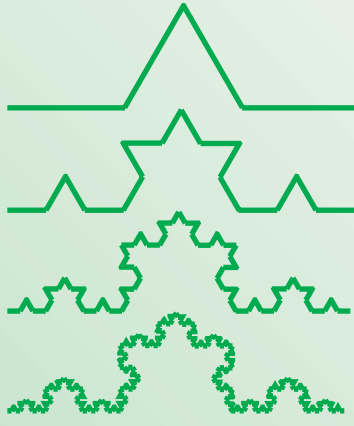


3. LA DIMENSION FRACTALE

Une courbe fractale est une courbe qui conserve le même aspect quelle que soit l'échelle à laquelle on la regarde. L'exemple type en est une côte rocheuse. La côte bretonne vue à l'échelle de la région ou à celle de la pointe du Raz présente toujours les mêmes irrégularités. Comment mesurer la longueur des côtes si en s'en approchant de plus en plus, de nouveaux détails apparaissent : selon la taille de la règle qu'on utilise pour mesurer la longueur, les résultats diffèrent ! Pour éviter cet écueil, on définit une dimension fractale qui représente comment la longueur de la courbe varie avec la taille de la règle : en réduisant la taille de la règle d'un facteur X , la longueur de la courbe s'accroît d'un facteur X à la puissance d , d étant la dimension fractale. La dimension fractale est une mesure de la «rugosité» de la courbe : plus la courbe est sinueuse, plus grande est sa dimension fractale. Une courbe lisse a une dimension fractale égale à un.



En revanche, examinons la courbe fractale de Von Koch, construite par itération à partir d'une étoile à six branches (dont une seule est représentée sur la figure) : chaque arête est divisée en trois et le segment du milieu est remplacé par deux des arêtes d'un triangle équilatéral. Nous avons représenté ici les trois premières itérations. Avec une règle de la taille de la première arête, la longueur de la partie de courbe représentée est égale à quatre, tandis qu'avec une règle trois fois plus courte, la longueur est égale à 16. Comme trois à la puissance 1,26 est égal à quatre, la dimension fractale de la courbe de Von Koch est égale à 1,26.

La longueur d'un chemin auto-évitant mesurée avec une règle de la taille d'un segment est, par définition, égale au nombre de segments n . Mesurée avec une règle de la taille typique du tracé, la longueur est égale à un. La taille typique valant $n^{3/4}$, la dimension fractale du chemin auto-évitant est égale à $4/3$.

Quand sa longueur est très grande, un chemin auto-évitant forme des méandres de toutes tailles et conserve le même aspect d'une échelle à une autre. Il ressemble à une courbe fractale dont une des caractéristiques est la dimension fractale qui exprime comment la longueur de la courbe varie en fonction de la taille de la règle dont on se sert pour la mesurer (voir la figure 3). La dimension fractale est l'inverse de la puissance intervenant dans la taille typique d'un tracé. La taille typique est la taille qu'on observe majoritairement en tirant un long chemin auto-évitant au hasard ; en principe, elle pourrait être, mais on pense que ce n'est pas le cas, notablement plus petite que la taille moyenne à cause de la contribution de chemins très longs, mais exceptionnels. Elle est du même ordre de grandeur que la taille moyenne. On en conclut que la dimension fractale est $4/3$.

Mathématiquement, on ne sait démontrer ni cette dimension ni l'exposant de non-intersection décrit plus haut. Toutefois, avec Greg Lawler et Oded Schramm, nous avons construit mathématiquement une courbe aléatoire plane qui doit être en principe la limite des chemins auto-évitants tirés au hasard quand le nombre n de pas tend vers l'infini. Cette courbe se distingue des chemins auto-évitants notamment par le fait qu'elle n'évolue pas sur un réseau. On montre que la dimension fractale de cette courbe est effectivement $4/3$ et que l'exposant de non-intersection est $11/32$.

Nous pouvons donc répondre à la question de Grégoire sur la taille moyenne d'un chemin auto-évitant. Avec 100 rails de dix centimètres chacun, Grégoire construit une voie de chemin de fer de taille environ égale à dix fois $100^{3/4}$ centimètres, soit de l'ordre de trois mètres.

Considérons maintenant une manière plus naturelle pour Grégoire de construire son tracé. Il choisit à chaque pas une des directions possibles au hasard, en éliminant celles où le tracé se referme sur lui-même. Dans cette construction, tous les chemins auto-évitants possibles ne sont pas équiprobables. Par exemple, la probabilité de tracer un chemin tout droit est de $(1/3)^n$, tandis que celle d'obtenir tel ou tel chemin tortueux est plus grande, car, là où le tracé se referme sur lui-même, moins de trois placements différents des rails sont possibles. Puisque cette stratégie avantage les chemins tortueux, on

autrement dit, la probabilité de non-intersection est égale à $a_{2n}/(a_n)^2$. En utilisant l'expression de a_n prédite par B. Nienhuis, nous établissons que la probabilité est de l'ordre de grandeur de $n^{-11/32}$ et en concluons que l'exposant $11/32$ décrit la vitesse à laquelle décroît la probabilité de non-intersection entre deux très longs chemins auto-évitants aléatoires.

La taille des chemins auto-évitants

Penchons nous maintenant sur la seconde interrogation de Grégoire : quelle est la taille moyenne d'un chemin aléatoire auto-évitant ? Par taille moyenne, nous entendons la distance moyenne entre les deux extrémités du tracé. Nous calculons la moyenne d'une grandeur en multipliant chacune des valeurs possibles de cette grandeur par la probabilité d'obtenir cette valeur. Nous allons voir que, selon la stratégie employée par Grégoire pour construire les tracés, la probabilité d'avoir tel ou

tel tracé diffère et, par conséquent, la taille moyenne également.

La première stratégie, naturelle du point de vue des applications physiques et chimiques, mais en pratique difficile à réaliser pour Grégoire, revient à choisir un chemin auto-évitant au hasard parmi tous les a_n chemins auto-évitants différents. Tous les tracés sont équiprobables. La taille moyenne d'un tracé est alors la somme des distances bout à bout de tous les chemins auto-évitants de même longueur divisée par le nombre total de chemins.

Un trajet auto-évitant à n pas ne va pas à une distance plus grande que n du point de départ. Par ailleurs, il visite n points différents. La manière la plus compacte de placer ces n points consiste à remplir un disque de rayon d'environ $\sqrt{n}/\pi$. La taille moyenne est donc comprise entre $\sqrt{n}/\pi$ et n . Après la suggestion faite par Paul Flory pour les polymères (voir la figure 4), en 1982, par une méthode de mécanique statistique, B. Nienhuis prédit qu'elle est de l'ordre de n à la puissance $3/4$.

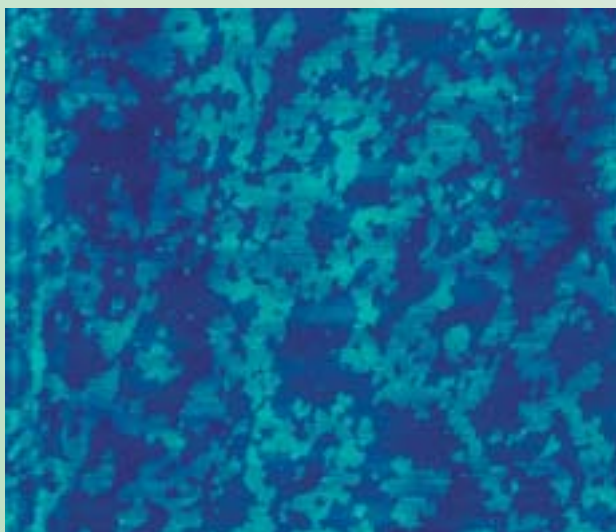
4. LES CHEMINS ALÉATOIRES DANS LES TRANSITIONS DE PHASE

Les pionniers des chemins auto-évitants ont été des physico-chimistes qui travaillaient sur les polymères. Les polymères sont des chaînes moléculaires constituées par la répétition d'un grand nombre de molécules identiques, nommées monomères. Quand le polymère est plongé dans un liquide au fort pouvoir de dissolution, il se déplie et est libre de ses mouvements. Soumis à l'agitation thermique, il adopte alors au cours du temps toutes les configurations possibles du chemin auto-évitant (contrairement aux voies de chemin de fer, le polymère n'est pas restreint à se déplacer sur un réseau, de sorte que le nombre de configurations permises est infini). En moyenne dans le temps, la distance bout à bout du polymère est calculée comme la moyenne des distances bout à bout de toutes les configurations possibles prises par le polymère. Dans les années 1940, P. Flory a estimé l'énergie d'un polymère dans chacune des configurations et conjecturé que la distance bout à bout moyenne d'un polymère comportant n monomères est n à la puissance $3/4$. Nous savons depuis les années 1970 que le raisonnement développé par P. Flory était physiquement faux, mais a abouti au bon résultat.

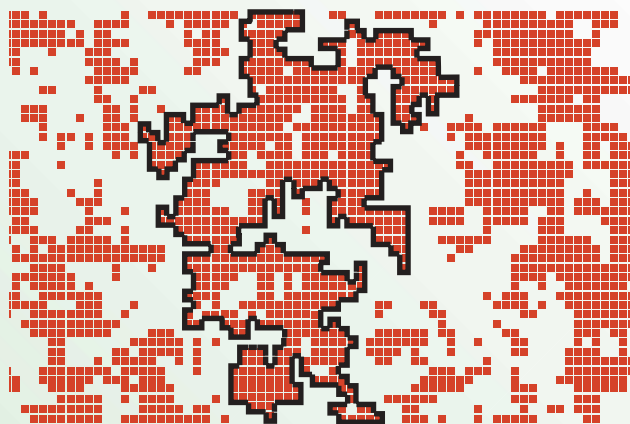
L'intérêt des chemins auto-évitants en physique ne se limite pas à la modélisation des polymères. Les chemins auto-évitants ont pris une importance capitale au cours des deux dernières décennies dans la théorie des transitions de phase. Une transition de phase est le passage d'un corps d'un état physique à un autre. Prenons, par exemple, la transition magnétique du fer qui, lorsque sa température est inférieure à 771 °C, s'aimante spontanément. Au-dessus de cette température, dite de



«Curie» en hommage à Pierre Curie qui étudia les propriétés thermodynamiques des aimants, l'agitation ther-



TRANSITION DE PHASE dans une couche de phospholipides. Les phospholipides sont des molécules constituées d'une tête amphiphile et d'une ou de plusieurs queues hydrophobes. Des phospholipides DMPC sont ici déposés à la surface de l'eau et forment, dans certaines conditions de température et de densité, une couche où sont présentes deux phases fluides : l'une, bleu foncée, où les queues sont verticales et l'autre, bleu claire, où les queues sont libres de leur mouvement. Sur la photographie, on voit l'invariance d'échelle : des zones de toutes tailles coexistent.



SIMULATION D'UN MATÉRIAU FERROMAGNÉTIQUE à la température de Curie. Les carrés rouges représentent les spins qui pointent vers le haut et les blancs, ceux vers le bas. Le trait noir, qui dessine le contour d'un amas de spins de même sens, est un chemin aléatoire, auto-évitant à l'échelle du réseau, de dimension fractale $5/3$.

mique détruit l'aimantation. On retrouve l'apparition d'une aimantation spontanée dans de nombreux matériaux : on nomme ces matériaux des «ferromagnétiques». Dans un aimant, il existe des petits aimants élémentaires, de valeurs égales, mais de directions différentes. Au-dessus de la température de Curie, l'agitation thermique gagne devant l'interaction entre les aimants, qui les pousse à s'aligner ; à l'intérieur de l'échantillon, il y en a autant qui pointent vers la gauche, vers la droite, vers le haut et vers le bas, de sorte que l'aimantation totale est nulle par effet de moyenne. Au-dessous de la température de Curie, l'agitation thermique ne détruit pas complètement l'alignement souhaité par les aimants, et l'aimantation totale n'est pas nulle. À très basse température, toutes les directions sont alignées, et l'aimantation totale est maximale. À la température de Curie, il n'existe pas de taille type pour les zones où l'aimantation est uniforme. Au contraire, toutes les échelles entrent en jeu, de la taille atomique des aimantations élémentaires jusqu'à la dimension du barreau.

Ces résultats ressortent de l'étude de la fonction de corrélation entre spins, qui est une mesure de l'effet d'un spin sur un autre. Au-dessus de la température de Curie, les spins n'ont pas d'effet l'un sur l'autre : la fonction de corrélation entre spins est nulle. À très basse température, un spin qu'on amènerait à se retourner entraînerait tous les autres avec lui dans sa rotation : la corrélation est maximale. Plus les amas de même spin sont grands, plus les corrélations entre spins sont importantes. À deux dimensions, la frontière d'un amas de spins de même sens est un chemin aléatoire. Ce chemin est auto-évitant à l'échelle du réseau, mais peut perdre cette caractéristique quand le nombre de spins tend vers l'infini. On a montré que la fonction de corrélation entre spins est fonction des chemins aléatoires qui relient les spins. À la température de Curie, les amas sont de toutes les tailles et il faut sommer sur tous les chemins aléatoires possibles pour évaluer les corrélations. Dans le cas de la transition ferromagnétique, il est prédit que la dimension fractale de l'interface entre deux domaines magnétiques est $5/3$.

L. Kildemark, O. G. Mouritsen, Université Technique du Danemark, Lyngby

5. LE MOUVEMENT BROWNIEN

Si un marcheur avance de façon hasardeuse en choisissant la direction prise à chaque nouveau pas aléatoirement parmi les quatre points cardinaux, après n pas, 4^n chemins se seront offerts à lui. Peut-être le marcheur est-il allé toujours tout droit dans la direction Nord, mais la probabilité que cela se produise décroît vite avec n (elle est égale à $1/4^n$). Le théorème dit de la « limite centrale » évalue la position du marcheur lorsque n est grand : après n pas, le marcheur se trouve à une distance de l'ordre de grandeur de $\sqrt{n}$ du point de départ. Le théorème prévoit qu'après 10 000 pas, la probabilité pour que le marcheur se trouve à une distance plus grande que 150 est plus petite que cinq pour cent. Les sondeurs utilisent un principe similaire pour déterminer les marges d'erreurs dans les sondages. Lorsque n tend vers l'infini, la trajectoire aléatoire ressemble de plus en plus à une trajectoire continue aléatoire nommée mouvement brownien plan.

Le mouvement brownien a été mis en évidence par le botaniste écossais Robert Brown en 1827 lors d'une étude au microscope du processus de fertilisation d'une nouvelle espèce de fleur. Il décrit le mouvement incessant d'un grain de matière, par exemple un grain de pollen, en suspension dans un liquide. On découvrit au début du XX^e siècle, notamment grâce aux tra-

vaux d'Albert Einstein, que ce mouvement était la résultante des fluctuations des chocs des molécules du liquide sur le grain de matière. Dans un liquide, les molécules sont en perpétuelle agitation et viennent percuter le grain de matière. On pourrait penser que, vu la différence de taille entre les molécules et le grain de matière, la résultante des chocs serait nulle, mais il n'en n'est rien. En notant la position du grain en fonction du temps, on voit qu'il décrit une trajectoire aléatoire pouvant changer de direction à chaque instant.

Le mouvement brownien est à l'origine du mécanisme de diffusion dans un liquide. Un morceau de sucre dans un verre d'eau se dissout, puis se répartit à densité égale dans tout le volume du verre. Les multiples chocs des molécules d'eau sur les molécules de sucre dispersent celles-ci dans le volume d'eau.

Le mouvement brownien est également utilisé en mathématiques financières pour modéliser l'évolution chaotique des cours de la bourse.

Dans le mouvement brownien, les quatre directions Nord, Sud, Est et Ouest ne jouent plus de rôle particulier : le mouvement brownien est isotrope et admet des propriétés d'invariance par transformation conforme utiles pour déterminer les propriétés des marches aléatoires.



MOUVEMENT D'UNE PARTICULE MICROSCOPIQUE EN SUSPENSION DANS L'EAU dessiné d'après les observations faites par le physicien Jean Perrin en 1912 : les points anguleux de la ligne brisée représentent les positions de la particule toutes les 30 secondes ; J. Perrin a noté que de tels graphiques « ne donnent qu'un faible aperçu de l'extraordinaire discontinuité de la trajectoire réelle ». En effet, en repérant plus fréquemment la position de la particule, on verrait une trajectoire brownienne analogue à celle représentée dans la figure 1.

s'attend à ce que la dimension fractale obtenue à la limite des longs chemins soit plus grande.

Il existe un système physique auquel ce chemin aléatoire est relié. Il s'agit de la percolation qui désigne la possibilité pour un fluide de circuler à travers un réseau de pores connectés à l'intérieur d'une roche. Dans certaines conditions et à deux dimensions, la frontière de la surface couverte par le fluide est un chemin auto-évitant. Bertrand Duplantier et Hubert Saleur ont conjecturé que la dimension fractale de cette frontière est $7/4$. Grâce aux recherches du mathématicien Russe Stanislav Smirnov (qui vient de recevoir le prix Clay de la recherche pour ses travaux) et à nos travaux avec G. Lawler et O. Schramm, ce résultat a été récemment démontré mathématiquement dans le cas du réseau en nid d'abeille.

La stratégie des boucles effacées

A la fin des années 1970, G. Lawler a inventé une troisième stratégie pour construire un chemin auto-évitant. Il s'agit de la stratégie des boucles effacées qui consiste à piocher les rails un par un, à les mettre bout à bout et, quand le circuit se recoupe, à retirer la boucle formée par les rails. On obtient ainsi un tracé nommé marche aléatoire à boucles effacées. Avec cette stratégie, Grégoire ne bâtit pas un chemin auto-évitant au hasard de manière uniforme, certains tracés étant plus probables que d'autres. Les physiciens théoriciens ont étudié les marches aléatoires à boucles effacées, car elles s'avèrent aussi reliées à des systèmes de physique statistique, et S. N. Majumdar a prédit que la distance typique entre le point de départ et le point d'arrivée avec n rails est de l'ordre de grandeur de $n^{4/5}$ lorsque n croît vers l'infini. La marche aléatoire à boucles effacées « se déplie » plus que la marche auto-évitante uniforme. En 1998, Richard Kenyon démontra mathématiquement cette prédiction en exploitant, entre autres, le lien entre les marches aléatoires à boucles effacées et la manière de carrelé une portion du plan avec des dominos (voir *Les théorèmes de l'impossible*, par Ian Stewart, *Pour la Science*, février 2000).

Nous allons maintenant, pour un moment, oublier les chemins auto-évitants et nous tourner vers les marches aléatoires autorisées à se couper.

Les marches aléatoires

Deux personnes errent au hasard dans un Manhattan infini (où, ainsi que dans beaucoup de villes américaines, les rues se croisent à angle droit). Elles effectuent chacune une marche aléatoire dans le réseau formé par les rues. Elles sont parties du même endroit, et nous voulons déterminer la probabilité p_n qu'elles parcourent des chemins qui ne se coupent pas. Dans cet exemple, n ne désigne pas le nombre de pas effectués par les marcheurs, mais le nombre de carrefours traversés. Au bout d'un temps infiniment long, leurs chemins se croisent obligatoirement : la probabilité de non-intersection tend vers zéro quand les trajets parcourus sont infiniment longs. La question est de savoir à quelle vitesse.

Michael Aizenman, chercheur à la double casquette de physicien théoricien et de mathématicien, a promis en 1984 une bouteille de vin français millésimée d'une grande année à qui déterminerait cette probabilité. En 1988, B. Duplantier et K.H. Kwon prédirent que la probabilité décroissait comme $n^{-5/8}$. Avec G. Lawler et O. Schramm, nous avons démontré récemment cette prédiction. Il est à noter que la preuve mathématique utilise des outils différents des arguments de la physique théorique, tels que le mouvement brownien, l'analyse complexe et l'invariance conforme. Ce résultat ne dépend pas du réseau utilisé, carré ou hexagonal.

Le chemin auto-évitant, enveloppe du brownien

L'étude des exposants d'intersection des marches aléatoires est plus accessible mathématiquement que celle des chemins auto-évitants car lorsque n croît vers l'infini, on sait décrire un objet aléatoire vers lequel la marche aléatoire converge : le mouvement brownien (voir la figure 5). Nous pouvons ainsi relier les exposants à certaines propriétés de la trajectoire brownienne plane. En particulier, la détermination d'un exposant dit de disconnexion prouve la conjecture formulée par Benoît Mandelbrot au début des années 1980, qui devina, dans l'enveloppe d'une trajectoire brownienne, un chemin auto-évitant.

Faisons évoluer une trajectoire brownienne dans un plan et attendons qu'elle repasse près de son point de départ (cela



6. LA BOUTEILLE DE VIN mise en jeu en 1984 par Michael Aizenman pour la détermination de la probabilité de non-intersection de deux marches aléatoires. Cette bouteille a été débouchée en 2001, à l'occasion d'un congrès pour célébrer la formule $\xi(1,1) = 5/4$. On reconnaît les signatures, dans l'ordre des aiguilles d'une montre à partir d'en haut à gauche, de B. Duplantier, G. Lawler, W. Werner, M. Aizenman et O. Schramm.

peut être long, mais soyons patients, ça finira par arriver). Cette courbe (voir la figure 1), puisqu'elle est presque fermée, définit une surface. Traçons-en le contour en gras. B. Mandelbrot fit une analogie entre ce contour et les chemins auto-évitants et prédit que les deux types de courbes partagent la même dimension fractale, c'est-à-dire $4/3$ (on avait déjà conjecturé que la dimension fractale des chemins auto-évitants était $4/3$). En 1998, à partir de certains résultats que nous avons obtenus avec G. Lawler, B. Duplantier a utilisé le formalisme dit de «gravité quantique» (formalisme destiné à comprendre comment la gravité se comporte à petite échelle) pour donner une justification physique à la conjecture de B. Mandelbrot et à celle de l'exposant de non-intersection des marches aléatoires. En 2000, avec G. Lawler et O. Schramm, nous publions une démonstration mathématique de ce résultat.

Nous avons également démontré que, localement, le contour brownien ressemble à s'y méprendre à la seule limite possible des longs chemins auto-évitants que nous avions évoquée plus haut. Ceci peut paraître surprenant : le contour brownien est la frontière extérieure d'une surface. Regardons une carte de la Bretagne où

n'apparaîtraient que les contours de la côte. Grâce au dessin des embouchures des fleuves, nous serions en mesure, pour n'importe quel point de la côte, de préciser de quel côté du tracé se trouvent le continent et la mer. On pourrait penser qu'il en est de même pour le contour brownien et qu'il est possible, en observant une partie de celui-ci, de deviner de quel côté se situe la trajectoire brownienne. Puisqu'un chemin auto-évitant a exactement le même aspect vu d'un côté ou de l'autre, notre résultat montre que le contour brownien possède cette propriété de symétrie.

Notons avant de conclure que cette courbe auto-évitante fractale construite avec G. Lawler et O. Schramm peut être interprétée comme la manière naturelle de choisir au hasard parmi toutes les possibilités un chemin auto-évitant dans le plan. Cette courbe jouerait le même rôle vis-à-vis des chemins auto-évitants que le mouvement brownien vis-à-vis des marches aléatoires.

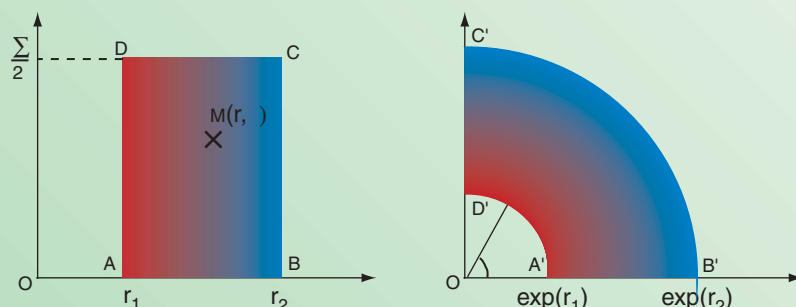
Les chemins auto-évitants, aussi simple soit leur construction, cachent, du point de vue de la physique théorique et du point de vue mathématique, des problèmes profonds dont les solutions utilisent des arguments assez élaborés issus de domaines aussi

7. LES TRANSFORMATIONS CONFORMES

Une transformation d'une partie du plan dans une autre qui conserve les angles est nommée une transformation conforme. Des exemples simples sont la translation ou l'homothétie. En voici un autre. Prenons un rectangle délimité dans le plan par les points $A(r_1, 0)$, $B(r_2, 0)$, $C(r_2, \pi/2)$ et $D(r_1, \pi/2)$. À chaque point $M(r, \theta)$ de ce rectangle, associons un point M' situé à distance $\exp(r)$ de l'origine O du repère et tel que la droite (OM') fasse un angle θ avec l'axe des abscisses. L'image du rectangle est un quart de couronne comprise entre les cercles de rayon $\exp(r_1)$ et $\exp(r_2)$. Cette application est une transformation conforme : l'image d'une intersection orthogonale (celle entre les segments AB et AD) est une intersection orthogonale (l'arc de cercle $A'D'$ croise avec un angle droit le segment $A'B'$). D'après un théorème dit de Riemann, il existe toujours une transformation conforme qui relie deux domaines quelconques du plan.

On peut noter que l'exemple précédent s'interprète en termes de nombres complexes. En écrivant M sous la forme du nombre complexe z égal à $r + i\theta$, l'image de M , M' , est située au nombre complexe z' égal à l'exponentielle de z : $\exp(z)$. Ce lien entre les transformations conformes et les fonctions complexes rend d'une certaine façon les problèmes à deux dimensions plus féconds qu'en dimension supérieure (les exposants de non-intersection associés aux chemins auto-évitant dans l'espace ne sont pas *a priori* des nombres remarquables).

Les transformations conformes sont utiles pour déterminer les propriétés du mouvement brownien. Par exemple, on évalue la probabilités de non-intersection entre deux trajectoires browniennes en projetant par transformation conforme les zones non explorées par une des trajectoires sur un domaine à la géométrie plus simple grâce au théorème de Riemann.



EXEMPLE DE TRANSFORMATION CONFORME. L'image d'un point $M(r, \theta)$ est un point M' situé à la distance $\exp(r)$ de l'origine et pour lequel la droite (OM') fait un angle θ avec l'axe des abscisses.

variés que la théorie des transitions de phase, la gravité quantique ou encore la théorie conforme des champs. Bien que physiciens et mathématiciens traitent les mêmes problèmes, leur manière de les résoudre diffère. De nombreux résultats admis en physique théorique sont des problèmes ouverts en mathématiques. Cependant, l'interaction entre les idées et les résultats des mathé-

maticiens et des physiciens théoriciens a été extrêmement fructueuse pour les deux disciplines lors de ces dernières années, et c'est dans cet esprit que nous avons débouché avec B. Duplantier, O. Schramm et G. Lawler, à l'occasion d'un congrès en 2001 réunissant mathématiciens et physiciens, le cru mis en jeu par M. Aizenman pour la détermination des exposants d'intersection.

Wendelin WERNER est professeur à l'Université Paris-Sud et membre du Département de mathématiques d'Orsay. Nous remercions B. Duplantier pour l'aide amicale qu'il nous a apportée.

G. F. LAWLER, *Intersections of Random*

Walks, éditions Birkhauser-Boston, 1996.
N. MADRAS, G. SLADE, *The Self-Avoiding Walk*, éd. Birkhauser-Boston, 1996.

CARLO VANDERZANDE, *Lattice Models of Polymers*, Cambridge University Press, 1998.

