

Oracle, ô des espoirs!

DENNIS SHASHA

Aucun oracle n'est absolument fiable : peut-on profiter de cette imperfection pour réaliser quelques profits ?

Prédire précisément le futur est le trait le plus fréquent des paris : jouer en bourse en est un bon exemple. Hélas, les bons oracles sont rares, tout comme les excellents courtiers en bourse. Dans notre jeu, nous chercherons à tirer profit de l'imperfection d'un oracle.

Vous disposez de 100 euros et avez à parier à dix reprises. Chaque pari porte sur le résultat d'un jeu de pile ou face. L'oracle annonce à chaque fois le résultat, et vous lui faites confiance pour parier, mais il ne peut mentir qu'une seule fois au cours du jeu. Quand vous avez parié x euros, la banque vous verse $2x$ euros lorsque l'oracle dit la vérité (vous avez suivi ses conseils) et elle prend votre argent lorsque l'oracle ment (il vous a induit en erreur). De quelle façon pouvez-vous optimiser votre gain final, au terme des dix paris, sans savoir quand l'oracle ment ?

Examinons un deuxième problème. Cette fois, vous décidez à l'avance les sommes que vous jouerez sans savoir quand l'oracle ment. Quels doivent être vos paris dans ce cas, et quelle somme maximale pouvez-vous espérer gagner à coup sûr, toujours sans savoir quand l'oracle ment, ni même s'il ment ? Précisons : vous perdez tout votre argent quand vous n'avez pas de quoi assurer un pari que vous aviez programmé.

Un peu d'aide pour le premier problème. Supposez qu'il n'y a que trois jets et que l'oracle ne puisse mentir qu'une fois. Combien devez-vous parier la première fois ? Le résultat du premier jet étant connu, comment devez-vous parier la deuxième et la troisième fois ? La figure ci-contre indique quelques possibilités.

La solution de l'énigme sera donnée le mois prochain, et sera bientôt disponible sur le site Internet : www.pourlascience.com

Vous avez... 		1) Vous pariez d'abord 50	
Pour ce pari, l'oracle dit :			
Vous avez :		  	
2) Vous pariez :			
Pour ce pari, l'oracle dit :			
Vous avez :		 	
2) Vous pariez :			
L'oracle dit :			
Vous avez finalement :		 	 

Solution du problème d'énigmaths du numéro 285

Pour un cercle C d'un rayon supérieur ou égal à 10 centimètres, toute coloration en jaune et en rouge satisfait la condition des 10 centimètres : le problème posé était impossible. En voici une preuve en deux étapes. D'abord, montrons qu'il existe dans le cercle deux points (J en jaune et R en rouge) dont la distance qui les sépare est comprise entre 10 et 20 centimètres. Pour ce faire, supposons rouge le centre P du cercle. Quand le périmètre d'un cercle C_p de 10 centimètres de rayon et de centre P , est jaune, alors le cercle C satisfait la condition des 10 centimètres : donc le périmètre de C_p doit être rouge. Deux cas se présentent.

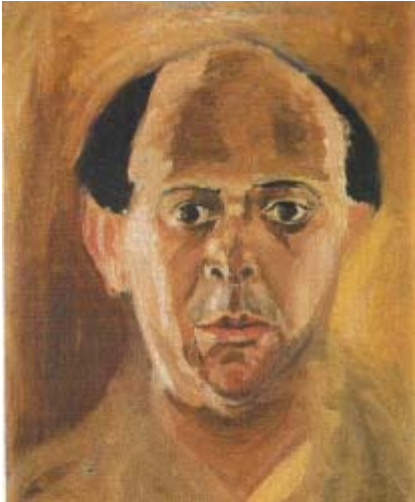
Quand le rayon du cercle C est d'exactement 10 centimètres de longueur, C et C_p sont identiques. Puisque le péri-

mètre est rouge, nous savons qu'au moins un point J dans le cercle est jaune. Dessinons le segment $[JP]$ puis prolongeons-le au-delà de P jusqu'au périmètre en un point R , qui est rouge. La distance entre J et R est supérieure à la longueur du rayon, mais inférieure au diamètre, donc elle est comprise entre 10 et 20 centimètres.

Lorsque le rayon du cercle C est supérieur à 10 centimètres et que le cercle C_p contient un point jaune, la conclusion du premier cas reste valable. Lorsqu'il n'y a pas de points jaunes dans C_p , nous savons que le cercle C contient un disque rouge D d'un rayon au moins égal à 10 centimètres, mais inférieur au rayon du cercle C . Prenons le premier point J jaune à l'extérieur de ce

disque D et joignons le par un segment à P . Excepté J , chaque point de ce segment est rouge, et le segment est d'au moins 10 centimètres de longueur. Le même raisonnement s'applique lorsqu'on inverse les couleurs. Ainsi, le cercle C contient deux points (J et R) dont la distance qui les sépare est comprise entre 10 et 20 centimètres.

Pour la seconde étape du raisonnement, dessinons les cercles de 10 centimètres de rayon centrés l'un en J et l'autre en R . Ces cercles se coupent en un ou deux points, dont au moins un, Q , est à l'intérieur du cercle C : soit le segment $[JQ]$, soit le segment $[RQ]$ ont des extrémités de couleurs différentes. Ainsi, le cercle C satisfait à coup sûr la condition des 10 centimètres.



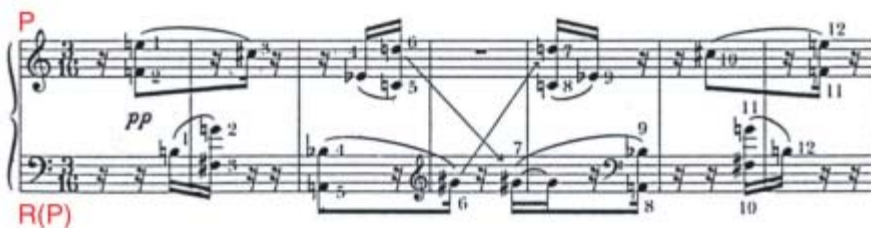
Mathématiques dodécaphoniques

CARLOTA SIMOES

Les mathématiques aident à analyser les règles strictes de la musique dodécaphonique.

Depuis Pythagore, mathématiques et musique sont sœurs jumelles. La musique du xx^e siècle n'échappe pas à l'inspiration mathématique, notamment la musique dodécaphonique ; cette musique a été créée en 1923 par Arnold von Schoenberg (1874-1951) – son autoportrait est à côté du titre –, et adoptée par ses deux élèves Alban Berg (1885-1935) et Anton Webern (1883-1945). Les trois compositeurs étaient intellectuellement «à l'unisson», aussi leur association a été nommée la *Seconde école viennoise de musique*, après celle de Haydn, Mozart et Beethoven.

Les règles de composition de cette musique sont formalisables et la mathématique facilite l'analyse des œuvres du trio viennois. La musique dodécaphonique se distingue de la musique tonale où une des sept notes de la gamme diatonique (*do, ré, mi, fa, sol, la, si, do*) prédomine sur les autres. Le plus souvent, il s'agit de la cinquième note (ici, *sol*) de la gamme choisie par le compositeur pour marquer la



2. LES VARIATIONS POUR PIANO, OPUS 27, de Webern, utilisent une série P (en haut) et la série rétrograde R(P) (en bas). Ces deux séries se combinent, c'est-à-dire que les six premières notes de P, jouées par la main droite, et les six premières notes de R(P), jouées par la main gauche, forment une série complète des 12 notes de la gamme chromatique. Les moitiés suivantes des deux séries composent aussi une série complète.

tonalité. Cette note dominante impose aux autres notes une hiérarchie à laquelle Schoenberg a voulu échapper. En 1923, il établit la méthode à douze tons, qui donne le même mérite à chaque note de la gamme chromatique suivante : *do, do#, ré, mib, mi, fa, solb, sol, lab, la, sib, si* ($\sharp$ signifie dièse, qui augmente d'un demi-ton la note, et $\flat$, bémol, qui la diminue d'autant). Dans cette gamme, chaque note est séparée de la suivante par un demi ton.

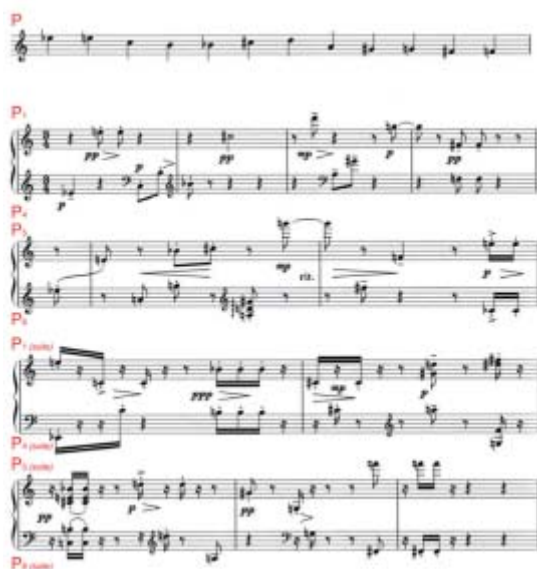
Une composition dodécaphonique est fondée sur une séquence de ces 12 tons musicaux distincts, sans répétition, nommée série élémentaire (voir la figure 1). L'œuvre est une combinaison de cette série et d'autres séries dérivées par des symétries que nous décrirons plus loin. Par ailleurs, aucune série n'est jouée avant que la précédente ne soit terminée : au terme de la composition, les 12 notes sont apparues un même nombre de fois.

Nous représenterons les notes d'une série par un nombre entier, par convention, la première note étant représentée par 0 : ainsi, la série élémentaire utilisée par Schoenberg dans son *Concerto pour piano, opus 42*, (*mi, sib, ré, fa, mi, do, solb, lab, do#, la, si, sol*) devient (0, 7, 11, 2, 1, 9, 3, 5, 10, 6, 8, 4). La différence entre deux nombres représentant deux notes est le nombre de demi-tons qui séparent les deux notes correspondantes.

Quelles symétries sont-elles autorisées dans une composition dodécaphonique ? Notons d'abord que chaque

nombre est une classe d'équivalence modulo 12 : chaque nombre représente d'une part ce nombre, mais aussi ce nombre additionné d'un multiple de 12. Ainsi, par exemple, 1 est équivalent à 49 ou à -11. L'addition de deux nombres devient une addition modulo 12 : par exemple, $(3 + 8)^* = 11$, $(5 + 7)^* = 0$ ou $(7 + 7)^* = 2$ (l'astérisque indique que la somme est effectuée modulo 12, c'est-à-dire que l'on n'écrit que le reste de la division par 12 du résultat de l'addition).

Examinons maintenant les symétries. La série élémentaire est $P = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$, où $a_1 = 0$. La série rétrograde, nommée $R(P)$ est P jouée à l'envers : $R(P) = (a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$. Pour la série élémentaire du *Concerto pour piano, opus 42*, $R(P) = (4, 8, 6, 10, 5, 3, 9, 1, 2, 11, 7, 0)$. Dans la série renversée (ou en miroir), nommée $I(P)$, les nombres de la série élémentaire P sont remplacés par leurs nombres opposés modulo 12 : $I(P) = [(-a_1)^*, (-a_2)^*, (-a_3)^*, (-a_4)^*, (-a_5)^*, (-a_6)^*, (-a_7)^*, (-a_8)^*, (-a_9)^*, (-a_{10})^*, (-a_{11})^*, (-a_{12})^*]$, soit, dans notre exemple (0, 5, 1, 10, 11, 3, 9, 7, 2, 6, 4, 8). La série renversée rétrograde, $RI(P)$, est obtenue de P en appliquant les deux opérations précédentes : $RI(P) = [(-a_{12})^*, (-a_{11})^*, (-a_{10})^*, (-a_9)^*, (-a_8)^*, (-a_7)^*, (-a_6)^*, (-a_5)^*, (-a_4)^*, (-a_3)^*, (-a_2)^*, (-a_1)^*]$, soit (8, 4, 6, 2, 7, 9, 3, 11, 10, 1, 5, 0). La série transposée de P par k demi-tons (k est com-



1. LE KINDERSTÜCK est la première œuvre dodécaphonique de Webern. La pièce débute par quatre séries qui sont les transposées de P (en haut), de respectivement (de haut en bas) 1, 4, 5 et 6 demi-tons.

pris entre 0 et 11) est obtenue par l'addition modulo 12 de k à tous les nombres de la série P : $P_k = [(a_1+k)^*, (a_2+k)^*, (a_3+k)^*, (a_4+k)^*, (a_5+k)^*, (a_6+k)^*, (a_7+k)^*, (a_8+k)^*, (a_9+k)^*, (a_{10}+k)^*, (a_{11}+k)^*, (a_{12}+k)^*]$. Par exemple, dans le *Concerto pour piano*, *Opus 42*, $P_5 = (5, 0, 4, 7, 6, 2, 8, 10, 3, 11, 1, 9)$.

De la même façon, nous obtenons les transposées par k demi-tons d'une série rétrograde $R_k(P)$, d'une série renversée $I_k(P)$ et d'une série renversée rétrograde $RI_k(P)$. À partir d'une série élémentaire P , nous construisons 47 séries dérivées que nous pouvons regrouper dans une matrice (voir la figure 4). Une composition dodécaphonique est construite uniquement à partir d'une série élémentaire et de ses dérivées. Le compositeur choisit la série selon l'idée qu'il a de l'œuvre.

Une série étant une permutation de 12 nombres, il en existe donc $12!$, soit 479 001 600. Les musiciens se sont intéressés à celles qui avaient certaines propriétés. Prenons, par exemple, la série $P = (0, 2, 7, 5, 10, 9, 3, 4, 11, 1, 8, 6)$: sa série transposée de six demi-tons, soit $P_6 = (6, 8, 1, 11, 4, 3, 9, 10, 5, 7, 2, 0)$ est identique à $R(P)$, aussi cette série élémentaire P a moins de 47 séries dérivées.

Une autre propriété exploitée est la combinaison de deux sous-séries élémentaires. Une série élémentaire $P = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$ peut être divisée en deux séries, nommées hexacordes, de six notes : la série $H_1(P) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ et la série $H_2(P) = (a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$. Les séries A et B se combinent quand $[H_1(A), H_2(B)]$ et $[H_1(B), H_2(A)]$ définissent aussi des séries élémentaires. Chaque série élémentaire se combine à sa série rétrograde. Webern a utilisé cette propriété dans *Les variations pour piano*, *opus 27* (voir la figure 2), fondée sur la série $P = (0, 1, 9, 11, 8, 10, 4, 5, 6, 2, 3, 7)$, avec $mi=0$. Cette série P se subdivise en $H_1(P) = (0, 1, 9, 11, 8, 10)$ et en $H_2(P) = (4, 5, 6, 2, 3, 7)$. Ici, $R(P) = (7, 3, 2, 6, 5, 4, 10, 8, 11, 9, 1, 0)$ se divise aussi en deux hexacordes. Quand la main droite joue le premier hexacorde de P , $H_1(P) = (0, 1, 9, 11, 8, 10)$, suivi du deuxième hexacorde de $R(P)$, la main gauche joue le premier hexacorde de $R(P)$,

suivi du deuxième hexacorde de P . La musique a ainsi la forme d'un palindrome : la main droite joue 0, 1, 9, 11, 8, 10, 10, 8, 11, 9, 1, 0, et la main gauche 7, 3, 2, 6, 5, 4, 4, 5, 6, 2, 3, 7. Quand les mains ont joué chacune leur premier hexacorde, les 12 notes de la gamme ont été émises.

Dans *Pièces pour piano*, *opus 33a* (voir la figure 5), Schoenberg utilise la série élémentaire $P = (0, 7, 2, 1, 11, 8, 3, 5, 9, 10, 4, 6)$, avec $s^p = 0$. $I(P) = (0, 5, 10, 11, 1, 4, 9, 7, 3, 2, 8, 6)$ et $I_5(P) = (5, 10, 3, 4, 6, 9, 2, 0, 8, 7, 1, 11)$. P et $I_5(P)$ sont deux séries combinées, chacune est jouée par une main : là encore, lorsqu'elles ont joué le premier hexacorde, les 12 notes ont été jouées.

Du trio viennois, Anton von Webern est celui qui s'est le plus éloigné de la musique tonale. Ses compositions sont souvent brèves et concises : elles durent seulement quelques minutes. La mélodie traditionnelle y est substituée par des notes individuelles, qui sont parfois attribuées à des instruments différents, comme dans le *Concerto pour neuf instruments*, *opus 24*. La série élémentaire de cette composition, $P = (0, 11, 3, 4, 8, 7, 9, 5, 6, 1, 2, 10)$, avec $Si = 0$, a été choisie pour ses nombreuses symétries internes. Prenons la série des trois premières notes $T = (0, 11, 3)$, $I(T) = (0, 1, 9)$, $R(T) = (3, 11, 0)$ et $RI(T) = (9, 1, 0)$. En décalant, on obtient : $I_1(T) = (1, 2, 10)$, $R_6(T) = (9, 5, 6)$ et $RI_7(T) = (4, 8, 7)$. La série élémentaire P peut être réécrite à partir de ces mini séries $P = (T, RI_7(T), R_6(T), I_1(T))$: chaque mini série est jouée par un instrument différent (voir la figure 3).

Après Schoenberg, Berg et Webern, d'autres compositeurs ont utilisé des séries pour des éléments musicaux autres que les notes, tels la métrique, l'intensité du son, le timbre...

Si «la musique dodécaphonique a été condamnée par les nazis, car son auteur était juif, par les staliniens pour avoir un formalisme cosmopolite bourgeois et par le public pour être différent de tout ce qui existait», elle est sans doute appréciée des mathématiciens.

Carlota SIMOES,
Université de Coimbra, Portugal



3. DANS LE CONCERTO POUR NEUF INSTRUMENTS, OPUS 24, de Webern, la série élémentaire P (en haut) se décompose en quatre sous-séries de trois notes. À partir de la première sous-série Q , on construit $RI_7(Q)$, $R_6(Q)$ et $I_1(Q)$. P se réécrit ainsi $(Q, RI_7(Q), R_6(Q), I_1(Q))$. Chacune de ces sous-séries est jouée par un instrument différent : la flûte, le hautbois, la clarinette et la trompette.

	1	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	
P	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	R
P ₅	5	0	4	7	6	2	8	10	3	11	1	9	R ₅
P ₁	1	8	0	3	2	10	4	6	11	7	9	5	R ₁
P ₁₀	10	5	9	0	11	7	1	3	8	4	6	2	R ₁₀
P ₁₁	11	6	10	1	0	8	2	4	9	5	7	3	R ₁₁
P ₃	3	10	2	5	4	0	6	8	10	9	11	7	R ₃
P ₉	9	4	8	11	10	6	0	2	7	3	5	1	R ₉
P ₇	7	2	6	9	8	4	10	0	5	1	3	11	R ₇
P ₂	2	9	1	4	3	11	5	7	0	8	10	6	R ₂
P ₆	6	1	5	8	7	3	9	11	4	0	2	10	R ₆
P ₄	4	11	3	6	5	1	7	9	2	10	0	8	R ₄
P ₈	8	3	7	10	9	5	11	1	6	2	4	0	R ₈
	RI	RI ₇	RI ₁₁	RI ₂	RI ₁	RI ₉	RI ₃	RI ₅	RI ₁₀	RI ₆	RI ₈	RI ₄	

4. CETTE MATRICE regroupe les séries dérivées d'une série élémentaire P . À partir de celle-ci, on construit la série rétrograde $R(P)$, la série renversée $I(P)$ et la série renversée rétrograde $RI(P)$. Chacune de ces quatre séries peut être décalée de 1 à 11 demi-tons : on construit ainsi P_k , $R_k(P)$, $I_k(P)$ et $RI_k(P)$, pour k , un entier compris entre 1 et 11. Au total, une série P a 47 séries dérivées.



5. LES PIÈCES POUR PIANO, OPUS 33A, de Schoenberg, sont élaborées à partir d'une série élémentaire P et de la série renversée décalée de cinq demi-tons $I_5(P)$. Ces deux séries (en haut, à

droite) se combinent : quand les mains gauche et droite ont joué chacune les six premières notes de chaque série, les 12 notes de la gamme chromatique ont été jouées.



Chevaucher les ondes

ROLAND LEHOUCQ • JEAN-MICHEL COURTY

Un mobile rattrapant les ondes qu'il émet au cours de son mouvement en subit les rudes effets. Au contraire, quand il les dépasse, il peut en profiter.

Un avion qui vole à la vitesse du son vibre tant qu'il est difficile à piloter. Depuis 1947, date à laquelle le «mur du son» fut vaincu par l'aviateur américain Charles Yeager, les pilotes savent que les fortes vibrations qui, au passage du mur du son, secouent la carlingue d'un avion non préparé à cette fin, disparaissent dès que sa vitesse excède celle du son.

L'apparition de vibrations au passage de la vitesse de propagation d'une onde est un phénomène général. Il existe ainsi un «mur de l'onde» pour chaque type : un «mur de l'onde mécanique», un «mur de la vague» etc. Quand la vitesse du mobile a dépassé celle de l'onde qu'il vient de chevaucher, celui-ci reprend une allure paisible.

LE MUR DE LA CATÉNAIRE

En 1990, les ingénieurs de la SNCF qui préparaient le record de vitesse du TGV furent confrontés au phénomène : le train ne pouvait dépasser 500 kilomètres par heure car, à cette vitesse, le captage du courant devient difficile à cause des

mouvements qui agitent la caténaire (le câble tendu, suspendu à l'horizontale au-dessus du train où circule le courant). Ce courant alimentant en énergie la motrice est prélevé par le pantographe, un bras articulé situé sur le toit.

Telle une corde de piano, la caténaire vibre verticalement dans une direction perpendiculaire à son axe : des «ondes transverses» s'y propagent. Leur vitesse est d'autant plus grande que la caténaire est légère et qu'elle est tendue (cette vitesse est égale à la racine carrée du quotient de la tension par la masse par unité de longueur de la caténaire).

À titre de comparaison, la corde de piano qui donne le *la* du diapason (440 hertz) est soumise à une tension d'environ 85 kilogrammes. D'une longueur de 42 centimètres et d'un diamètre de un millimètre, une telle corde d'acier (de densité 7,86) pèse environ 6,2 grammes par mètre. Les ondes qui la parcourent avancent à 370 mètres par seconde (1 330 kilomètres par heure) ; elles font ainsi exactement 440 aller et retour par seconde.

Le problème des ingénieurs de la SNCF était que les ondes transverses

qui parcourent une caténaire sont plus lentes que sur une corde à piano et deviennent comparables aux vitesses des trains les plus rapides. Une caténaire de TGV est constituée d'un câble profilé de cuivre pur d'une section de 150 millimètres carrés, soutenu par un câble porteur en bronze. Comme la densité du cuivre est de 8,9, la masse par unité de longueur d'un tel câble est de quelque 1,4 kilogramme par mètre soit environ 200 fois plus que celle de la corde à piano déjà évoquée ; il est mis sous une tension 30 fois plus forte que celle de cette corde, soit 2 600 décanewtons. La vitesse de propagation des ondes transverses le long de la caténaire est, par conséquent, seulement deux fois et demie plus faible que le long de la corde à piano. Elle vaut environ 500 kilomètres par heure.

Toutefois, contrairement au marteau du piano, le pantographe ne frappe pas la caténaire, mais la soulève. Afin de créer le bon contact électrique recherché, il pousse le câble de cuivre vers le haut. Lorsque le train est à l'arrêt, le pantographe soulève le câble avec une force d'environ cinq décanewtons ; la caténaire adopte la forme d'un V renversé dont la pointe est soutenue par le pantographe. La situation est similaire lorsque le train se déplace lentement. La vitesse augmentant, le V renversé dû au pantographe se déforme et des ondulations sont transmises dans la caténaire.

L'amplitude de ces déformations augmente avec la vitesse d'autant plus que l'on s'approche de la vitesse de propagation des ondes. Le soulèvement de la caténaire atteint alors 30 à 35 centimètres par endroits : tout se passe comme si le câble se dérobait devant le pantographe. Le phénomène dégrade le captage du courant jusqu'à entraîner la disjonction des engins de traction, voire des avaries sur les installations!

Ainsi, la vitesse de propagation de ce type d'onde apparaît comme une vitesse limite. Il existe un «mur de la caténaire» analogue au mur du son. Sur une voie de TGV normale, où la vitesse



Illustrations de B. Vacaro

De violents mouvements agitaient la carlingue d'un avion transsonique qui dépassait le mur du son ; ce phénomène fit courir de graves dangers aux pilotes d'essais qui franchirent en premier le mur du son après la Seconde guerre mondiale. Actuellement, la conception des avions supersoniques modernes permet d'atténuer considérablement tous ces effets.