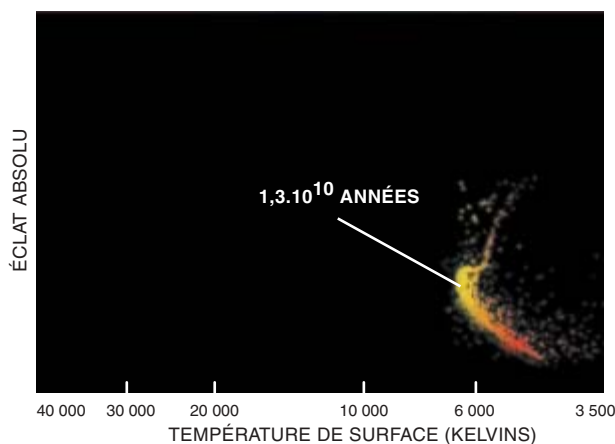
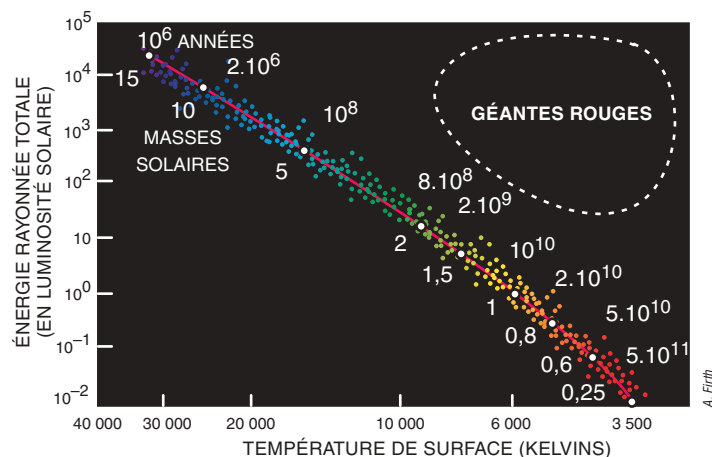




**5. LE DIAGRAMME DE HERTZSPRUNG-RUSSELL**, le plus important des diagrammes utilisés en astronomie, montre que la production d'énergie et la température des étoiles les placent toutes sur une portion de droite qui constitue la «séquence principale», où elles restent cantonnées tant que l'hydrogène est le combustible de base de leurs réactions thermonucléaires (à gauche). La température de surface d'une étoile est estimée grâce à la couleur correspondant à l'émission maximale d'énergie (du rouge pour les étoiles les plus froides au bleu pour les plus chaudes, en passant par le jaune des étoiles moyennes comme le Soleil). Quand l'étoile est proche de sa fin, elle quitte la séquence principale et bifurque vers la zone des géantes rouges (des

étoiles de basse température de surface, mais d'éclat important). Plus une étoile est massive, plus sa température de surface est importante et plus son séjour dans la séquence principale est court. Les astronomes ont reporté les éclats et les couleurs des étoiles brillantes de l'amas NGC 6652 (à droite), sur un digramme Hertzsprung-Russell. Ces étoiles ont toutes le même âge : 13 milliards d'années. Celles dont la durée de vie est inférieure à cet âge ont toutes disparu et sont donc absentes du diagramme. Les autres sont encore sur la séquence principale. Les étoiles qui épuisent leur hydrogène en 13 milliards d'années exactement sont actuellement en train de migrer vers la région des géantes rouges, trahissant ainsi l'âge de l'amas.

et la vitesse angulaire (sur la voûte céleste). Les astronomes mesurent chaque composante par des moyens différents. La vitesse radiale est obtenue par effet Doppler (lorsqu'une étoile s'éloigne de nous, la lumière qu'elle nous envoie est décalée vers les grandes longueurs d'onde d'une quantité proportionnelle à sa vitesse). La vitesse angulaire est estimée d'après une série de photographies prises sur plusieurs années. Pour une étoile, ces deux vitesses sont indépendantes. Pour un amas globulaire, où des milliers d'étoiles se déplacent au hasard, la vitesse radiale moyenne devrait être égale à la vitesse angulaire moyenne. Or, la mesure des vitesses radiales par effet Doppler est indépendante de la distance des étoiles, alors que le déplacement angulaire est d'autant plus faible que la distance est grande. De cette façon, les astronomes ont estimé l'éloignement des amas globulaires.

On déduit de cette méthode qu'*Hipparcos* a surestimé les distances qui nous séparent des amas globulaires, même s'ils semblent effectivement être plus lointains qu'on ne le pensait auparavant. Aujourd'hui, on estime que les amas les plus vieux ont environ 13 milliards d'années (à 1,5 milliard d'années près). Cette datation révisée est en accord avec la nouvelle estimation de l'âge de l'Univers fondée sur les dernières mesures de sa vitesse d'expansion

(environ 15 milliards d'années). Pour la première fois depuis la naissance de la cosmologie moderne, il y a un demi-siècle, les cosmologistes et les spécialistes de la physique stellaire sont parvenus à se mettre d'accord.

La datation des étoiles dans les amas globulaire n'est pas le seul moyen d'estimer l'âge de notre Galaxie, et d'autres méthodes donnent des résultats très similaires. Il y a quelques mois, Roger Cayrel et ses collègues de l'Observatoire de Paris ont appliqué aux étoiles une technique utilisée de longue date par les archéologues et par les géologues : la datation par des isotopes radioactifs. Ils ont d'abord effectué les premières mesures précises de la quantité d'uranium contenue dans une autre étoile que le Soleil : CS 31082-001, une vieille étoile de population II. Connaissant la vitesse à laquelle l'uranium disparaît et à l'aide d'hypothèses sur la quantité d'uranium qui était présente dans l'étoile lors de sa formation, R. Cayrel et ses collègues ont estimé

qu'il s'était depuis écoulé 12,5 milliards d'années, à trois milliards d'années près (voir l'encadré ci-contre).

À terme, les isotopes radioactifs pourraient supplanter les amas globulaires comme outils de datation des étoiles. Auparavant, les astronomes s'attachèrent à confirmer les estimations fondées sur l'étude des amas globulaires. De nouveaux télescopes au sol, tel le très grand télescope VLT de l'Observatoire européen austral, promettent de réduire encore l'incertitude sur la composition chimique des étoiles contenues dans les amas. De nouveaux observatoires spatiaux, comme le satellite *Gaia* de l'Agence spatiale européenne ou le satellite de la mission spatiale d'interférométrie SIM de la NASA, devraient, avec une résolution 250 fois supérieure à celle d'*Hipparcos*, déterminer directement la distance des amas les plus proches, supprimant les intermédiaires. Ils apporteront enfin une réponse définitive à une question qui tracasse les astronomes depuis plusieurs décennies.

Brian CHABOYER est professeur au département de physique et d'astronomie de l'Université Dartmouth, et participe à la mission d'interférométrie spatiale SIM de la NASA.

James KALER et W. FREEMAN, *Stars*, 1998.

Brian CHABOYER, *Globular Cluster Distance Determinations*, in *Post-Hipparcos Cosmic Candles*, sous la direction d'André

Heck et Filippina Caputa, Kluwer, 1999.

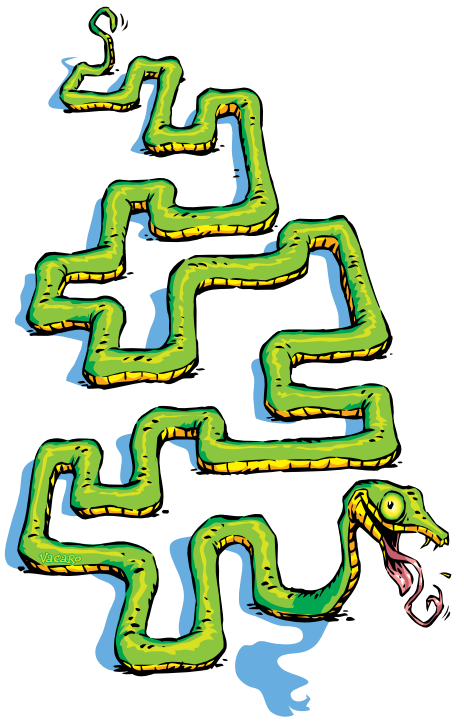
Mickael PERRYMAN, *Hipparcos : The Stars in Three Dimensions*, in *Sky and Telescope*, vol. 97, n° 6, juin 1999.

Yveline LEBRETON, *Stellar Structure and Evolution : Deductions from Hipparcos*, in *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 38, pp. 35-77, 2000.

# Les chemins aléatoires

WENDELIN WERNER

*Physiciens et mathématiciens progressent conjointement dans l'étude des courbes planes qui cheminent de façon hasardeuse. Une conjecture de Benoît Mandelbrot a été élucidée.*



C'est le lendemain de Noël. Le petit Grégoire, assis au milieu de sa chambre, contemple le cadeau dont il rêvait depuis des mois : un train électrique. La boîte qui contient les rails est énorme, elle lui arrive sous le menton. Grégoire imagine sa chambre envahie par la voie d'un chemin de fer tortueux. Reproduire les grandes lignes droites du TGV Paris-Lyon ne l'intéresse pas, il préfère les petites voies sinueuses de montagne qui, lacet après lacet, s'enfoncent à travers les reliefs. Pour obtenir ces lacets, il laissera le hasard guider le tracé de la voie ; celui-ci ne respectera pas de plan élaboré à l'avance, mais se

constituera par exemple au gré des courbes et des lignes droites piochées au hasard dans la boîte. Comme la boîte de rails ne contient ni aiguillage, ni pont, la voie de chemin de fer sera une longue courbe sinueuse qui ne se coupe pas. Grégoire se demande combien de tracés différents sont possibles avec un nombre donné de rails. Sa chambre n'est peut-être même pas suffisamment grande pour contenir un tracé constitué de tous les rails. Il passe son regard d'un mur à l'autre pour en estimer la taille. Combien de rails va-t-il pouvoir placer ?

Sous des apparences ludiques, les questions posées par Grégoire ont intri-

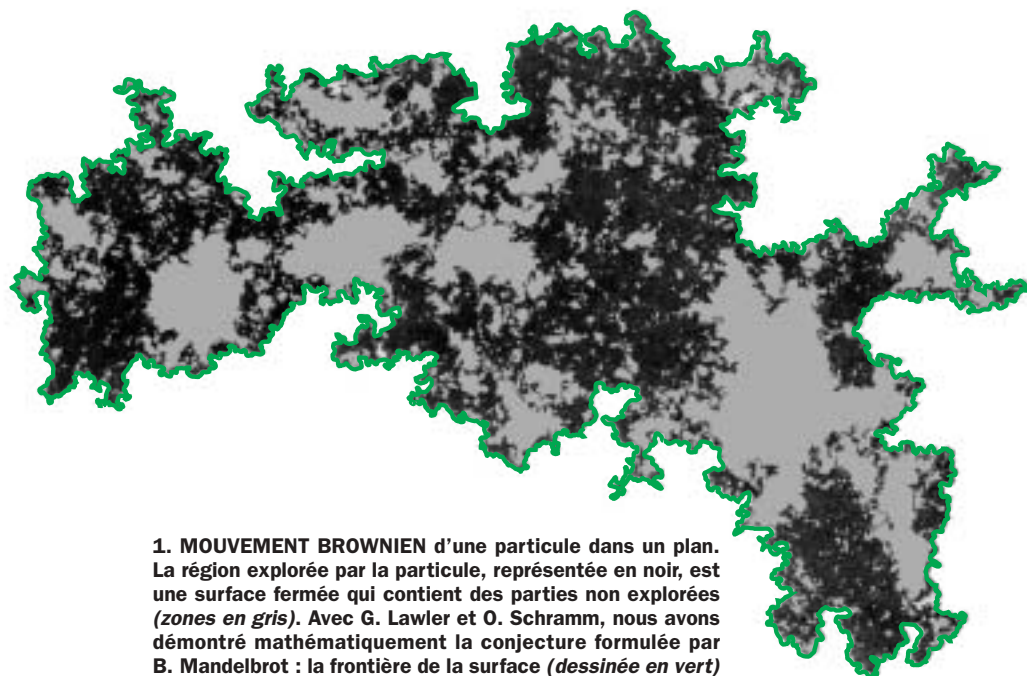
gué mathématiciens et physiciens depuis quelque soixante ans et cachent certains problèmes encore ouverts aujourd'hui.

On nomme des chemins qui ne repassent pas plusieurs fois par les mêmes points, des chemins auto-évitants. La nature nous en donne de nombreux exemples : rivières, contour de continents... Dans cet article, nous allons découvrir que certaines courbes aléatoires très irrégulières, comme la courbe verte de la figure 1, apparaissent naturellement comme des longs chemins auto-évitants construits à la manière de Grégoire. Tout d'abord, revenons un instant dans la chambre de celui-ci et tentons de répondre à sa première interrogation.

## Le nombre de tracés

Combien Grégoire peut-il construire de voies de chemin de fer différentes ? Autrement dit, combien existe-t-il de chemins auto-évitants, tous constitués de  $n$  pas, dont les géométries sont différentes ? Considérons, parce que cela nous simplifie la tâche, que les uniques rails disponibles sont des segments identiques. Cette construction engendre des virages à angle droit, mais imaginons que le train de Grégoire est capable de s'en accommoder. Chaque nouveau rail peut prendre au plus trois orientations : les quatre directions Nord, Sud, Ouest et Est, moins celle d'où vient le tracé.

S'il est possible d'énumérer tous les tracés différents de faible longueur, il n'existe pas de formule explicite qui donne le nombre de tracés en fonction



1. MOUVEMENT BROWNIEN d'une particule dans un plan. La région explorée par la particule, représentée en noir, est une surface fermée qui contient des parties non explorées (zones en gris). Avec G. Lawler et O. Schramm, nous avons démontré mathématiquement la conjecture formulée par B. Mandelbrot : la frontière de la surface (dessinée en vert) est un chemin auto-évitant de dimension fractale  $4/3$ .

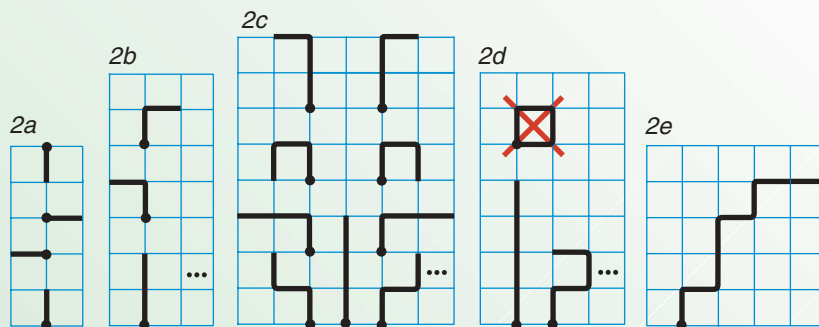
de  $n$ . Nous pouvons cependant démontrer (voir l'encadré ci-contre) que ce nombre contient un terme qui se comporte à l'infini comme  $\mu$  à la puissance  $n$ .  $\mu$  est compris entre 2 et 3, mais seules des simulations numériques nous renseignent sur sa valeur exacte :  $\mu$  est approximativement égal à 2,638.

Comment ce résultat est-il modifié si Grégoire échange les rails à angle droit pour d'autres qui se rejoignent en faisant entre eux un angle de 120 degrés ? En pavant tout le plan avec de tels segments, nous obtenons un réseau hexagonal en «nid d'abeille». Chaque nouveau segment est maintenant placé non pas selon trois possibilités, mais deux. Un raisonnement similaire à celui du réseau carré démontre l'existence d'une constante  $\mu'$  différente de  $\mu$ . La valeur de  $\mu$  dépend du type de rails utilisés.

Au début des années 1980, Bernard Nienhuis, un physicien néerlandais, prédit que le nombre de tracés auto-évitants se comporte, outre le terme  $\mu^n$  que nous avons établi, comme une puissance de  $n$ . Précisément, il approxima ce nombre par  $\mu^n n^{11/32}$  et donna la valeur exacte de  $\mu'$  du réseau en nid d'abeille. Nous avons montré que  $\mu$  est fonction du type de rails utilisés, mais, à l'opposé, il est prédit que l'exposant 11/32 reste le même quel que soit le réseau sur lequel évolue le chemin auto-évitant. Ce genre de résultat est important : pour modéliser un phénomène, on est parfois conduit à discrétiser l'espace pour réduire le nombre de variables à traiter. Or, la discrétisation d'un gaz ou d'un liquide est arbitraire : faut-il faire évoluer les atomes sur les nœuds d'un réseau carré ou bien hexagonal ? Un résultat indépendant du type de réseau est particulièrement intéressant, car cela laisse penser qu'il reste vrai pour le phénomène réel.

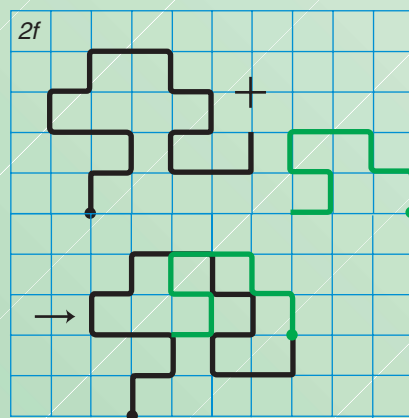
On peut interpréter l'exposant 11/32 en termes de non-intersection de chemins auto-évitants. Plaçons deux chemins auto-évitants de même longueur  $n$ , choisis au hasard parmi les  $a_n$  possibilités, au même point d'origine et évaluons la probabilité pour que les deux chemins ne se coupent pas. Ainsi que nous le voyons ci-contre, les deux chemins sont disjoints si et seulement si leur réunion forme un chemin auto-évitant de longueur  $2n$ . Parmi les  $(a_n)^2$  chemins (pas nécessairement auto-évitants) que l'on peut construire avec les deux tracés, seuls  $a_{2n}$  ne possèdent pas d'intersection ;

## 2. LE NOMBRE DE CHEMINS AUTO-ÉVITANTS



Comptons les différents tracés d'un chemin auto-évitant constitué de  $n$  segments. Puisqu'il ne peut revenir sur lui-même, le tracé ne peut emprunter, à chaque nouveau segment, que trois directions parmi les quatre autorisées par le réseau carré. Pour un seul segment (figure 2a), il y a quatre possibilités ; pour deux, 12 (figure 2b) ; pour trois, 36 (figure 2c). À chaque nouveau segment, le nombre de tracés est multiplié par trois. Toutefois, à partir de quatre segments, certains tracés sont interdits par la condition d'auto-évitement (figure 2d), de sorte que le nombre de tracés devient inférieur à  $4 \times 3^{(n-1)}$ . Ainsi, pour quatre segments, le nombre de possibilités n'est pas 108, mais 100. Il faut faire appel aux ordinateurs pour recenser les tracés formés d'un grand nombre de segments.

Une borne inférieure du nombre de tracés est obtenue en dessinant des chemins qui ne partent que dans deux directions, par exemple le Nord et l'Est (figure 2e). Cette construction engendre des tracés qui ne se coupent pas. Comme il y a deux possibilités pour chaque nouveau segment, dans ce cas, le nombre de tracés est  $2^n$ . Au total, le nombre de chemins auto-évitants à  $n$  segments est compris entre  $2^n$  et  $4 \times 3^{(n-1)}$ .



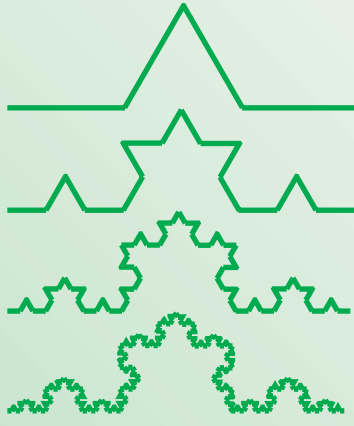
À défaut de le déterminer exactement, nous allons évaluer le nombre de tracés quand le chemin auto-évitant devient infiniment long. Un probabiliste anglais, John Hammersley, fit, le premier, le raisonnement suivant. Mettons bout à bout deux chemins auto-évitants constitués respectivement de  $n$  et  $m$  segments (figure 2f). Il se peut que la réunion des deux tracés ne soit pas auto-évitante. Appelons  $a_n$  le nombre de tracés auto-évitants à  $n$  segments. Pour dénombrer les tracés construits avec  $(n+m)$  segments, il nous faut retirer, parmi les  $a_n a_m$  tracés possibles, ceux qui sont auto-évitants. Nous en déduisons que  $a_{n+m}$  est inférieur ou égal à  $a_n a_m$ .

Égalisons  $n$  à  $m$  dans l'inégalité  $a_{n+m} \leq a_n a_m$  et élevons à la puissance  $1/2n$ . Nous voyons que  $(a_{2n})^{1/2n} \leq (a_n)^{1/n}$ , ce qui signifie que la valeur de la suite  $(a_n)^{1/n}$  au rang  $n$  est supérieure ou égale à celle au rang  $2n$ . La suite décroît quand  $n$  progresse le long des puissances de deux et est minorée par deux. Le long des puissances de deux, elle converge donc vers un nombre  $\mu$  supérieur à 2, dont on ne connaît pas la valeur exacte. Puisque  $a_n$  est inférieur à  $4 \times 3^{(n-1)}$ ,  $\mu$  est inférieur à 3. Plus généralement, on montre que la suite  $(a_n)^{1/n}$  elle-même converge vers  $\mu$ . En conséquence, quand le nombre de segments tend vers l'infini, le nombre de tracés auto-évitants se comporte comme  $\mu^n$ . On nomme  $\mu$  constante de connectivité du réseau, car elle est fonction de la nature du réseau sur lequel évolue le tracé : plus un nœud possède de voisins, plus  $\mu$  est important. Par exemple, il est plus grand pour un réseau carré que pour un réseau en nid d'abeille. Il n'existe pas de formule explicite de  $\mu$  pour le réseau carré ; on la calcule numériquement. On a aujourd'hui une estimation à une dizaine de décimales :  $\mu$  est égal à 2,6381585...



### 3. LA DIMENSION FRACTALE

Une courbe fractale est une courbe qui conserve le même aspect quelle que soit l'échelle à laquelle on la regarde. L'exemple type en est une côte rocheuse. La côte bretonne vue à l'échelle de la région ou à celle de la pointe du Raz présente toujours les mêmes irrégularités. Comment mesurer la longueur des côtes si en s'en approchant de plus en plus, de nouveaux détails apparaissent : selon la taille de la règle qu'on utilise pour mesurer la longueur, les résultats diffèrent ! Pour éviter cet écueil, on définit une dimension fractale qui représente comment la longueur de la courbe varie avec la taille de la règle : en réduisant la taille de la règle d'un facteur  $X$ , la longueur de la courbe s'accroît d'un facteur  $X$  à la puissance  $d$ ,  $d$  étant la dimension fractale. La dimension fractale est une mesure de la «rugosité» de la courbe : plus la courbe est sinueuse, plus grande est sa dimension fractale. Une courbe lisse a une dimension fractale égale à un.



En revanche, examinons la courbe fractale de Von Koch, construite par itération à partir d'une étoile à six branches (dont une seule est représentée sur la figure) : chaque arête est divisée en trois et le segment du milieu est remplacé par deux des arêtes d'un triangle équilatéral. Nous avons représenté ici les trois premières itérations. Avec une règle de la taille de la première arête, la longueur de la partie de courbe représentée est égale à quatre, tandis qu'avec une règle trois fois plus courte, la longueur est égale à 16. Comme trois à la puissance 1,26 est égal à quatre, la dimension fractale de la courbe de Von Koch est égale à 1,26.

La longueur d'un chemin auto-évitant mesurée avec une règle de la taille d'un segment est, par définition, égale au nombre de segments  $n$ . Mesurée avec une règle de la taille typique du tracé, la longueur est égale à un. La taille typique valant  $n^{3/4}$ , la dimension fractale du chemin auto-évitant est égale à 4/3.

Quand sa longueur est très grande, un chemin auto-évitant forme des méandres de toutes tailles et conserve le même aspect d'une échelle à une autre. Il ressemble à une courbe fractale dont une des caractéristiques est la dimension fractale qui exprime comment la longueur de la courbe varie en fonction de la taille de la règle dont on se sert pour la mesurer (voir la figure 3). La dimension fractale est l'inverse de la puissance intervenant dans la taille typique d'un tracé. La taille typique est la taille qu'on observe majoritairement en tirant un long chemin auto-évitant au hasard ; en principe, elle pourrait être, mais on pense que ce n'est pas le cas, notablement plus petite que la taille moyenne à cause de la contribution de chemins très longs, mais exceptionnels. Elle est du même ordre de grandeur que la taille moyenne. On en conclut que la dimension fractale est 4/3.

Mathématiquement, on ne sait démontrer ni cette dimension ni l'exposant de non-intersection décrit plus haut. Toutefois, avec Greg Lawler et Oded Schramm, nous avons construit mathématiquement une courbe aléatoire plane qui doit être en principe la limite des chemins auto-évitants tirés au hasard quand le nombre  $n$  de pas tend vers l'infini. Cette courbe se distingue des chemins auto-évitants notamment par le fait qu'elle n'évolue pas sur un réseau. On montre que la dimension fractale de cette courbe est effectivement 4/3 et que l'exposant de non-intersection est 11/32.

Nous pouvons donc répondre à la question de Grégoire sur la taille moyenne d'un chemin auto-évitant. Avec 100 rails de dix centimètres chacun, Grégoire construit une voie de chemin de fer de taille environ égale à dix fois  $100^{3/4}$  centimètres, soit de l'ordre de trois mètres.

Considérons maintenant une manière plus naturelle pour Grégoire de construire son tracé. Il choisit à chaque pas une des directions possibles au hasard, en éliminant celles où le tracé se referme sur lui-même. Dans cette construction, tous les chemins auto-évitants possibles ne sont pas équiprobables. Par exemple, la probabilité de tracer un chemin tout droit est de  $(1/3)^n$ , tandis que celle d'obtenir tel ou tel chemin tortueux est plus grande, car, là où le tracé se referme sur lui-même, moins de trois placements différents des rails sont possibles. Puisque cette stratégie avantage les chemins tortueux, on

autrement dit, la probabilité de non-intersection est égale à  $a_{2n}/(a_n)^2$ . En utilisant l'expression de  $a_n$  prédite par B. Nienhuis, nous établissons que la probabilité est de l'ordre de grandeur de  $n^{-11/32}$  et en concluons que l'exposant 11/32 décrit la vitesse à laquelle décroît la probabilité de non-intersection entre deux très longs chemins auto-évitants aléatoires.

### La taille des chemins auto-évitants

Penchons nous maintenant sur la seconde interrogation de Grégoire : quelle est la taille moyenne d'un chemin aléatoire auto-évitant ? Par taille moyenne, nous entendons la distance moyenne entre les deux extrémités du tracé. Nous calculons la moyenne d'une grandeur en multipliant chacune des valeurs possibles de cette grandeur par la probabilité d'obtenir cette valeur. Nous allons voir que, selon la stratégie employée par Grégoire pour construire les tracés, la probabilité d'avoir tel ou

tel tracé diffère et, par conséquent, la taille moyenne également.

La première stratégie, naturelle du point de vue des applications physiques et chimiques, mais en pratique difficile à réaliser pour Grégoire, revient à choisir un chemin auto-évitant au hasard parmi tous les  $a_n$  chemins auto-évitants différents. Tous les tracés sont équiprobables. La taille moyenne d'un tracé est alors la somme des distances bout à bout de tous les chemins auto-évitants de même longueur divisée par le nombre total de chemins.

Un trajet auto-évitant à  $n$  pas ne va pas à une distance plus grande que  $n$  du point de départ. Par ailleurs, il visite  $n$  points différents. La manière la plus compacte de placer ces  $n$  points consiste à remplir un disque de rayon d'environ  $\sqrt{n}/\pi$ . La taille moyenne est donc comprise entre  $\sqrt{n}/\pi$  et  $n$ . Après la suggestion faite par Paul Flory pour les polymères (voir la figure 4), en 1982, par une méthode de mécanique statistique, B. Nienhuis prédit qu'elle est de l'ordre de  $n$  à la puissance 3/4.

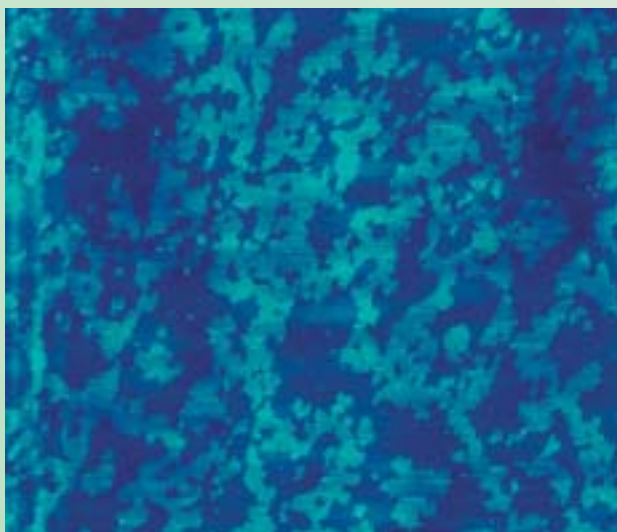
#### 4. LES CHEMINS ALÉATOIRES DANS LES TRANSITIONS DE PHASE

Les pionniers des chemins auto-évitants ont été des physico-chimistes qui travaillaient sur les polymères. Les polymères sont des chaînes moléculaires constituées par la répétition d'un grand nombre de molécules identiques, nommées monomères. Quand le polymère est plongé dans un liquide au fort pouvoir de dissolution, il se déplie et est libre de ses mouvements. Soumis à l'agitation thermique, il adopte alors au cours du temps toutes les configurations possibles du chemin auto-évitant (contrairement aux voies de chemin de fer, le polymère n'est pas restreint à se déplacer sur un réseau, de sorte que le nombre de configurations permises est infini). En moyenne dans le temps, la distance bout à bout du polymère est calculée comme la moyenne des distances bout à bout de toutes les configurations possibles prises par le polymère. Dans les années 1940, P. Flory a estimé l'énergie d'un polymère dans chacune des configurations et conjecturé que la distance bout à bout moyenne d'un polymère comportant  $n$  monomères est  $n$  à la puissance  $3/4$ . Nous savons depuis les années 1970 que le raisonnement développé par P. Flory était physiquement faux, mais a abouti au bon résultat.

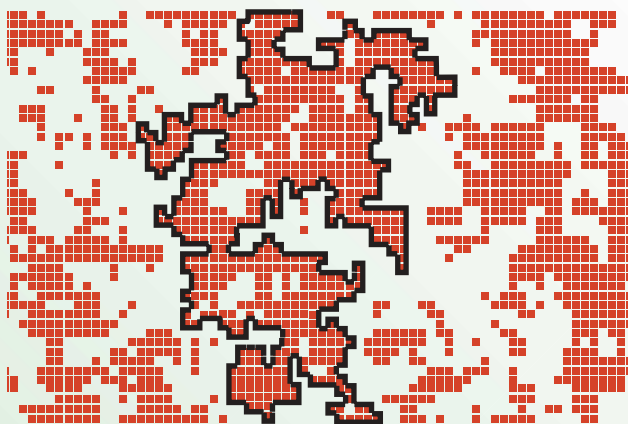
L'intérêt des chemins auto-évitants en physique ne se limite pas à la modélisation des polymères. Les chemins auto-évitants ont pris une importance capitale au cours des deux dernières décennies dans la théorie des transitions de phase. Une transition de phase est le passage d'un corps d'un état physique à un autre. Prenons, par exemple, la transition magnétique du fer qui, lorsque sa température est inférieure à 771 °C, s'aimante spontanément. Au-dessus de cette température, dite de



«Curie» en hommage à Pierre Curie qui étudia les propriétés thermodynamiques des aimants, l'agitation ther-



**TRANSITION DE PHASE** dans une couche de phospholipides. Les phospholipides sont des molécules constituées d'une tête amphiphile et d'une ou de plusieurs queues hydrophobes. Des phospholipides DMPC sont ici déposés à la surface de l'eau et forment, dans certaines conditions de température et de densité, une couche où sont présentes deux phases fluides : l'une, bleu foncée, où les queues sont verticales et l'autre, bleu claire, où les queues sont libres de leur mouvement. Sur la photographie, on voit l'invariance d'échelle : des zones de toutes tailles coexistent.



**SIMULATION D'UN MATÉRIAU FERROMAGNÉTIQUE** à la température de Curie. Les carrés rouges représentent les spins qui pointent vers le haut et les blancs, ceux vers le bas. Le trait noir, qui dessine le contour d'un amas de spins de même sens, est un chemin aléatoire, auto-évitant à l'échelle du réseau, de dimension fractale  $5/3$ .

mique détruit l'aimantation. On retrouve l'apparition d'une aimantation spontanée dans de nombreux matériaux : on nomme ces matériaux des «ferromagnétiques». Dans un aimant, il existe des petits aimants élémentaires, de valeurs égales, mais de directions différentes. Au-dessus de la température de Curie, l'agitation thermique gagne devant l'interaction entre les aimants, qui les pousse à s'aligner ; à l'intérieur de l'échantillon, il y en a autant qui pointent vers la gauche, vers la droite, vers le haut et vers le bas, de sorte que l'aimantation totale est nulle par effet de moyenne. Au-dessous de la température de Curie, l'agitation thermique ne détruit pas complètement l'alignement souhaité par les aimants, et l'aimantation totale n'est pas nulle. À très basse température, toutes les directions sont alignées, et l'aimantation totale est maximale. À la température de Curie, il n'existe pas de taille type pour les zones où l'aimantation est uniforme. Au contraire, toutes les échelles entrent en jeu, de la taille atomique des aimantations élémentaires jusqu'à la dimension du barreau.

Ces résultats ressortent de l'étude de la fonction de corrélation entre spins, qui est une mesure de l'effet d'un spin sur un autre. Au-dessus de la température de Curie, les spins n'ont pas d'effet l'un sur l'autre : la fonction de corrélation entre spins est nulle. À très basse température, un spin qu'on amènerait à se retourner entraînerait tous les autres avec lui dans sa rotation : la corrélation est maximale. Plus les amas de même spin sont grands, plus les corrélations entre spins sont importantes. À deux dimensions, la frontière d'un amas de spins de même sens est un chemin aléatoire. Ce chemin est auto-évitant à l'échelle du réseau, mais peut perdre cette caractéristique quand le nombre de spins tend vers l'infini. On a montré que la fonction de corrélation entre spins est fonction des chemins aléatoires qui relient les spins. À la température de Curie, les amas sont de toutes les tailles et il faut sommer sur tous les chemins aléatoires possibles pour évaluer les corrélations. Dans le cas de la transition ferromagnétique, il est prédit que la dimension fractale de l'interface entre deux domaines magnétiques est  $5/3$ .

L. Kildemark, O. G. Mouritsen, Université Technique du Danemark, Lyngby