

un être bienveillant, il peut devenir maléfique et menacer les vivants si les rituels funéraires n'ont pas neutralisé les pouvoirs qu'il avait avant sa mort. Or, la forêt équatoriale est perçue par ses occupants comme une zone de vigilance obligée où le danger est omniprésent. Avant d'être l'habitat de l'homme, elle est celui d'animaux, souvent féroces, hostiles et capables d'agresser l'homme. Le danger vient aussi de puissances encore plus surnaturelles, qui agissent à travers les félins, les rapaces, les reptiles ou les chauves-souris, et qui pouvaient être perçues comme la manifestation d'un retour des morts parmi les vivants.

En créant une nécropole isolée, dans laquelle les morts resteraient «à leur place», honorés et satisfaits par des rituels funéraires, la société s'assurait une forme de sécurité. Les rites funéraires étaient une sorte de pacte établi avec les puissances surnaturelles des «autres mondes» qui côtoient le monde terrestre ordinaire des vivants.

Outre les innombrables sépultures de La Tolita, les figurines semblent révéler quelques-unes de ces pratiques funéraires. Un grand nombre de figurines anthropomorphes moulées en céramique représentent un personnage allongé sur le dos et immobilisé par des bandelettes ou des sangles le maintenant sur une civière (voir la figure 5). Dans le passé, on les a interprétés comme des individus en train d'accomplir des rites d'initiation ou des patients attendant une «opération chirurgicale». Cependant, l'attitude de ces personnages étendus évoque plutôt des êtres sans vie : nous pensons que ces figurines représentent les cadavres des défunts, préparés pour leur transport vers La Tolita, selon la coutume du retour à la terre d'origine culturelle. D'après le caractère unique de la nécropole de La Tolita, on pense que la société organisait pour ses plus importants défunts un «voyage de retour», probablement par voie maritime, au moyen de pirogues creusées dans de gros troncs d'arbre, dont on possède diverses représentations en céramique.

L'occupation de l'île de La Tolita cesse entre 300 et 350. Selon toute probabilité, sa fonction de nécropole ne perdure pas après l'abandon de l'île par ses habitants, mais les populations des alentours en gardent le souvenir. Peu après l'arrivée des premiers Espagnols dans la région, le chroniqueur

Cabello de Balboa rapporte qu'«entre la baie de San Mateo (l'embouchure du rio Esmeraldas) et Ancon de Sardinias, il y a un petit fleuve que les indigènes tiennent pour sacré et lieu de vénération ; ils y viennent pour faire leurs prières et apportent de petits paniers de poudre d'or qu'ils y répandent. Là, séjourne une garnison de 100 Indiens ou plus, qui sont entretenus par les gens de cette province...»

Malgré les siècles qui séparent l'apogée de la culture Tumaco-La Tolita de ce témoignage, l'île reste un lieu sacré, respecté et entretenu par les groupes indigènes contemporains de la conquête, qui conservaient ainsi un lien étroit avec leurs origines.

Toutefois, cette vénération prend fin entre l'arrivée des conquistadores et la visite du moine franciscain Juan de Santa Gertrudis, au XVIII^e siècle, qui nota que l'île de La Tolita était un lieu d'enterrements préhispanique. Il remarque que les monticules artificiels sont érodés par les eaux des grandes marées (ce qui devait déjà être le cas auparavant, mais à une moindre échelle). Il observe aussi que les Indiens de la région y viennent pour récolter, sur les berges du fleuve, divers objets en or ou en céramique que les eaux font apparaître en détruisant les sépultures.

Aujourd'hui, l'érosion et les pillards de sépultures ravagent encore le site de La Tolita. Dans les autres sites archéologiques, la situation est analogue : les pillards détruisent les gisements en quête de figurines, d'ornements ou d'insignes de pouvoir en or, qu'ils revendent, souvent à vil prix, aux intermédiaires alimentant les galeries d'art précolombien en Équateur, en Colombie et à l'étranger. Dans ces pays où la fouille clandestine est une tradition bien ancrée depuis les pillages de la conquête espagnole, la protection du patrimoine culturel et des vestiges précolombiens demeure trop souvent lettre morte, en dépit des efforts des entités locales pour faire respecter le passé et éviter

J.-F. BOUCHARD, archéologue au CNRS, a dirigé des missions françaises en Colombie et en Équateur de 1976 à 2000.

J. ALCINA-FRANCH, *La arqueología de Esmeraldas (Ecuador). Introducción general. Memorias de la Misión Arqueológica Española en el Ecuador*, vol. 1, Ministerio de Asuntos Exteriores, Madrid, 1979.

J.-F. Bouchard, *Recherches archéologiques*



6. CES BOUCLES D'OREILLES font partie des innombrables objets et figurines en or que le site de La Tolita a livrés. Les défunts les plus importants y étaient enterrés avec des bijoux, des objets personnels et des offrandes faits du précieux métal que les Indiens récoltaient dans les fleuves de la plaine alluviale.

la destruction des sites archéologiques. Par ailleurs, beaucoup de sites, près des mangroves et des cours d'eau, sont menacés de destruction ou ont déjà été détruits par la construction de grands bassins d'élevage d'aquaculture, de plus en plus nombreux dans la région.

Toutefois, le passé précolombien de la région est devenu un peu moins mystérieux depuis que des fouilles archéologiques y ont été entreprises. La longue prospérité de la culture de Tumaco-La Tolita contraste avec les tentatives modernes de développer la plupart des régions boisées équatoriales, qui, malgré les progrès techniques, n'aboutissent souvent qu'à la destruction du milieu naturel, trop fragile pour résister aux agressions de puissants engins mécaniques. Cette culture avait su conserver l'environnement et disposait de ressources bien supérieures à celles des populations actuelles, qui comptent parmi les plus déshéritées du littoral Pacifique équatorial.

dans la région de Tumaco (Colombie), in *Mémoire*, n° 34, Institut français d'études andines, Éditions Recherche sur les Civilisations, A.D.P.E., Paris, 1984.

J.-F. BOUCHARD, *Occupations préhispaniques à El Morro-Tumaco (Colombie)*, Colloque archéologie des Andes équatoriales, département d'ethnologie, Univ. de Neuchâtel, Bulletin de la Société suisse des américanistes, n° 63, pp. 111-116, février 1999.

L'enfer des paris

JEAN-PAUL DELAHAYE

Certaines formulations sont parfois si simples qu'on croit pouvoir maîtriser les probabilités. À tort : il faut nous méfier de l'intuition.

Les probabilités sont un domaine où l'intuition nous joue des tours. Nous allons présenter trois jeux étranges où notre intuition a du mal à produire un jugement correct, ce qui conduit à des situations que nous jugeons paradoxales. La première est d'autant plus étonnante qu'elle est simple, la deuxième est déjà plus subtile, la troisième laisse carrément perplexe.

S'OPPOSER AU HASARD DES NAISSANCES?

Dans un pays lointain, les femmes ont des enfants qui sont de sexe masculin dans 50 pour cent des cas exactement et, bien sûr, de sexe féminin dans 50 pour cent des cas. Le gouvernement décide que seuls les couples ayant eu au moins une fille toucheront leur retraite. En réaction à cette mesure, chaque couple adopte alors la stratégie suivante :

- si leur premier enfant est une fille, satisfait il n'en a pas d'autres ;
- si le premier enfant est un garçon, le couple a un second enfant qui sera le dernier si c'est une fille ;
- et ainsi de suite, chaque couple ayant des enfants jusqu'à ce qu'il ait une fille, laquelle est alors leur dernier enfant.

Cette stratégie favorise les filles puisque les familles s'arrêtent dès qu'une fille naît. Sans faire de calcul et en réfléchissant une minute au plus, donnez votre avis : la proportion de filles à la naissance dans ce pays est-elle de $1/3$, $1/2$, $2/3$, $3/4$ ou $4/5$? (l'une des réponses proposées est juste)

Réponse

La seconde réponse de la liste, $1/2$, est la bonne : les stratégies des familles n'ont aucune influence sur la proportion de filles (il en serait de même si la probabilité de naissance des filles était différente de 50 pour cent). Aussi surprenant que cela paraisse, les stratégies familiales appliquées par les couples n'ont aucun effet sur le rapport garçon/fille. On peut s'en rendre compte sans faire le moindre calcul : quelle que soit la position d'une fille dans une famille, la probabilité que le prochain

enfant soit de sexe féminin est $1/2$: le passé n'influe pas sur la naissance à venir (c'est du moins l'hypothèse raisonnable qu'on adopte toujours). Tout enfant à naître ayant une probabilité de 50 pour cent d'être une fille, il naît donc en moyenne une fille pour deux naissances. Plus généralement, quelles que soient les règles adoptées par les familles pour cesser d'avoir des enfants en fonction des précédentes naissances dans la famille, les proportions de filles et de garçons restent inchangées : toutes les stratégies se valent et aucune n'a le moindre effet perturbateur.

Auriez-vous des doutes concernant le raisonnement ci-dessus ? Faites alors le calcul suivant (pour simplifier nous supposons que les familles n'ont jamais plus de quatre enfants, mais vous pouvez reprendre le calcul avec 5, 6 ou n enfants, ou même sans limitation du nombre d'enfants).

Probabilité qu'une famille possède un seul enfant : $1/2$. La famille est alors du type : [fille].

Probabilité qu'une famille possède deux enfants : $1/4$. La famille est du type : [garçon, fille].

Probabilité qu'une famille possède trois enfants : $1/8$. La famille est du type : [garçon, garçon, fille].

Probabilité qu'une famille possède quatre enfants : $1/8$. La famille est une fois sur deux du type : [garçon, garçon, garçon, fille] et une fois sur deux du type : [garçon, garçon, garçon, garçon].

Donc, sur 16 familles, il y a en moyenne huit familles du type [fille], quatre du type [garçon, fille], deux du type [garçon, garçon, fille], une du type [garçon, garçon, garçon, fille] et une du type [garçon, garçon, garçon, garçon]. Cela fait au total $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ filles et $4 + 4 + 3 + 4 = 15$ garçons.

L'effort fait par chaque famille pour avoir une fille ne change pas la proportion de garçons et de filles, mais conduit cependant à une situation où la plupart des familles sont satisfaites, car elles ont au moins une fille (dans notre exemple, 15 familles sur 16 ont une fille).

Signalons hélas, qu'aujourd'hui en Inde et en Chine, les règles traditionnelles

sur les dots et d'autres raisons socio-culturelles font que les familles souhaitent avoir en priorité des garçons. Il en résulte que la proportion de filles à la naissance est nettement inférieure à celle des garçons. Cela n'est pas la conséquence de stratégies du type de celle envisagée plus haut, mais cela est dû à des avortements sélectifs organisés par les familles qui, grâce aux échographies, savent au bout de quelques semaines de grossesse le sexe de l'enfant à naître. Ce type de comportement est combattu par les autorités, car il conduit à un déséquilibre entre hommes et femmes susceptible à terme de créer des problèmes sociaux. Dans plusieurs régions d'Inde on compte déjà plus de 110 garçons pour 100 filles et on prévoit que le problème va s'aggraver.

LE ROUGE EST MIS...

Dans le problème précédent, les «tirages» étaient indépendants et c'était l'explication simple de l'impossibilité d'adopter des stratégies familiales modifiant la proportion globale d'hommes et de femmes. Nous allons aborder un problème de stratégie optimale plus intéressant (dû au mathématicien prestidigitateur P. Diaconis) où, au contraire, les événements dépendent fortement du passé.

On vous propose le jeu suivant dénommé *La prochaine est rouge* :

- on bat les cartes d'un paquet de 32 cartes ;
- le meneur de jeu retourne les cartes une à une ;
- à un moment librement choisi par vous, vous arrêtez le meneur de jeu et vous annoncez : «La prochaine carte sera rouge» ;

– le meneur retourne la carte, si vous avez raison vous avez gagné, sinon vous avez perdu.

Vous pouvez utiliser la méthode que vous voulez et, par exemple, attendre que presque toutes les cartes soient passées. Vous pouvez même attendre qu'il ne reste plus qu'une seule carte. Notez bien cependant que vous ne pouvez pas choisir entre rouge et noire (sinon, en attendant qu'il ne reste qu'une carte, vous gagneriez à chaque fois) : vous êtes obligé de parier sur rouge.

La stratégie évidente consistant à attendre la dernière carte vous garantit de gagner une fois sur deux au moins. La stratégie consistant à parier dès la première carte donne aussi une chance sur deux de gagner. Il ne faut donc ni se précipiter ni trop attendre pour avoir de bonnes chances.

La question est :

– on vous propose de jouer à ce jeu à 1 contre 2 : si vous gagnez, le meneur de jeu vous donne un franc, si vous perdez vous donnez deux francs au meneur de jeu. Devez-vous accepter, et si oui quelle méthode de jeu devez-vous adopter pour maximiser votre gain ? Une façon équivalente de poser le problème est : existe-t-il une stratégie de prédiction qui vous garantira de gagner deux fois plus souvent que vous ne perdrez ?

Réponse

La réponse est négative, mais elle est plus étonnante encore, car, quelle que soit la stratégie que vous utiliserez, vous ne pourrez jamais avoir plus d'une chance sur deux de gagner et vous ne pourrez d'ailleurs jamais non plus avoir moins d'une chance sur deux de gagner. La stratégie courte consistant à parier dès

la première carte est aussi bonne que celle consistant à attendre la dernière, et cette stratégie est équivalente à toute autre stratégie aussi compliquée ou subtile que vous pourriez imaginer.

Comme dans le problème des naissances et malgré le contexte différent d'un paquet de cartes fini qui s'épuise en vous procurant des informations sur ce qu'il reste à venir, vous ne pouvez pas changer le 1/2 : vous ne pouvez ni faire mieux ni moins bien !

Un raisonnement qui montre l'équivalence de toutes les stratégies a été récemment proposé par Michel Emery, de l'Université de Strasbourg. Il est présenté sur la figure 2.

MÉFIEZ-VOUS DES PARIS GROUPÉS

Voici pour terminer un extraordinaire paradoxe concernant les paris groupés. Pour bien en saisir la portée, examinons ce qu'est un pari groupé.

On joue avec un dé à six faces non truqué. Considérons les deux paris suivants, qui vous sont tous les deux favorables :

- Pari 1 : si c'est 6, tu gagnes 2 F, si c'est 1, tu perds 1 F, sinon rien.
- Pari 2 : si c'est 5, tu gagnes 2 F, si c'est 2, tu perds 1 F, sinon rien.

En acceptant les deux paris simultanément, vous gagnerez en moyenne deux fois plus que vous ne perdrez ; ce sera donc toujours un pari favorable pour vous.

D'une manière générale, il est clair que si l'on vous propose simultanément plusieurs paris qui, chacun pris individuellement vous sont favorables, cela constitue un nouveau pari (que nous dénommerons le pari groupé), lequel vous est toujours

1. PEUT-ON MODIFIER LE RAPPORT GARÇONS/FILLES ?

Même si tous les couples adoptaient la règle de ne plus avoir d'enfants dès qu'une fille naît, ce qui semble favoriser les filles, cela n'aurait aucun effet sur le rapport garçons/fille. Montrons-le pour le cas (idéalisé) où chaque couple a des enfants indéfiniment (sans limitation du nombre) jusqu'à ce qu'une fille naisse.

- Probabilité qu'une famille possède un seul enfant : 1/2. La famille est du type : [fille]
- Probabilité qu'une famille possède 2 enfants : 1/4. La famille est du type : [garçon, fille]
- Probabilité qu'une famille possède 3 enfants : 1/8. La famille est du type : [garçon, garçon, fille]

- ...
- Probabilité qu'une famille possède n enfants : $1/2^n$. La famille est du type : [garçon, garçon, ..., garçon, fille]

Calculons la proportion de garçons et de filles en ne comptant que les familles de n enfants ou moins (on fera ensuite tendre n vers l'infini).

Sur $2^n - 1$ familles, il y en aura en moyenne 2^{n-1} du type [fille], 2^{n-2} du type [garçon, fille], 2^{n-3} du type [garçon, garçon, fille]... une du type [garçon, garçon, ..., garçon, fille], etc.

Il y a donc, au total, $2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1 = 2^n - 1$ filles.

Pour compter les garçons, le travail est un peu plus compliqué.

Nombre d'aînés : $2^{n-1} - 1$

Nombre de seconds : $2^{n-2} - 1$

Nombre de troisièmes : $2^{n-3} - 1$

...

...

Nombre de $(n-1)$ -ièmes : $2 - 1$

Nombre de n -ièmes : $1 - 1$

Au total, le nombre de garçons est donc :

$2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 - n = 2^n - 1 - n$.

Le rapport filles/garçons a bien pour limite 1 à l'infini.

CQFD

2. POURQUOI VOUS GAGNEREZ UNE FOIS SUR DEUX (NI PLUS NI MOINS)

AU JEU «LA PROCHAINE EST ROUGE»

Imaginons un grand tableau composé de :

$32! = 263130836933693530167218012160000000$ lignes,

chacune contenant un classement possible d'un jeu de 32 cartes.

Une stratégie consiste à fixer une règle du type «lorsque la dixième carte noire est passée, je parie que la suivante est rouge». Une stratégie ne dépend que du passé et détermine, en fonction de celui-ci, si j'arrête le meneur de jeu en lui disant «la prochaine est rouge».

Fixons une méthode de jeu. Dans chaque ligne du tableau, nous plaçons une étoile marquant l'endroit du pari, ce qui nous donne donc un tableau de $32!$ lignes, chacune contenant une étoile. Voici un exemple de ligne (l'étoile * est placée juste après la dixième carte noire et fait gagner le joueur, car une carte rouge (le R♦) suit) :

V♠, D♥, V♥, 10♠, R♠, As♠, 8♦, 8♥, 7♠, 10♦, As♥, 8♠, 9♦, V♠, D♠, D♠, As♦, 9♥, R♠, *, R♦, 7♠, 8♠, 9♠, 9♠, 10♠, As♠, V♦, D♦, R♥, 7♥, 10♥, 7♦. Nous devons évaluer le nombre de lignes où l'étoile * est suivie d'une carte rouge (partie gagnante pour le parieur) et le nombre de lignes où elle est suivie d'une carte noire (partie perdante pour le parieur).

Nous allons montrer que ces deux nombres sont égaux. Pour cela, nous opérons la transformation suivante de notre tableau : dans chaque ligne, nous permutons la carte située après l'étoile et la dernière carte.

Ainsi la ligne xx... xx*Ayy... yyB devient xx... xx*Byy... yyA

Cette transformation revient à changer l'ordre de deux lignes du tableau.

En effet, le tableau contient toutes les permutations possibles des 32 cartes, et échanger deux cartes revient à échanger deux lignes. Dans le cas où l'étoile est juste avant la dernière carte (le pari a été fait au dernier moment et la méthode permet ce choix), la ligne xx... xx*A reste identique. Au total, le tableau transformé est donc constitué des $32!$ lignes du tableau initial ; seul l'ordre des lignes a été changé.

Dans le tableau initial, il y avait exactement le même nombre de lignes se terminant par une carte noire que de lignes se terminant par une carte rouge (les rouges et les noirs ont des rôles symétriques), donc dans le tableau transformé aussi. Et donc, il a exactement le même nombre de lignes se terminant pour une carte A de couleur rouge que de lignes se terminant par une carte A de couleur noire, ce qui signifie que la stratégie fait gagner le parieur exactement une fois sur deux. Notre raisonnement ne dépend pas de la stratégie considérée et donc, quelle que soit la stratégie utilisée pour le jeu «La prochaine est rouge», elle donne une chance sur deux de gagner, ni plus ni moins.

Si vous ne croyez pas en ce raisonnement, ou qu'il vous semble faux, alors vous restez persuadé qu'au jeu «La prochaine est rouge», vous pouvez gagner plus d'une fois sur deux. Dans ce cas, prenez contact avec moi, je suis prêt à jouer le meneur de jeux à 1 contre 2 (si vous avez raison, vous gagnez un, sinon vous me donnez deux). J'accepte aussi de jouer avec 10 cartes au lieu de 32.

favorable. En bref, on a ce qu'on pourrait appeler la loi des paris groupés :
– un pari groupé de paris favorables est un pari favorable.

On peut même remarquer que le gain moyen (ou espérance mathématique) d'un pari groupé est la somme des gains moyens de chaque pari. Ici, le gain moyen pour chaque pari est de $1/6$ (une fois sur six, on gagne 2 F, une fois sur 6, on perd 1 F. Donc sur six coups, on gagne en moyenne 1 F, ce qui donne un gain moyen de $1/6$ par pari). Le gain moyen pour le pari groupé est de $2/6$, soit un tiers de franc.

Très étrangement, le mathématicien Leonid Levin, célèbre pour de nombreux travaux réalisés en théorie de la complexité, a trouvé une situation qui contredit la loi des paris groupés.

Décrire la situation va être un peu compliqué, mais le jeu en vaut la chandelle, car on a affaire à un paradoxe qui, contrairement aux deux précédents, ne semble pas avoir été résolu de façon satisfaisante. Le paradoxe est fondé sur les nombres.

Tout le monde connaît les nombres décimaux, qui sont ceux qui s'écrivent de manière finie en base 10, comme

0,132 ; -3,3211 ; 0,00012 ; -219,9 ; 75,54321 ; etc. Nous noterons D l'ensemble de tous les nombres décimaux (positifs ou négatifs).

L'ensemble des nombres réels (cette fois, les développements décimaux peuvent être finis ou infinis) peut être séparé en classes décimales : on constitue des paquets de nombres réels en mettant ensemble tous ceux dont la différence est un nombre décimal.

Par exemple on regroupe ensemble : π ; $\pi + 0,132$; $\pi - 3,3211$; etc.

Dans une autre classe on mettra $\sqrt{2}$; $\sqrt{2} + 0,132$; $\sqrt{2} - 3,3211$; etc.

Il y a une infinité non dénombrable de classes décimales (l'argument mathématique est : si ce n'était pas le cas, l'ensemble des nombres réels serait dénombrable, ce qui est faux).

Tout nombre réel appartient à une classe décimale et à une seule. Par commodité, on choisit un chef dans chaque classe décimale, ce chef (ou représentant de la classe) permettant de donner un nom à la classe. La classe dont le chef est π sera notée Classe(π). Par définition, Classe(π) est la classe de tous les nombres réels de la forme $\pi + d$, avec d qui est un nombre décimal.

Puisqu'il y a une infinité de classes, il y a une infinité de chefs de classe. On note C l'ensemble de tous les chefs de classe ; D est l'ensemble des nombres décimaux. Les deux ensembles C et D ont la propriété intéressante suivante, qui résulte de leur définition : tout nombre réel s'écrit de manière unique $c + d$, avec c dans C et d dans D (c est le chef de la classe à laquelle appartient x , et d est le nombre décimal $x - c$).

Considérons maintenant le pari suivant :

– on choisit un nombre réel x au hasard entre 0 et 1. Pour cela, on choisit un point quelconque sur un segment de longueur 1 et on mesure sa distance à une extrémité choisie comme origine, ou, ce qui revient au même, on lance un dé à 10 faces indéfiniment et on note tous les chiffres obtenus qui déterminent un nombre réel comme 0,271828182845...).

– le nombre tiré x s'écrit sous la forme $c + d$, avec c , un chef, et d , un décimal ;

– si le nombre choisi est de la forme $c + 0,7$, vous gagnez 2 F ;

– si le nombre choisi est de la forme $c + 0,9$, vous perdez 1 F ;

– sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Un tel pari vous est favorable, car vous gagnerez aussi souvent que vous perdrez, mais lorsque vous gagnerez, vous gagnerez deux fois plus que lorsque vous perdrez (comme tout à l'heure avec le dé à six faces). Plus généralement soit d et d' deux nombres décimaux quelconques,