatale. Quant au seizième coup, il brise le domino, il gagne deux boîtes, mais il doit aussi rejouer et ne peut que briser la chaîne de quatre boîtes. Albert ramassera ces quatre boîtes et gagnera par cinq boîtes à quatre. Si Barnabé refuse le domino, les conséquences sont pires : tout autre mouvement brise la chaîne

de quatre boîtes et Albert s'emparera d'elles ainsi que du domino et gagnera alors par sept boîtes à deux.

La cause de Barnabé est perdue dès qu'Albert refuse la chaîne de trois dominos, car il ne reste qu'une seule chaîne sur la grille. Qu'en serait-il avec plusieurs chaînes ? Barnabé ne récupérerait-il pas quelques territoires en usant de la même stratégie ? La réponse est « pas toujours » ! La figure 2 montre une grille carrée de 36 points avec deux dominos et quatre chaînes. Quand Barnabé doit jouer, il peut s'emparer des dominos. S'il refuse, Albert peut à son tour les choisir sans aggraver sa situation. Barnabé brise alors la chaîne la plus courte. Puisque le nombre de chaînes est pair, il peut gagner grâce à la stratégie de niveau zéro décrite plus haut. Cependant, Albert choisit de ne prendre que deux des boîtes de la chaîne de quatre (voir la figure 2), il crée un domino avec la structure restante. Cette tactique oblige Barnabé à s'emparer du domino et à briser la chaîne à cinq boîtes. Albert joue

à son tour et ne prend que trois boîtes des cinq offertes par le coup de Barnabé. Il laisse ainsi un autre domino à Barnabé. Aussi longtemps que les chaînes contiennent au moins cinq boîtes, le sort est favorable à Albert qui contrôle le jeu et gagnera (voir la figure à côté du titre).

Une fois le contrôle de la grille obtenu, on le conserve en refusant les deux dernières boîtes de chaque chaîne (sauf bien sûr pour la dernière chaîne). Cette stratégie de niveau quatre peut se résumer ainsi : Albert fait en sorte que la somme du nombre de points de la grille et celui des longues chaînes (d'au moins trois boîtes) à saturation soit paire ; Barnabé tente de rendre cette somme impaire.

Où en sommes-nous dans les 86 pages de l'ouvrage de E. Berlekamp ? À la page sept seulement ! Le jeu est si complexe qu'aucune stratégie gagnante complète n'est connue. Le mathématicien américain le qualifie d'ailleurs de « jeu d'enfants mathématiquement le plus riche au monde », et de loin !

Réactions

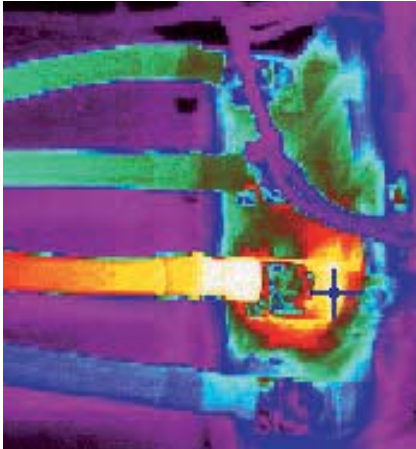
Les réactions à mon article *Paradoxes perdus et retrouvés* (voir *Pour la Science*, août 2000) ne cessent d'affluer. R. Burckel, de l'Université du Kansas, m'a envoyé une lettre à propos du paradoxe de Richard qui utilise la paradoxale définition : « Le plus petit entier positif que l'on ne peut pas définir par une phrase en français de moins de 23 mots. » Un tel nombre doit exister. Pour le trouver, on fait la liste de toutes les phrases d'au plus 22 mots qui définissent un entier unique, puis on détermine le plus petit entier des entiers omis. Toutefois, quel que soit ce nombre, la définition initiale le définit, et elle n'a que 22 mots !

R. Burckel note que ce paradoxe pose un problème, que son créateur, le logicien français Jules Richard, avait remarqué en 1906 : la liste des phrases n'est pas correctement définie. Par exemple, considérons ces deux propositions (j'ai modifié les propositions de R. Burckel et en accepte l'entière responsabilité).

« S'il existe, le nombre indiqué dans la phrase qui suit, et zéro sinon. »

« Le nombre précisé dans la phrase précédente augmenté de un. »

Chaque phrase semble définir un nombre unique ; elles appartiennent donc à la liste. Cependant, si la seconde suit la première, elles sont ensemble contradictoires. La liste n'est donc pas convenablement définie, la phrase de Richard ne définit pas un entier unique et le paradoxe s'évanouit.



Vision de la chaleur

ROLAND LEHOUCQ • JEAN-MICHEL COURTY

Divers systèmes de vision – l'œil lui-même – évaluent avec efficacité le rayonnement thermique émis par les objets.

DE LA LUMIÈRE À LA TEMPÉRATURE

Le rayonnement thermique émis par tout corps trahit sa température. Nos yeux et de nombreux systèmes de vision ou de détection sont capables, dans certaines situations, d'évaluer, à distance, la température des corps chauds. Toutefois, ils sont spécialisés pour certaines longueurs d'onde. Si l'on sait estimer la température d'un corps incandescent, car il rayonne beaucoup d'énergie sous forme de lumière visible, on doit, pour les objets moins chauds, détecter le rayonnement infrarouge qu'il dégage. Certains animaux, par exemple certains serpents ou même des coléoptères, détectent le rayonnement infrarouge pour repérer à la fois leurs prédateurs et leurs proies.

Comment peut-on définir le rayonnement thermique ? Tout corps, dont la température est supérieure au zéro absolu, émet des ondes électromagnétiques dans toute la gamme des longueurs d'onde. Seule la température détermine les caractéristiques de ce rayonnement. Plus précisément, la loi de Stefan stipule qu'un corps chaud rayonne une puissance électromagnétique proportionnelle à la puissance quatrième de la température (mesurée en kelvins). L'énergie se répar-

tit dans toutes les longueurs d'onde ; elle présente un maximum pour une longueur d'onde particulière. La loi de Wien stipule que le produit de la température par la longueur d'onde qui définit ce « pic d'émission » est constant et vaut $2\,896$ micromètres kelvins. Ainsi, un morceau de fer à 700 kelvins (427°C) émet son maximum d'énergie thermique pour une longueur d'onde de $4,1$ micromètres, trop éloignée dans l'infrarouge pour que la partie de son rayonnement émise dans les longueurs d'onde visibles nous soit perceptible. En revanche, quand la température de ce morceau de fer est égale à $1\,400$ kelvins ($1\,127^\circ\text{C}$), son pic d'émission est à une longueur d'onde de $2,1$ micromètres, plus proche du rouge (la plus grande longueur d'onde visible est vers $0,8$ micromètre) : nous le voyons alors luire. À $1\,400$ kelvins, la masse de fer rayonne 16 fois plus d'énergie qu'à 700 kelvins. Cet exemple montre qu'un corps émet l'essentiel de son rayonnement thermique pour une longueur d'onde d'autant plus petite qu'il est chaud.

Le Soleil, notre principale source de lumière, émet son maximum de puissance dans la partie jaune du spectre visible (pic vers $0,5$ micromètre). Ceci correspond à

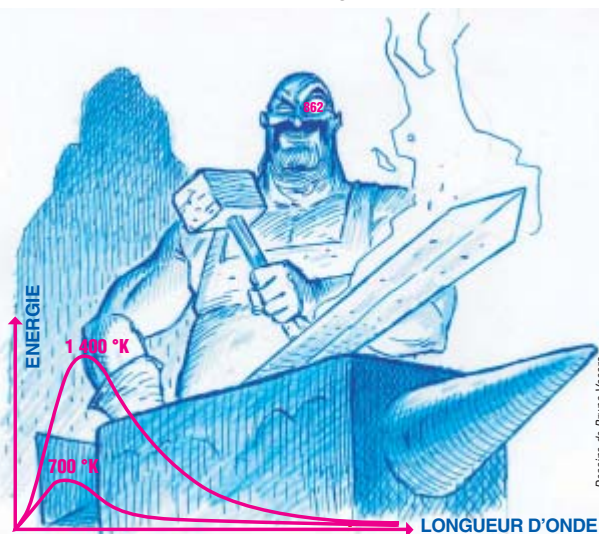
une température de $5\,770$ kelvins. Les braises d'un feu de bois émettent pour l'essentiel dans l'infrarouge, pour des longueurs d'onde proches de 3 micromètres. Leur maximum d'émission est toutefois suffisamment proche du domaine visible (de $0,4$ à $0,8$ micromètre) pour qu'elles émettent aussi un peu de lumière rouge. Elles cessent d'émettre de façon perceptible à nos yeux lorsque leur température devient inférieure à 500°C . Caractérisé par une température de surface de 25°C , notre corps émet lui aussi uniquement dans le domaine infrarouge (vers 10 micromètres). C'est pourquoi nous sommes invisibles dans l'obscurité.

Lorsqu'un corps chaud émet beaucoup de rayonnement, on peut en faire l'analyse spectrale, c'est-à-dire étudier la répartition de l'énergie dans les différentes longueurs d'onde. Celle-ci livre sa température. Deux situations se présentent. La première – la plus simple – est celle où il est possible de détecter le pic d'émission. Une fois celui-ci situé avec précision sur l'échelle des longueurs d'onde, la loi de Wien dicte la température du corps émetteur. De nombreux appareils de mesure exploitent ce principe. C'est ainsi que les physiciens ont, par exemple, déterminé la température de la photosphère du Soleil. Nous ne faisons pas autre chose, quand, apercevant un morceau de fer chauffé à blanc, nous concluons qu'il est proche de son point de fusion (vers $1\,800$ kelvins).

Toutefois, la détection du pic d'émission est souvent impossible : on est alors dans la seconde situation, où l'on cherche à évaluer une température en l'absence d'un pic d'émission. Ainsi, nous-mêmes, ou plutôt nos yeux, ne détectent pas les pics d'émission quand ils se trouvent en dehors du domaine visible.

La détermination des longueurs d'onde émises dans le domaine visible, c'est-à-dire de la « couleur perçue », s'impose alors. Avec un peu d'expérience, nous pouvons apprendre à estimer la température d'un corps incandescent, dont la température est supérieure à 500°C . Le souffleur de verre et le forgeron sont des experts : ils maîtrisent l'art de déterminer la température des matériaux qu'ils travaillent ; celle-ci guide le façonnage.

Toutefois, la façon dont nos yeux fonctionnent limite notre capacité d'évaluation de la température aux seuls corps qui émettent un rayonnement intense. Notre vision, ainsi que celle de la plupart des animaux, est bien adaptée à la lumière solaire ; la sensibilité est maximale dans la gamme des longueurs d'onde où le Soleil rayonne le plus d'énergie. Quand la luminosité est suffisante, nous pouvons distinguer toutes les couleurs grâce à l'un des deux types de nos cellules visuelles, les cônes. Ces



Dessins de Bruno Vacaro

Un forgeron expérimenté est capable d'évaluer à l'œil nu la température du métal qu'il travaille. Il doit le marteler à la bonne température pour être certain d'obtenir un matériau de qualité.