

de démontrer qu'aucun carré bimagique de côté 6 ne peut exister.

Pour un éventuel carré bimagique de côté 7, la question est encore aujourd'hui réputée ouverte. Démarrons le raisonnement.

Dans un carré 7 x 7, il y a 49 cases. Il faut donc caser les nombres de 1 à 49, soit donc 25 impairs et 24 pairs. La somme S_1 des éléments d'une rangée d'un tel carré doit être égale à $7 \times (49 + 1)/2$, soit 175.

La somme S_2 des carrés des éléments d'une rangée doit être égale à $7 \times (49 + 1) \times (2 \times 49 + 1)/6 = 5775$, qui est de la forme $4k + 3$.

Les carrés des nombres pairs étant de la forme $4k$, et les carrés des nombres impairs étant de la forme $4k + 1$, une somme de 7 carrés ne peut faire $4k + 3$ que si la rangée contient 3 ou 7 nombres impairs.

Pour caser 25 impairs sur 7 rangées, la seule possibilité est donc d'avoir : 6 rangées à 3 impairs et 1 rangée à 7 impairs. D'où la question majeure : existe-t-il des groupes de 7 nombres impairs distincts, compris entre 1 et 49, dont la somme fait 175 et la somme des carrés fait 5 775 ?

En 1892, Michel Frolov, dans le bulletin de la renommée Société Mathématique de France, affirmait qu'il n'existe aucun de ces groupes : il en conclut qu'aucun carré bimagique 7 x 7 ne peut exister. Erreur, Monsieur Frolov ! Mais nous lui pardonnerons, car l'informatique n'existe pas encore à son époque.

Nous avons trouvé exactement 60 groupes ayant ces propriétés, comme par exemple :

$$G_1 = 49, 43, 25, 19, 17, 13, 9$$

$$G_2 = 49, 41, 29, 19, 17, 11, 9$$

...

$$G_{13} = 49, 33, 31, 25, 23, 13, 1$$

...

$$G_{60} = 41, 37, 33, 31, 25, 7, 1$$

Pour constituer une ligne et une colonne d'un tel carré, il suffit qu'il existe au moins un couple de 2 parmi ces 60 groupes ayant un et un seul élément commun.

Si nos calculs sont justes, il y a exactement 424 couples possibles parmi ces groupes de 7 impairs. Par exemple les groupes G_2 , G_{13} cités ci-dessus ont en

17	29	11	19	41	49	9
36	44	7	38	5	25	20
37	3	34	18	8	33	12
15	45	30	14	46	13	12
6	2	43	35	26	31	32
16	28	40	47	22	1	21
48	24	10	4	27	23	39

7. Un carré «quasi» bimagique 7x7 obtenu avec G_2 et G_{13} . Je vous défie de trouver mieux !

commun le seul nombre 49 : le nombre 49 sera alors l'intersection ligne/colonne du couple G_2/G_{13} .

Si on ne se limite pas aux nombres impairs, il existe 1 844 groupes de nombres distincts, pairs ou impairs, compris entre 1 et 49, dont la somme fait 175 et la somme des carrés fait 5 775.

Cette liste a été publiée dès 1909 par Achille Rilly dans Sphinx - dipe. Sans informatique, saluons l'exploit !

Il est possible de construire un programme informatique qui, à partir de ces 424 couples, puis en puisant parmi les 1 844 groupes, essaye de construire un carré bimagique. Sauf erreur de programmation de ma part, j'affirme qu'un tel carré bimagique 7 x 7 n'existe pas.

Mais... voici toutefois (figure 7) un exemple de carré de côté 7 que j'ai obtenu, justement à partir du couple d'impairs G_2 / G_{13} présent en 1^{re} ligne / 6^e colonne.

Est-il magique ? Est-il bimagique ? Ce carré 7 x 7 est «quasi» bimagique. Où sont ses failles ? Mon défi : trouverez-vous mieux ?

Je vous laisse prendre votre calculatrice, ou votre tableur, et tapoter. J'affirme, sans preuve mathématique, qu'il est impossible de faire mieux. Mais peut-être est-ce faux ?

Peut-être saurez-vous approcher de plus près la bimagie de côté 7 ? Ou même, éventuellement, infirmer ce que j'annonce, et prouver, tout simplement en le trouvant, que le mythique carré bimagique de côté 7 existe bel et bien ?

Christian BOYER est consultant en informatique : cboyer@club-internet.fr. Il remercie Yves Roussel de l'ADCS et Jacques Bouteloup pour leur aide.

La Mathématique des Jeux ou Récréations Mathématiques, par Maurice Kraitchik, Stevens Frères, Bruxelles, 1930.

Carrés Magiques au Degré n, par le Général E. Cazalas, Hermann, Paris, 1934.

New Recreations with Magic Squares, par William Benson & Oswald Jacoby, Dover Publications, New York, 1976.

Carrés Magiques Carrés Latins et Eulériens, par Jacques Bouteloup, Éditions du Choix, 1991 (cet éditeur est maintenant situé à Marseille).

Les Carrés Magiques, par René Descombes Vuibert, Paris, 2000.

Oracle, ô des espoirs!

DENNIS SHASHA

Aucun oracle n'est absolument fiable : peut-on profiter de cette imperfection pour réaliser quelques profits ?

Prédire précisément le futur est le trait le plus fréquent des paris : jouer en bourse en est un bon exemple. Hélas, les bons oracles sont rares, tout comme les excellents courtiers en bourse. Dans notre jeu, nous chercherons à tirer profit de l'imperfection d'un oracle.

Vous disposez de 100 euros et avez à parier à dix reprises. Chaque pari porte sur le résultat d'un jeu de pile ou face. L'oracle annonce à chaque fois le résultat, et vous lui faites confiance pour parier, mais il ne peut mentir qu'une seule fois au cours du jeu. Quand vous avez parié x euros, la banque vous verse $2x$ euros lorsque l'oracle dit la vérité (vous avez suivi ses conseils) et elle prend votre argent lorsque l'oracle ment (il vous a induit en erreur). De quelle façon pouvez-vous optimiser votre gain final, au terme des dix paris, sans savoir quand l'oracle ment ?

Examinons un deuxième problème. Cette fois, vous décidez à l'avance les sommes que vous jouerez sans savoir quand l'oracle ment. Quels doivent être vos paris dans ce cas, et quelle somme maximale pouvez-vous espérer gagner à coup sûr, toujours sans savoir quand l'oracle ment, ni même s'il ment ? Précisons : vous perdez tout votre argent quand vous n'avez pas de quoi assurer un pari que vous aviez programmé.

Un peu d'aide pour le premier problème. Supposez qu'il n'y a que trois jets et que l'oracle ne puisse mentir qu'une fois. Combien devez-vous parier la première fois ? Le résultat du premier jet étant connu, comment devez-vous parier la deuxième et la troisième fois ? La figure ci-contre indique quelques possibilités.

La solution de l'énigme sera donnée le mois prochain, et sera bientôt disponible sur le site Internet : www.pourlascience.com

Vous avez... 		1) Vous pariez d'abord 50	
Pour ce pari, l'oracle dit :			
Vous avez :		  	
2) Vous pariez :			
Pour ce pari, l'oracle dit :			
Vous avez :		 	
2) Vous pariez :			
L'oracle dit :			
Vous avez finalement :		 	 

Solution du problème d'énigmaths du numéro 285

Pour un cercle C d'un rayon supérieur ou égal à 10 centimètres, toute coloration en jaune et en rouge satisfait la condition des 10 centimètres : le problème posé était impossible. En voici une preuve en deux étapes. D'abord, montrons qu'il existe dans le cercle deux points (J en jaune et R en rouge) dont la distance qui les sépare est comprise entre 10 et 20 centimètres. Pour ce faire, supposons rouge le centre P du cercle. Quand le périmètre d'un cercle C_p de 10 centimètres de rayon et de centre P , est jaune, alors le cercle C satisfait la condition des 10 centimètres : donc le périmètre de C_p doit être rouge. Deux cas se présentent.

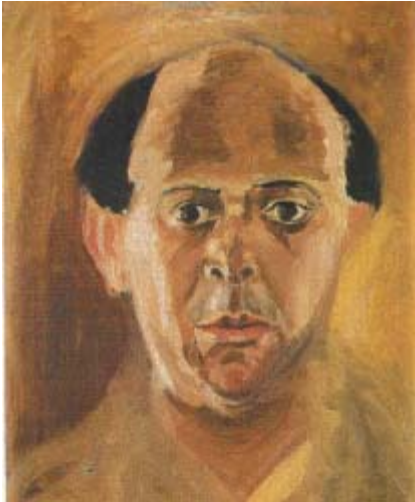
Quand le rayon du cercle C est d'exactement 10 centimètres de longueur, C et C_p sont identiques. Puisque le périmètre

est rouge, nous savons qu'au moins un point J dans le cercle est jaune. Dessinons le segment $[JP]$ puis prolongeons-le au-delà de P jusqu'au périmètre en un point R , qui est rouge. La distance entre J et R est supérieure à la longueur du rayon, mais inférieure au diamètre, donc elle est comprise entre 10 et 20 centimètres.

Lorsque le rayon du cercle C est supérieur à 10 centimètres et que le cercle C_p contient un point jaune, la conclusion du premier cas reste valable. Lorsqu'il n'y a pas de points jaunes dans C_p , nous savons que le cercle C contient un disque rouge D d'un rayon au moins égal à 10 centimètres, mais inférieur au rayon du cercle C . Prenons le premier point J jaune à l'extérieur de ce

disque D et joignons le par un segment à P . Excepté J , chaque point de ce segment est rouge, et le segment est d'au moins 10 centimètres de longueur. Le même raisonnement s'applique lorsqu'on inverse les couleurs. Ainsi, le cercle C contient deux points (J et R) dont la distance qui les sépare est comprise entre 10 et 20 centimètres.

Pour la seconde étape du raisonnement, dessinons les cercles de 10 centimètres de rayon centrés l'un en J et l'autre en R . Ces cercles se coupent en un ou deux points, dont au moins un, Q , est à l'intérieur du cercle C : soit le segment $[JQ]$, soit le segment $[RQ]$ ont des extrémités de couleurs différentes. Ainsi, le cercle C satisfait à coup sûr la condition des 10 centimètres.



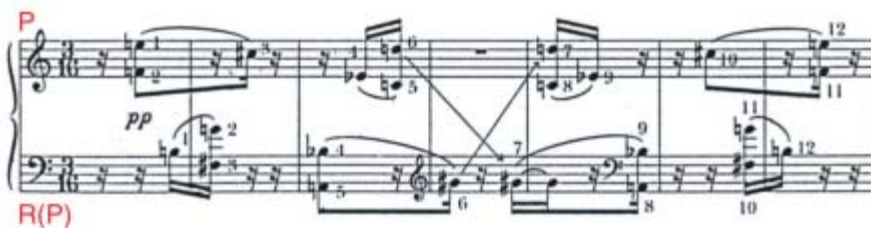
Mathématiques dodécaphoniques

CARLOTA SIMOES

Les mathématiques aident à analyser les règles strictes de la musique dodécaphonique.

Depuis Pythagore, mathématiques et musique sont sœurs jumelles. La musique du xx^e siècle n'échappe pas à l'inspiration mathématique, notamment la musique dodécaphonique ; cette musique a été créée en 1923 par Arnold von Schoenberg (1874-1951) – son autoportrait est à côté du titre –, et adoptée par ses deux élèves Alban Berg (1885-1935) et Anton Webern (1883-1945). Les trois compositeurs étaient intellectuellement «à l'unisson», aussi leur association a été nommée la *Seconde école viennoise de musique*, après celle de Haydn, Mozart et Beethoven.

Les règles de composition de cette musique sont formalisables et la mathématique facilite l'analyse des œuvres du trio viennois. La musique dodécaphonique se distingue de la musique tonale où une des sept notes de la gamme diatonique (*do, ré, mi, fa, sol, la, si, do*) prédomine sur les autres. Le plus souvent, il s'agit de la cinquième note (ici, *sol*) de la gamme choisie par le compositeur pour marquer la



2. LES VARIATIONS POUR PIANO, OPUS 27, de Webern, utilisent une série P (en haut) et la série rétrograde R(P) (en bas). Ces deux séries se combinent, c'est-à-dire que les six premières notes de P, jouées par la main droite, et les six premières notes de R(P), jouées par la main gauche, forment une série complète des 12 notes de la gamme chromatique. Les moitiés suivantes des deux séries composent aussi une série complète.

tonalité. Cette note dominante impose aux autres notes une hiérarchie à laquelle Schoenberg a voulu échapper. En 1923, il établit la méthode à douze tons, qui donne le même mérite à chaque note de la gamme chromatique suivante : *do, do#, ré, mib, mi, fa, solb, sol, lab, la, sib, si* ($\sharp$ signifie dièse, qui augmente d'un demi-ton la note, et $\flat$, bémol, qui la diminue d'autant). Dans cette gamme, chaque note est séparée de la suivante par un demi ton.

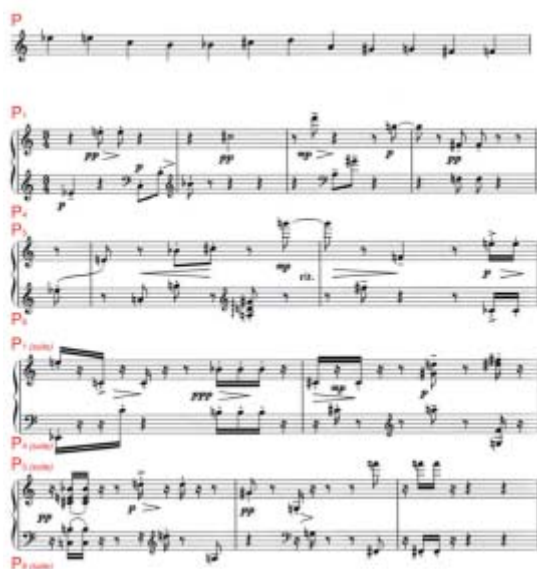
Une composition dodécaphonique est fondée sur une séquence de ces 12 tons musicaux distincts, sans répétition, nommée série élémentaire (voir la figure 1). L'œuvre est une combinaison de cette série et d'autres séries dérivées par des symétries que nous décrirons plus loin. Par ailleurs, aucune série n'est jouée avant que la précédente ne soit terminée : au terme de la composition, les 12 notes sont apparues un même nombre de fois.

Nous représenterons les notes d'une série par un nombre entier, par convention, la première note étant représentée par 0 : ainsi, la série élémentaire utilisée par Schoenberg dans son *Concerto pour piano, opus 42*, (*mi, sib, ré, fa, mi, do, solb, lab, do#, la, si, sol*) devient (0, 7, 11, 2, 1, 9, 3, 5, 10, 6, 8, 4). La différence entre deux nombres représentant deux notes est le nombre de demi-tons qui séparent les deux notes correspondantes.

Quelles symétries sont-elles autorisées dans une composition dodécaphonique ? Notons d'abord que chaque

nombre est une classe d'équivalence modulo 12 : chaque nombre représente d'une part ce nombre, mais aussi ce nombre additionné d'un multiple de 12. Ainsi, par exemple, 1 est équivalent à 49 ou à -11. L'addition de deux nombres devient une addition modulo 12 : par exemple, $(3 + 8)^* = 11$, $(5 + 7)^* = 0$ ou $(7 + 7)^* = 2$ (l'astérisque indique que la somme est effectuée modulo 12, c'est-à-dire que l'on n'écrit que le reste de la division par 12 du résultat de l'addition).

Examinons maintenant les symétries. La série élémentaire est $P = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$, où $a_1 = 0$. La série rétrograde, nommée $R(P)$ est P jouée à l'envers : $R(P) = (a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$. Pour la série élémentaire du *Concerto pour piano, opus 42*, $R(P) = (4, 8, 6, 10, 5, 3, 9, 1, 2, 11, 7, 0)$. Dans la série renversée (ou en miroir), nommée $I(P)$, les nombres de la série élémentaire P sont remplacés par leurs nombres opposés modulo 12 : $I(P) = [(-a_1)^*, (-a_2)^*, (-a_3)^*, (-a_4)^*, (-a_5)^*, (-a_6)^*, (-a_7)^*, (-a_8)^*, (-a_9)^*, (-a_{10})^*, (-a_{11})^*, (-a_{12})^*]$, soit, dans notre exemple (0, 5, 1, 10, 11, 3, 9, 7, 2, 6, 4, 8). La série renversée rétrograde, $RI(P)$, est obtenue de P en appliquant les deux opérations précédentes : $RI(P) = [(-a_{12})^*, (-a_{11})^*, (-a_{10})^*, (-a_9)^*, (-a_8)^*, (-a_7)^*, (-a_6)^*, (-a_5)^*, (-a_4)^*, (-a_3)^*, (-a_2)^*, (-a_1)^*]$, soit (8, 4, 6, 2, 7, 9, 3, 11, 10, 1, 5, 0). La série transposée de P par k demi-tons (k est com-



1. LE KINDERSTÜCK est la première œuvre dodécaphonique de Webern. La pièce débute par quatre séries qui sont les transposées de P (en haut), de respectivement (de haut en bas) 1, 4, 5 et 6 demi-tons.