

de la culture, des musées régionaux et municipaux, mais aussi des musées privés. Il instaurerait un principe de libre circulation des objets entre ces établissements et permettrait de détruire la cohérence des collections constituées par chacun d'eux, selon son projet scientifique et/ou muséographique. Notre crainte est que, par des échanges judicieux, le quai Branly, entre autres, soit dessaisi au profit de partenaires privés, très présents – et en force – dans son Comité d'acquisitions.

Nous devons exiger le retrait du projet de loi dit des «Musées de France» qui vise à détruire les musées nationaux, à remettre à la Culture les musées de l'Éducation nationale et qui tend à instaurer une dispersion irrationnelle, ingérable et dangereuse de leurs collections.

Nous devons exiger le retrait du projet actuel de statut du *Muséum*, qui permettrait son démantèlement et, bien sûr, celui du *Musée de l'homme*.

Nous devons exiger que les collections nationales de sciences naturelles et humaines fassent l'objet d'actions déterminées, financées au niveau nécessaire, de restauration, de conservation et de valorisation, là où elles ont été constituées, dans la continuité historique du projet qui les a créées et sous la seule autorité des enseignants-chercheurs, des conservateurs et des techniciens spécialisés qualifiés pour ces opérations.

FÉDÉRER LES VOLONTÉS?

Le gouvernement du Front populaire a, dans un élan culturel et éducatif, créé des musées comme le *Palais de la Découverte* et le *Musée de l'homme*. Le gouvernement socialiste actuel va-t-il organiser leur démantèlement? Ne serait-ce pas le rôle des politiques que de fédérer les volontés des serviteurs de l'État en dépassant les incompréhensions primaires entre gestionnaires, chercheurs et syndicats, qui *in fine* travaillent dans un but commun? Combien des plus brillants chercheurs français n'ont-ils pas découvert leur vocation lors de la visite des musées?

Il serait insensé, voire criminel, de briser l'héritage, précieux pour la science, l'enseignement et la pensée, de Jussieu, Buffon, Lamarck, Cuvier, Geoffroy St-Hilaire, Daubenton, Becquerel, Claude Bernard, Roger Heim, Paul Rivet, Georges Henri Rivière, Griaule, Leiris, Leroi-Gourhan et Théodore Monod, pour ne citer que quelques noms...

André Langaney est professeur d'Anthropologie au Musée de l'homme et à l'Université de Genève.



Clio

l'art de voyager

Des conférenciers historiens ou spécialistes d'art vous feront partager leur passion.

Des voyages en petits groupes pour profiter des découvertes dans les meilleures conditions.

Plus de 200 circuits vers 80 pays, riches en trésors artistiques ou archéologiques.

27, rue du Hameau - 75015 Paris
Tél : 01 53 68 82 82 - Fax : 01 53 58 82 60
Lic. 075 95 0468 - Mél : information@clio.fr

Je souhaite recevoir gratuitement le catalogue général des circuits Clio.

Nom : _____

Prénom : _____

Adresse : _____

Code postal : _____

Ville : _____

■ POUR LA SCIENCE

VOTRE ABONNEMENT 100 % NUMÉRIQUE

1 an au prix de 48 €

soit **4 € seulement par numéro** au lieu de ~~5,20 €~~

Pour consulter et télécharger
en toute liberté sur www.pourlascience.fr
les 12 prochains numéros
dès leur parution.



Oui, je m'abonne
à *Pour la Science* 100 % numérique
1 an (12 numéros) pour 48 €

Je préfère découvrir toutes
les offres d'abonnement disponibles
en cliquant ici.



L'intégrale de Lebesgue a cent ans

ROBERT RYAN

Par un changement de perspective et inspiré par la nouvelle mesure de Borel, Henri Lebesgue définit une nouvelle intégrale qui correspond à l'intuition des probabilistes.

Henri Lebesgue (1875-1941) expose son «intégrale» dans une courte note des *Comptes Rendus des Séances de l'Académie* du 29 avril 1901. La note fera date : en moins de trois pages, les aspects essentiels d'une nouvelle définition de l'intégrale sont exposés. Nous allons relire «cette note sur l'intégrale de Lebesgue» en examinant ses différences avec les définitions antérieures des intégrales de Cauchy et de Riemann.

Pour des raisons qui tiennent à l'enseignement des mathématiques, les lemmes préliminaires, le symbolisme des définitions de limites et les précautions épistolaires des spécialistes de la rigueur, l'intégrale de Lebesgue a été le cauchemar de l'étudiant et, dans une mesure moindre, la plaie de l'enseignant qui avait quelques difficultés à intéresser son auditoire à un exposé où la forêt des définitions cachait l'arbre de l'idée. Pourtant les notions de base, dégagées de la gangue, sont compréhensibles et presque «naturelles», comme on dit...

L'INSPIRATION DE BOREL

Lebesgue a su tirer parti de la nouvelle théorie de la mesure décrite par Émile Borel (1871-1956) trois ans auparavant et qu'il généralisera. Il n'existe pas un type de mathématicien standard : Borel et Lebesgue étaient des tempéraments opposés. Borel vivait dans le siècle, aimant les honneurs et les engagements politiques : il sera député et, brièvement, ministre de la Marine dans le cabinet de Paul Painlevé. Lebesgue, mathématicien créatif, donc révolutionnaire, n'avait pas la vie privée correspondant à son statut de mathématicien hors ligne et ne fréquentait pas, comme Borel, les salons d'Anna de Noailles et des intellectuels de l'époque. Lebesgue, plus renfermé, se souciait peu de sa notoriété en dehors du domaine mathématique. Des échanges de lettres pendant la Première

guerre mondiale réveillèrent des querelles de paternité scientifique entre Borel et Lebesgue sur la définition des ensembles de mesure nulle...

DE LA LONGUEUR À LA MESURE

Comme il est de règle en mathématiques, l'idée de mesure correspond à une généralisation de l'idée de longueur, ou, à plusieurs dimensions, à celles d'aire, de volume, etc. Cette généralisation correspond à une question souvent posée par les enfants, quand on leur définit ce qu'est une aire ou une longueur, et qu'ils s'interrogent : comment déduire une valeur d'un ensemble de points que l'on ne peut compter, comment des ensembles de points peuvent-ils «mesurer» quelque chose ?

À un ensemble de points sur une droite, les mathématiciens associent une mesure qui a les propriétés d'une longueur : la mesure d'une réunion dénombrable d'ensembles disjoints est la somme de la mesure de ces ensembles.

Un ensemble de points est, selon Borel, de mesure nulle si l'on peut enfermer tous les points de l'ensemble dans des intervalles (en nombre fini ou infini) dont la somme est inférieure à tout petit nombre donné par avance. La mesure de l'ensemble vide est nulle, comme on doit s'y attendre. Toutefois la réciproque n'est pas vraie : un grand nombre d'ensembles ont pour mesure 0 et ne sont pas vides. Ainsi l'ensemble constitué par un point est de mesure 0, car on peut le recouvrir par un segment de longueur arbitrairement petite.

Dès que l'on a envisagé, après Cantor, les deux types d'infinis des points sur un segment de droite, les points d'abscisse rationnelle (infinité dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numérotter) et les points d'abscisse non rationnelle (infinité non dénombrable), la question pertinente était de s'interroger sur la «mesure» de ces différents ensembles.

Quelle est la mesure de l'ensemble de points d'abscisse rationnelle ? Comme l'ensemble des nombres rationnels n'est pas composé d'un ensemble fini d'intervalles, sa «longueur» n'est pas définie *stricto sensu*, mais sa mesure l'est.

Comme les nombres rationnels sont dénombrables, chaque nombre rationnel peut être recouvert par un des intervalles de longueur $1/8$, $1/16$, $1/32$... etc., la longueur totale de ces intervalles étant égale à $1/4$ (somme d'une série géométrique de raison 2). Donc tous les rationnels sont inclus dans une somme infinie d'intervalles de longueur $1/4$. Mais les nombres rationnels sur $[0;1]$ pourraient aussi être recouverts par une série d'intervalles de longueur $1/16$, $1/32$, $1/64$... etc., et donc par un segment de longueur $1/8$. En utilisant des séries d'intervalles de longueur de plus en plus petite, la longueur des segments recouvrant l'ensemble des rationnels est aussi petite que l'on veut. Donc l'ensemble des rationnels est de mesure nulle. Bien entendu,



quand il s'agit de traiter de l'infini, il faut prendre des précautions mathématiques, ce qu'a fait Borel.

La mesure de Borel est une extension à des ensembles plus généraux que des segments : elle « mesure » ces ensembles et garde le principe d'additivité mentionné précédemment, c'est-à-dire que la mesure d'une réunion dénombrable d'ensembles disjoints est la somme des mesures de ces ensembles. Cette idée de Borel aidera Lebesgue à définir son intégrale : dans une intégrale, il est deux quantités qui jouent un rôle prépondérant, la mesure de l'intervalle de variation de la fonction et les valeurs de la fonction sur cet « intervalle ».

LE PROBLÈME DE LA FONCTION DE DIRICHLET

Lebesgue voulait intégrer des « fonctions » plus sauvages que les fonctions habituelles (les fonctions continues que l'on peut dessiner sans lever le crayon). Parmi les fonctions discontinues, l'une des plus pathologiques (à l'époque) est la fonction inventée par le mathématicien allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) : cette fonction, définie sur le segment $[0,1]$, vaut 1 en tous points d'abscisse irrationnelle et 0 sur tous les points d'abscisse rationnelle de l'intervalle $[0,1]$. Pour cet exposé, nous examinerons une autre fonction de Dirichlet, égale à 1 sur les rationnels et à 0 sur les irrationnels.

Cette fonction est impossible à dessiner puisque, dans chaque intervalle, aussi petit soit-il, il y a une infinité de nombres rationnels et une infinité plus grande encore de points d'abscisse irrationnelle. Fontenelle écrivait en 1727, dans la préface à ses *Éléments de la*



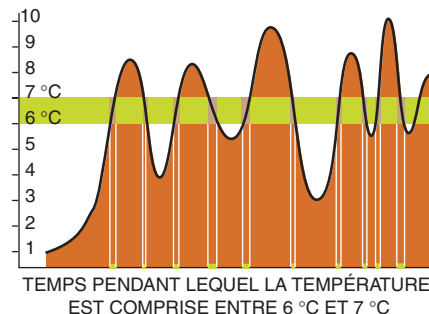
Lejeune Dirichlet

géométrie de l'infini, que les nombres irrationnels « se trouvent en une quantité sans comparaison plus grande que les nombres rationnels ». L'intuition probabiliste nous incite à penser que si l'on prend au hasard un point sur le segment $[0,1]$, sa valeur sera irrationnelle et que la valeur de la fonction considérée sera 0 « en moyenne ».

LES INTÉGRALES DE CAUCHY ET DE RIEMANN

L'intégrale de Riemann (1826-1866) est une généralisation de l'intégrale de Cauchy (1789-1857) publiée en 1823 dans le *Résumé des leçons données à l'École polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Le problème initial est de calculer l'aire située sous une courbe définie par une fonction $f(x)$. Cauchy remplace l'aire située sous la courbe de $f(x)$ par la somme des aires de rectangles jointifs. La base de chacun de ces rectangles (un intervalle) est une portion du segment $[a,b]$ et la hauteur est égale à la valeur de la fonction au « début » du segment. Cauchy montre (1) que la valeur de l'aire des rectangles additionnés est égale à celle sous la courbe continue quand la longueur de la plus grande base des rectangles tend vers zéro, et (2) que cette valeur limite ne dépend pas du découpage en rectangles.

Cauchy « montre » plus qu'il ne démontre, car il suppose implicitement que la fonction *est* uniformément continue. Cauchy ne sait pas intégrer des fonctions qui sont discontinues en un nombre infini de points, c'est-à-dire qui bondissent en



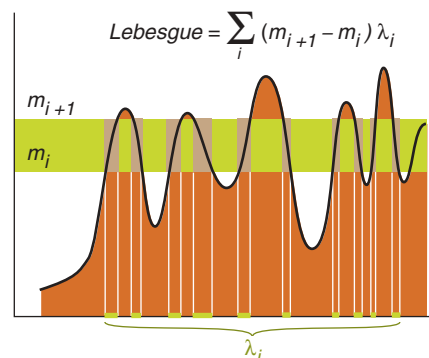
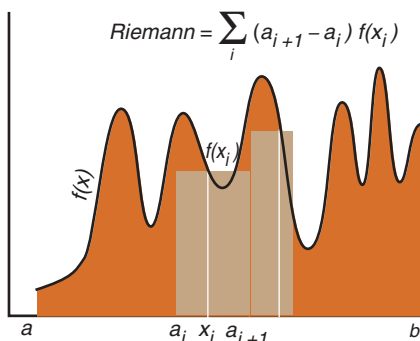
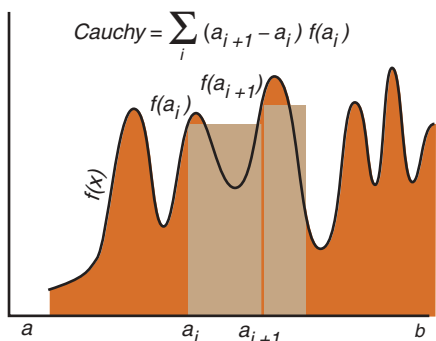
TEMPS PENDANT LEQUEL LA TEMPÉRATURE EST COMPRISE ENTRE 6 °C ET 7 °C

La température à midi durant le mois de février 1998 a varié entre 1 et 10 °C. Cherchons les intervalles de temps où la température est comprise entre 6 et 7 °C. Pour ce faire, nous coupons la courbe des températures par deux parallèles de valeurs 6 et 7 °C et reporterons les valeurs du temps correspondant à cet intervalle de température. La somme des durées pour lesquelles la température est comprise entre ces limites est égale à λ_6 . Puis nous continuerons pour d'autres découpages, de 6 à 7 °C, de 7 à 8 °C et ainsi de suite... La moyenne de la température avec ce découpage sera $1\lambda_1 + \dots + 6\lambda_6 + 7\lambda_7 + \dots + 9\lambda_9$, divisée par la somme des λ_i . Nous pouvons prendre des intervalles de températures de plus en plus petits et finalement, par un passage à la limite, nous retrouvons la définition de l'intégrale de Lebesgue.

chaque point d'une valeur u à une valeur v .

La définition de l'intégrale par Riemann est une variation subtile de l'intégrale de Cauchy. Riemann prend pour hauteur du rectangle défini sur un intervalle, non plus la valeur du début de l'intervalle, mais une valeur de la fonction quelconque à l'intérieur de chaque intervalle. Quand on fait tendre la valeur maximale des intervalles vers zéro, et que la limite de la somme ne dépend ni du découpage en intervalles ni de la valeur des hauteurs, l'intégrale de Riemann existe. Il est patent que la valeur

Gaston Darboux



Dans l'intégrale de Cauchy, on prend une succession d'abscisses a_i prises entre les deux points du domaine de définition de la variable, et, à chaque valeur de a_i , on associe la valeur de la fonction $f(a_i)$. La valeur de l'intégrale entre a et b est égale à la somme $\sum (a_{i+1} - a_i) f(a_i)$ quand les longueurs des intervalles $a_{i+1} - a_i$ tendent vers zéro. Dans l'intégrale de Riemann $\sum (a_{i+1} - a_i) f(x_i)$, on prend pour valeur de la

fonction une valeur x_i comprise entre a_i et a_{i+1} . L'intégrale de Lebesgue consiste à découper la fonction en tranches horizontales entre deux valeurs m_i et m_{i+1} , à multiplier la différence par la mesure λ_i de l'intervalle sur l'axe des abscisses correspondant à ces deux valeurs et à sommer toutes les valeurs quand l'intervalle $m_{i+1} - m_i$ tend vers zéro, soit $\sum (m_{i+1} - m_i) \lambda_i$.

des deux intégrales sont égales pour des fonctions continues, mais, avec la définition de Riemann, les mathématiciens savent intégrer des fonctions plus générales incluant par exemple des fonctions qui ont un nombre infini de discontinuités.

Avec l'intégrale de Riemann, on ne sait pas intégrer la fonction de Dirichlet, car sur chaque petit intervalle la fonction f oscille entre 0 et 1 : quel que soit l'intervalle, et aussi petit soit-il, il y a une infinité de valeurs rationnelles de l'abscisse pour lesquelles la valeur de la fonction de Dirichlet vaut 1 et une infinité de valeurs irrationnelles pour lesquelles la valeur de la fonction vaut 0. L'intégrale de Riemann dite «supérieure», selon les définitions de Darboux, est égale à 1 si l'on choisit des valeurs de l'abscisse x_i parmi les rationnels et l'intégrale «inférieure» est égale à 0 si l'on choisit les valeurs de x_i parmi les irrationnels. Or tout segment, aussi petit soit-il, contient une infinité de rationnels et une infinité plus grande encore d'irrationnels : la valeur de l'intégrale de Riemann de la fonction de Dirichlet n'est pas définie.

L'INTÉGRALE DE LEBESGUE

Lebesgue a un point de vue différent : au lieu de découper le segment $[a, b]$ en parties, il découpe en tranches l'intervalle des valeurs de la fonction $f(x)$ et réunit dans un même lot les «intervalles» pour lesquels la fonction est comprise entre deux valeurs. Puis Lebesgue définit deux sommes et quand ces deux sommes ont la même limite (alors que la valeur du plus grand des intervalles de valeur de la fonction tend vers zéro), la fonction f est «intégrable».

Dans sa note, Lebesgue donne un exemple particulièrement simple d'une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ et croissante, pour laquelle les deux définitions des intervalles à la Riemann et à la Lebesgue coïncident. Bien évidemment, Lebesgue voulait élargir les ensembles de fonctions qu'il pouvait intégrer par son découpage. L'exemple le plus simple est une fonction de Dirichlet.

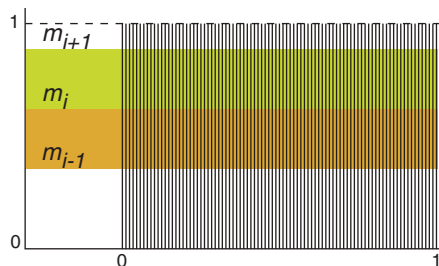


Illustration du calcul de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction de Dirichlet qui a pour valeur 1 sur l'ensemble des rationnels du segment $[0, 1]$ et 0 sur les irrationnels du même segment.

L'intégrale de Lebesgue de la fonction de Dirichlet considérée revient à additionner deux valeurs sur des ensembles différents, l'une égale à 1 pour les nombres rationnels sur un ensemble de mesure nulle (donc cette contribution des rationnels est égale à zéro), et l'autre égale à 0 sur l'ensemble des irrationnels dont la mesure est égale à 1, mais cela n'a guère d'importance, car cette contribution est évidemment nulle, la fonction étant nulle en tous ces points. En conclusion, l'intégrale de Lebesgue de la fonction de Dirichlet est nulle. Comme il y a infiniment plus de points d'abscisse irrationnelle (une infinité non dénombrable) sur le segment $[0, 1]$ que de points d'abscisse rationnelle, la valeur nulle de l'intégrale de Lebesgue correspond à ce que les physiciens et les probabilistes entendent par «moyenne».

LEBESGUE ET YOUNG

L'idée de Lebesgue de découper «en tranches» la fonction avait été émise presque simultanément par William Henry Young (1863-1942). Toutefois, comme l'indique Hardy, le développement de la théorie de l'intégration à la Lebesgue est l'œuvre de Lebesgue et nul ne penserait à diminuer sa gloire. Young reconnaît l'antériorité et la suprématie des travaux de Lebesgue, et l'expression *l'intégrale de Lebesgue* est sa dénomination : on ne saurait être plus galant.

Henri Lebesgue est né à Beauvais en 1875. Son père, employé dans une imprimerie était un bibliophile et avait accumulé un bon nombre de livres dont le jeune Henri fit son miel. Henri se retrouva orphelin alors qu'il était encore au lycée et il ne put étudier qu'à la faveur de bourses successives jusqu'à son entrée à l'École normale supérieure à l'âge de 19 ans. Il fut maître de conférences à Rennes jusqu'en 1906, chargé de cours puis professeur à l'Université de Poitiers et enfin professeur au Collège de France.

L'esprit critique de Henri Lebesgue se manifesta alors qu'il était étudiant, à propos des surfaces développables, comme le cylindre ou le cône, qui peuvent être aplanis ou «développés» sur un plan.

Dans la géométrie différentielle de l'époque, une surface développable devait avoir des régularités contraignantes, par exemple un plan tangent continu. Lebesgue démontra que ces conditions n'étaient pas nécessaires et pour convaincre ses condisciples de l'École normale, il froissait une feuille de papier de façon à obtenir une surface très irrégulière



René Baire

qui pouvait évidemment être développée sur un plan en enlevant tous les plis puisque la surface initiale de la feuille était plane. La preuve de Lebesgue, formalisée en 1899 dans *Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan*, avait scandalisé Darboux.

Les «mandarins» allaient être également interloqués par sa définition de l'intégrale...

LA CLASSIFICATION DES FONCTIONS

Donc Lebesgue savait intégrer des fonctions «sauvages» à la Dirichlet et la question de la définition d'une «fonction» se reposait avec régularité. Lebesgue s'intéressa à la classification des fonctions donnée par René Baire en 1898. Dans la première catégorie de fonctions, selon Baire, étaient les fonctions continues, la classe C_0 . La limite de fonctions continues peut être discontinue, comme ne l'avait pas vu Cauchy. Les fonctions limites, pour chaque valeur de l'abscisse de fonctions continues, étaient classées par Baire dans la classe C_1 . Les fonctions limites des fonctions C_1 faisaient partie de la classe C_2 . Et ainsi de suite... Lebesgue montra l'existence de fonctions appartenant à chaque classe définie par Baire, et montra aussi qu'il existait des fonctions n'appartenant à aucune de ces classes : selon Lebesgue, la classification de Baire n'incluait pas toutes les fonctions de la variable réelle.

La généralité de la classification de Baire fut l'objet d'un conflit avec Lebesgue, qui n'était décidément pas d'un caractère très amène. Quant à Baire, sa neurasthénie en faisait une victime facile. Il se plaignait du fait que ses «idées ne prennent de l'importance que quand Lebesgue... y met le doigt».

PRIMITIVES ET DÉRIVÉES

Au début de sa *Note* Lebesgue traite de la généralisation de l'intégrale de Riemann dans une toute autre direction.

Dans le cas de fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrale et de fonction primitive. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne sont pas intégrables, au sens de Riemann. Le problème de la recherche de fonctions «primitives» n'est donc pas résolu par l'intégration et l'on peut désirer une définition de l'intégrale comprenant comme cas particulier celle de Riemann et permettant de résoudre le problème des fonctions primitives.

La primitive d'une fonction f est une fonction P telle que sa dérivée P' est égale à f . Lebesgue affirme qu'une fonction f peut avoir une dérivée f' qui n'est pas intégrable au sens de Riemann. Un exemple en est donné par le mathématicien italien Vito Volterra qui utilise un ensemble de Cantor.

En définitive, il y avait ainsi deux grandes idées dans la Note de Lebesgue.

La première était la partition de la fonction – et non de la variable – pour calculer la valeur de l'intégrale de la fonction dans un intervalle. Dès que l'on pense à cette partition de la fonction, la considération d'une mesure des «intervalles» des abscisses correspondant à ce découpage en découle naturellement.

La seconde est la définition de la mesure d'un ensemble et l'introduction des ensembles mesurables. Il existe néanmoins, montre Lebesgue, des ensembles non mesurables... mais la marge de ce texte est trop petite pour que nous puissions en détailler un exemple. Lebesgue a étendu la notion d'ensemble mesurable bien au-delà de ce que considérerait Borel, par exemple il considère que toute partie d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle (ce qu'il fallait prouver, car il existe des ensembles pathologiques de mesure 0).

Pourquoi Lebesgue n'enseigna jamais sa théorie de l'intégrale? Peut-être par modestie, peut-être parce que les exemples physiques (par exemple) comme le mouvement brownien où elle est indispensable n'existaient pas encore. Un roman c'est un théorème, disait Gide, et si les théorèmes étaient des romans? La définition de l'intégrale est une longue histoire qui connaîtra d'autres rebondissements avec les travaux de Radon, Daniell, Carathéodory, et surtout des probabilistes, au premier rang desquels Wiener et Kolmogorov.

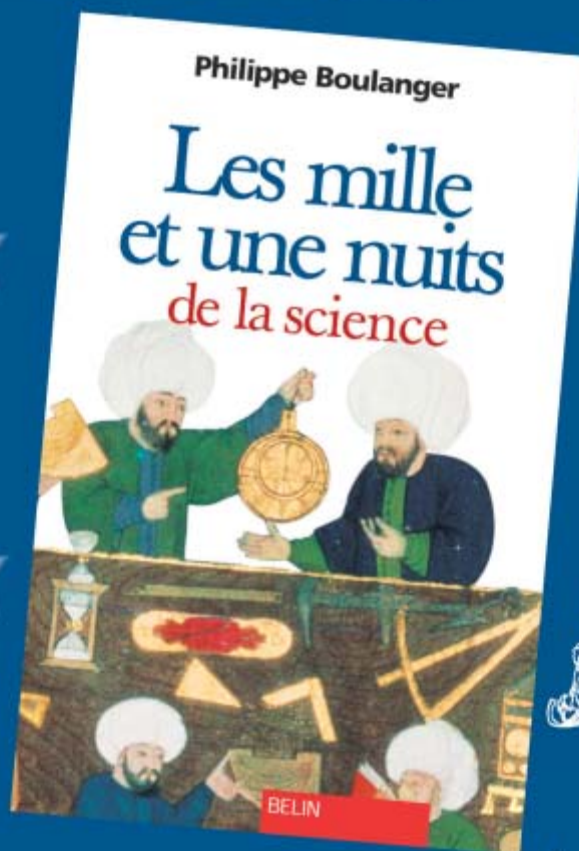
Nous remercions Jean-Pierre Kahane de l'aide précieuse apportée à la rédaction de cet article.

Tous les documents concernant la genèse de l'intégrale de Lebesgue sont contenus dans les cinq volumes des œuvres scientifiques de Lebesgue publiés par la revue de Genève *L'enseignement mathématique*, complétés par les *Lettres de Lebesgue à Borel* datées de mai 1901 à décembre 1914, publiées par Pierre Dugac et Bernard Bru dans les *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*.

La thèse de Pierre Dugac est un ensemble parfait traitant des *Fondements de l'analyse de Cauchy à Baire* (1978).

René Baire, *Œuvres scientifiques*, Bordas, 1990.

Entrez dans l'ambiance orientale
des mille et une nuits et laissez-vous
charmer par l'imagination
de Shéhérazade contant la science
et les tribulations des savants



«Dans ce livre, Philippe Boulanger, Directeur de la revue *Pour la Science*, réussit le tour de force de vulgariser des concepts difficiles en charmant son lecteur par une subtile danse... des neurones».

Hervé Ponchelet
Le Point

Code 002445 • 240 pages • Prix 100 F
Voir bon de commande p. 98

BELIN • POUR LA SCIENCE

