

sur les dots et d'autres raisons socio-culturelles font que les familles souhaitent avoir en priorité des garçons. Il en résulte que la proportion de filles à la naissance est nettement inférieure à celle des garçons. Cela n'est pas la conséquence de stratégies du type de celle envisagée plus haut, mais cela est dû à des avortements sélectifs organisés par les familles qui, grâce aux échographies, savent au bout de quelques semaines de grossesse le sexe de l'enfant à naître. Ce type de comportement est combattu par les autorités, car il conduit à un déséquilibre entre hommes et femmes susceptible à terme de créer des problèmes sociaux. Dans plusieurs régions d'Inde on compte déjà plus de 110 garçons pour 100 filles et on prévoit que le problème va s'aggraver.

LE ROUGE EST MIS...

Dans le problème précédent, les «tirages» étaient indépendants et c'était l'explication simple de l'impossibilité d'adopter des stratégies familiales modifiant la proportion globale d'hommes et de femmes. Nous allons aborder un problème de stratégie optimale plus intéressant (dû au mathématicien prestidigitateur P. Diaconis) où, au contraire, les événements dépendent fortement du passé.

On vous propose le jeu suivant dénommé *La prochaine est rouge* :

- on bat les cartes d'un paquet de 32 cartes ;
- le meneur de jeu retourne les cartes une à une ;
- à un moment librement choisi par vous, vous arrêtez le meneur de jeu et vous annoncez : «La prochaine carte sera rouge» ;

– le meneur retourne la carte, si vous avez raison vous avez gagné, sinon vous avez perdu.

Vous pouvez utiliser la méthode que vous voulez et, par exemple, attendre que presque toutes les cartes soient passées. Vous pouvez même attendre qu'il ne reste plus qu'une seule carte. Notez bien cependant que vous ne pouvez pas choisir entre rouge et noire (sinon, en attendant qu'il ne reste qu'une carte, vous gagneriez à chaque fois) : vous êtes obligé de parier sur rouge.

La stratégie évidente consistant à attendre la dernière carte vous garantit de gagner une fois sur deux au moins. La stratégie consistant à parier dès la première carte donne aussi une chance sur deux de gagner. Il ne faut donc ni se précipiter ni trop attendre pour avoir de bonnes chances.

La question est :

– on vous propose de jouer à ce jeu à 1 contre 2 : si vous gagnez, le meneur de jeu vous donne un franc, si vous perdez vous donnez deux francs au meneur de jeu. Devez-vous accepter, et si oui quelle méthode de jeu devez-vous adopter pour maximiser votre gain ? Une façon équivalente de poser le problème est : existe-t-il une stratégie de prédiction qui vous garantira de gagner deux fois plus souvent que vous ne perdrez ?

Réponse

La réponse est négative, mais elle est plus étonnante encore, car, quelle que soit la stratégie que vous utiliserez, vous ne pourrez jamais avoir plus d'une chance sur deux de gagner et vous ne pourrez d'ailleurs jamais non plus avoir moins d'une chance sur deux de gagner. La stratégie courte consistant à parier dès

la première carte est aussi bonne que celle consistant à attendre la dernière, et cette stratégie est équivalente à toute autre stratégie aussi compliquée ou subtile que vous pourriez imaginer.

Comme dans le problème des naissances et malgré le contexte différent d'un paquet de cartes fini qui s'épuise en vous procurant des informations sur ce qu'il reste à venir, vous ne pouvez pas changer le 1/2 : vous ne pouvez ni faire mieux ni moins bien !

Un raisonnement qui montre l'équivalence de toutes les stratégies a été récemment proposé par Michel Emery, de l'Université de Strasbourg. Il est présenté sur la figure 2.

MÉFIEZ-VOUS DES PARIS GROUPÉS

Voici pour terminer un extraordinaire paradoxe concernant les paris groupés. Pour bien en saisir la portée, examinons ce qu'est un pari groupé.

On joue avec un dé à six faces non truqué. Considérons les deux paris suivants, qui vous sont tous les deux favorables :

- Pari 1 : si c'est 6, tu gagnes 2 F, si c'est 1, tu perds 1 F, sinon rien.
- Pari 2 : si c'est 5, tu gagnes 2 F, si c'est 2, tu perds 1 F, sinon rien.

En acceptant les deux paris simultanément, vous gagnerez en moyenne deux fois plus que vous ne perdrez ; ce sera donc toujours un pari favorable pour vous.

D'une manière générale, il est clair que si l'on vous propose simultanément plusieurs paris qui, chacun pris individuellement vous sont favorables, cela constitue un nouveau pari (que nous dénommerons le pari groupé), lequel vous est toujours

1. PEUT-ON MODIFIER LE RAPPORT GARÇONS/FILLES ?

Même si tous les couples adoptaient la règle de ne plus avoir d'enfants dès qu'une fille naît, ce qui semble favoriser les filles, cela n'aurait aucun effet sur le rapport garçons/fille. Montrons-le pour le cas (idéalisé) où chaque couple a des enfants indéfiniment (sans limitation du nombre) jusqu'à ce qu'une fille naisse.

- Probabilité qu'une famille possède un seul enfant : 1/2. La famille est du type : [fille]
- Probabilité qu'une famille possède 2 enfants : 1/4. La famille est du type : [garçon, fille]
- Probabilité qu'une famille possède 3 enfants : 1/8. La famille est du type : [garçon, garçon, fille]
- ...
- Probabilité qu'une famille possède n enfants : $1/2^n$. La famille est du type : [garçon, garçon, ..., garçon, fille]

Calculons la proportion de garçons et de filles en ne comptant que les familles de n enfants ou moins (on fera ensuite tendre n vers l'infini).

Sur $2^n - 1$ familles, il y en aura en moyenne 2^{n-1} du type [fille], 2^{n-2} du type [garçon, fille], 2^{n-3} du type [garçon, garçon, fille]... une du type [garçon, garçon, ..., garçon, fille], etc.

Il y a donc, au total, $2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1 = 2^n - 1$ filles.

Pour compter les garçons, le travail est un peu plus compliqué.

Nombre d'aînés : $2^{n-1} - 1$

Nombre de seconds : $2^{n-2} - 1$

Nombre de troisièmes : $2^{n-3} - 1$

...

...

Nombre de $(n-1)$ -ièmes : $2 - 1$

Nombre de n -ièmes : $1 - 1$

Au total, le nombre de garçons est donc :

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 - n = 2^n - 1 - n.$$

Le rapport filles/garçons a bien pour limite 1 à l'infini.

CQFD

2. POURQUOI VOUS GAGNEREZ UNE FOIS SUR DEUX (NI PLUS NI MOINS)

AU JEU «LA PROCHAINE EST ROUGE»

Imaginons un grand tableau composé de :

$32! = 263130836933693530167218012160000000$ lignes,

chacune contenant un classement possible d'un jeu de 32 cartes.

Une stratégie consiste à fixer une règle du type «lorsque la dixième carte noire est passée, je parie que la suivante est rouge». Une stratégie ne dépend que du passé et détermine, en fonction de celui-ci, si j'arrête le meneur de jeu en lui disant «la prochaine est rouge».

Fixons une méthode de jeu. Dans chaque ligne du tableau, nous plaçons une étoile marquant l'endroit du pari, ce qui nous donne donc un tableau de $32!$ lignes, chacune contenant une étoile. Voici un exemple de ligne (l'étoile * est placée juste après la dixième carte noire et fait gagner le joueur, car une carte rouge (le R♦) suit) :

V♠, D♥, V♥, 10♠, R♠, As♠, 8♦, 8♥, 7♠, 10♦, As♥, 8♠, 9♦, V♠, D♠, D♠, As♦, 9♥, R♠, *, R♦, 7♠, 8♠, 9♠, 9♠, 10♠, As♠, V♦, D♦, R♥, 7♥, 10♥, 7♦. Nous devons évaluer le nombre de lignes où l'étoile * est suivie d'une carte rouge (partie gagnante pour le parieur) et le nombre de lignes où elle est suivie d'une carte noire (partie perdante pour le parieur).

Nous allons montrer que ces deux nombres sont égaux. Pour cela, nous opérons la transformation suivante de notre tableau : dans chaque ligne, nous permutons la carte située après l'étoile et la dernière carte.

Ainsi la ligne xx... xx*Ayy... yyB devient xx... xx*Byy... yyA

Cette transformation revient à changer l'ordre de deux lignes du tableau.

En effet, le tableau contient toutes les permutations possibles des 32 cartes, et échanger deux cartes revient à échanger deux lignes. Dans le cas où l'étoile est juste avant la dernière carte (le pari a été fait au dernier moment et la méthode permet ce choix), la ligne xx... xx*A reste identique. Au total, le tableau transformé est donc constitué des $32!$ lignes du tableau initial ; seul l'ordre des lignes a été changé.

Dans le tableau initial, il y avait exactement le même nombre de lignes se terminant par une carte noire que de lignes se terminant par une carte rouge (les rouges et les noirs ont des rôles symétriques), donc dans le tableau transformé aussi. Et donc, il a exactement le même nombre de lignes se terminant pour une carte A de couleur rouge que de lignes se terminant par une carte A de couleur noire, ce qui signifie que la stratégie fait gagner le parieur exactement une fois sur deux. Notre raisonnement ne dépend pas de la stratégie considérée et donc, quelle que soit la stratégie utilisée pour le jeu «La prochaine est rouge», elle donne une chance sur deux de gagner, ni plus ni moins.

Si vous ne croyez pas en ce raisonnement, ou qu'il vous semble faux, alors vous restez persuadé qu'au jeu «La prochaine est rouge», vous pouvez gagner plus d'une fois sur deux. Dans ce cas, prenez contact avec moi, je suis prêt à jouer le meneur de jeux à 1 contre 2 (si vous avez raison, vous gagnez un, sinon vous me donnez deux). J'accepte aussi de jouer avec 10 cartes au lieu de 32.

favorable. En bref, on a ce qu'on pourrait appeler la loi des paris groupés :

- un pari groupé de paris favorables est un pari favorable.

On peut même remarquer que le gain moyen (ou espérance mathématique) d'un pari groupé est la somme des gains moyens de chaque pari. Ici, le gain moyen pour chaque pari est de $1/6$ (une fois sur six, on gagne 2 F, une fois sur 6, on perd 1 F. Donc sur six coups, on gagne en moyenne 1 F, ce qui donne un gain moyen de $1/6$ par pari). Le gain moyen pour le pari groupé est de $2/6$, soit un tiers de franc.

Très étrangement, le mathématicien Leonid Levin, célèbre pour de nombreux travaux réalisés en théorie de la complexité, a trouvé une situation qui contredit la loi des paris groupés.

Décrire la situation va être un peu compliqué, mais le jeu en vaut la chandelle, car on a affaire à un paradoxe qui, contrairement aux deux précédents, ne semble pas avoir été résolu de façon satisfaisante. Le paradoxe est fondé sur les nombres.

Tout le monde connaît les nombres décimaux, qui sont ceux qui s'écrivent de manière finie en base 10, comme

0,132 ; -3,3211 ; 0,00012 ; -219,9 ; 75,54321 ; etc. Nous noterons D l'ensemble de tous les nombres décimaux (positifs ou négatifs).

L'ensemble des nombres réels (cette fois, les développements décimaux peuvent être finis ou infinis) peut être séparé en classes décimales : on constitue des paquets de nombres réels en mettant ensemble tous ceux dont la différence est un nombre décimal.

Par exemple on regroupe ensemble : π ; $\pi + 0,132$; $\pi - 3,3211$; etc.

Dans une autre classe on mettra $\sqrt{2}$; $\sqrt{2} + 0,132$; $\sqrt{2} - 3,3211$; etc.

Il y a une infinité non dénombrable de classes décimales (l'argument mathématique est : si ce n'était pas le cas, l'ensemble des nombres réels serait dénombrable, ce qui est faux).

Tout nombre réel appartient à une classe décimale et à une seule. Par commodité, on choisit un chef dans chaque classe décimale, ce chef (ou représentant de la classe) permettant de donner un nom à la classe. La classe dont le chef est π sera notée Classe(π). Par définition, Classe(π) est la classe de tous les nombres réels de la forme $\pi + d$, avec d qui est un nombre décimal.

Puisqu'il y a une infinité de classes, il y a une infinité de chefs de classe. On note C l'ensemble de tous les chefs de classe ; D est l'ensemble des nombres décimaux. Les deux ensembles C et D ont la propriété intéressante suivante, qui résulte de leur définition : tout nombre réel s'écrit de manière unique $c + d$, avec c dans C et d dans D (c est le chef de la classe à laquelle appartient x , et d est le nombre décimal $x - c$).

Considérons maintenant le pari suivant :

- on choisit un nombre réel x au hasard entre 0 et 1. Pour cela, on choisit un point quelconque sur un segment de longueur 1 et on mesure sa distance à une extrémité choisie comme origine, ou, ce qui revient au même, on lance un dé à 10 faces indéfiniment et on note tous les chiffres obtenus qui déterminent un nombre réel comme 0,271828182845...).
- le nombre tiré x s'écrit sous la forme $c + d$, avec c , un chef, et d , un décimal ;
- si le nombre choisi est de la forme $c + 0,7$, vous gagnez 2 F ;
- si le nombre choisi est de la forme $c + 0,9$, vous perdez 1 F ;
- sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Un tel pari vous est favorable, car vous gagnerez aussi souvent que vous perdrez, mais lorsque vous gagnerez, vous gagnerez deux fois plus que lorsque vous perdrez (comme tout à l'heure avec le dé à six faces). Plus généralement soit d et d' deux nombres décimaux quelconques,

nous considérerons le pari suivant que nous noterons $P(d; d')$:

– nous choisissons un nombre réel x au hasard entre 0 et 1. Nous déterminons sa classe c ;

– si le nombre choisi est de la forme $c + d$, vous gagnez 2 F ;

– si le nombre choisi est de la forme $c + d'$, vous perdez 1 F ;

– sinon, personne n'a gagné, personne n'a perdu.

Si l'on vous propose le pari $P(d; d')$, vous devez l'accepter, car le nombre x choisi a autant de chances d'être de la forme $c + d$ que de la forme $c + d'$. Comme précédemment, le pari vous est favorable, car vous gagnez plus que vous ne risquez.

On peut détailler l'argument indiquant que x a autant de chances d'être de la forme $c + d$ que de la forme $c + d'$. Si on représente sur un cercle de périmètre 1, muni d'une origine l'ensemble des cas qui vous sont favorables (tous les nombres réels entre 0 et 1 de la forme $c + d$ avec c un chef), et qu'on fait tourner cet ensemble de $d' - d$, on obtient exactement l'ensemble des cas qui vous sont défavorables (les nombres de la forme $c + d'$). L'ensemble des cas défavorables s'obtenant par rotation de l'ensemble des cas favorables, en choisissant un point au hasard sur le cercle, on a bien autant de chances de tomber sur un cas favorable que sur un cas défavorable. Comme les cas favorables rapportent le double de ce que coûtent les cas défavorables, il faut accepter le pari.

On vous propose maintenant un pari groupé, composé de paris du type précédent. Précisément, on vous propose le pari $P(0,235; 0,35)$ en même temps que le pari $P(0,78432; 0,8432)$ et tous les paris de la forme $P(d, d')$, où d' est obtenu en supprimant le premier chiffre après la virgule de d . Ce pari groupe des paris favorables. Vous brûlez d'envie de l'accepter.

Pourtant, si vous acceptez ce pari groupé, vous allez vous en mordre les doigts car, très étrangement, il vous est fortement défavorable.

En effet : supposons que le nombre réel tiré x soit de la forme $\pi + 0,321$. Faisons le bilan des paris gagnés et perdus :
– vous avez gagné le pari $P(0,321; 0,21)$, ce qui vous rapporte 2 F
– vous avez perdu le pari $P(0,0321; 0,321)$, ce qui vous coûte 1 F ;
– vous avez perdu le pari $P(0,1321; 0,321)$, ce qui vous coûte 1 F
– etc. pour tous les paris $P(0,2321; 0,321)$
 $P(0,3321; 0,321) \dots P(0,9321; 0,321)$.

Au total vous avez perdu dix paris (donc 10 F) et vous avez gagné 2 F. Bilan : le pari groupé vous coûte 8 F à chaque fois. Bien sûr, quel que soit le nombre x

3. LE PARADOXE DES PARIS GROUPÉS

Les nombres décimaux sont un sous-ensemble des nombres réels.

NOMBRES RÉELS

π $\sqrt{2}$ e $0,01658$ $0,154$
 $\sqrt{3}$ $0,12345678\dots$ $55,1587\dots$

NOMBRES DÉCIMAUX

$0,154$ $0,325456$ $0,01658$
 $0,01658$ $+ 48,245$ $- 3,2254$

Tout nombre est classé dans une classe décimale associée à un chef réel.

CLASSE DÉCIMALE DE CHEF x
 x + UN NOMBRE DÉCIMAL

CLASSE DÉCIMALE DE CHEF e
 e + UN NOMBRE DÉCIMAL

$e - 3,2254$ $e + 48,245$
 $e - 0,154$ $e - 3,2254$

CLASSE DÉCIMALE DE CHEF $\sqrt{3}$
 $\sqrt{3}$ + UN NOMBRE DÉCIMAL

$\sqrt{3} - 3,2254$ $\sqrt{3} - 3,2254$ $\sqrt{3} + 48,245$
 $\sqrt{3} - 0,154$

CLASSE DÉCIMALE DE CHEF π
 π + UN NOMBRE DÉCIMAL

$\pi - 3,2254$ $\pi + 48,245$
 $\pi - 0,154$ $\pi - 3,2254$

On tire au hasard un nombre entre 0 et 1.

x

On détermine la classe C de x : $x = c + d$. Dans le pari simple, vous avez parié sur d égal à 0,7. Si la partie décimale d du nombre x tiré est égale à 0,7, vous gagnez 2 F. Si le nombre x tiré a pour partie décimale d' , égale à 0,9, vous perdez 1 F. Sinon, personne ne gagne ni ne perd. On désigne ce pari par $P(d; d') = P(0,7; 0,9)$. Ce pari vous est favorable. On vous propose le pari groupé P_G de la forme $P_G(d; d')$, où d est un nombre décimal quelconque et où d' est calculé à partir de d en enlevant le premier chiffre après la virgule de d . Vous gagnerez 2 F si la partie décimale x du nombre tiré est égale à d et vous perdrez 1 F si elle est égale à d' . Chaque pari pour une valeur donnée de d vous est favorable. Supposons que la partie décimale d du nombre x tiré au hasard soit égale à 0,321. Comme dans votre pari groupé, $P_G(d, d')$, d est n'importe quel nombre décimal, vous gagnez 2 F, car $P(0,321, 0,0321)$ est un élément de l'ensemble des paris groupés, mais vous perdez 1 F pour tous les nombres décimaux des paris $P(0,321, 0,321)$ où A est égal à 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, car d' est alors égal au nombre tiré. Vous gagnez 2 F une fois et vous perdez 1 F dix fois, donc à toutes les parties, vous perdez 8 F... Ceci se produira quel que soit le nombre x tiré. Le pari groupé est une catastrophe.

choisi la situation est semblable et vous perdez donc 8 F à chaque fois. (Dans le cas où le nombre choisi au hasard est 0, la situation est particulière : vous ne gagnez même pas 2 F et perdez donc 10 F d'un coup.)

Comment expliquer qu'un pari groupé de paris favorables vous soit défavorable ?

Réponses

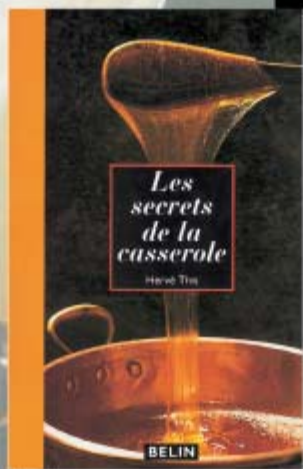
En fait, je ne connais pour l'instant aucune explication totalement satisfaisante au paradoxe de Levin. Je vais donc fournir plusieurs pistes avec à chaque fois une critique et je suggère

aux lecteurs de *Pour la science* de me donner leur avis.

(a) *Première possibilité d'explication : l'axiome du choix.*

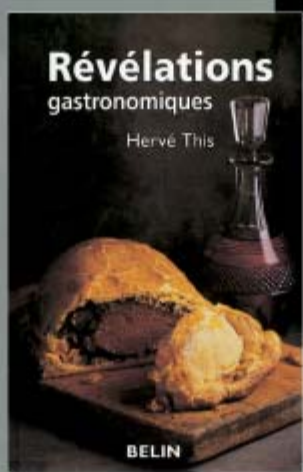
Il faut remarquer que nous utilisons l'axiome du choix. Lorsque nous disons que nous pouvons prendre un chef dans chaque classe, nous sommes en train d'utiliser l'axiome du choix. Cet axiome indique que lorsqu'on a un ensemble d'ensembles non vides (ici les classes décimales) il est possible de prendre un élément de chaque ensemble et de les regrouper pour faire un nouvel ensemble (c'est de cette façon

Une nouvelle rencontre de la science et de l'art.



LES SECRETS DE LA CASSEROLE

Comment préparer plus de 20 litres de mayonnaise à partir d'un seul jaune d'œuf ? En explorant la physique des émulsions. Comment obtenir un bon rôti ? En empruntant à la chimie ses études des sucres et des acides aminés. Comment obtenir de bonnes gelées ? En reprenant les résultats récents de la physico-chimie des gels. Code 001585 - 130 F-19,82 € 224 pages



RÉVÉLATIONS GASTRONOMIQUES

Encore un livre de recettes ! Oui, mais des recettes garanties par des expérimentations rigoureuses, par des analyses physico-chimiques des aliments et des tours de main culinaires. Chaque geste culinaire est ici disséqué, commenté du triple point de vue culinaire, physico-chimique et gastronomique. Code 001756 - 130 F-19,82 € 320 pages

Ces deux ouvrages ont obtenu le Prix de l'Académie nationale de Cuisine 1997.

LA CASSEROLE DES ENFANTS

Laissés seuls pour la soirée, deux enfants doivent cuisiner leur dîner. Mais leur sens aigu de l'observation et de l'expérimentation leur fait découvrir les bases de la chimie et de la physique. Ce livre pourrait être un manuel, s'il n'évoquait les molécules et leurs transformations de façon si simple et si amusante.

Code 002309 - 80 F - 12,20 € - 128 pages



BELIN

Voir bon de commande page 96

que nous avons constitué l'ensemble C des chefs de classe). On sait que l'axiome du choix engendre des situations paradoxales, et ce qui se passe ici n'est qu'un exemple nouveau de ces situations paradoxales provoquées par l'axiome du choix.

Critique : l'axiome du choix engendre des situations choquantes pour l'intuition, mais jamais de vraies contradictions. Ici, il est tellement absurde qu'un groupement de paris favorables devienne défavorable qu'on a affaire à un problème de grave incohérence. Notons aussi qu'habituellement, l'axiome du choix est accepté. Doit-on décider de ne plus l'utiliser en probabilité ?

(b) *Deuxième possibilité d'explication : la loi des paris groupés.*

La règle qu'un pari groupé composé de paris favorables est favorable n'est peut-être pas vraie en général. Notre intuition nous souffle cette loi, mais elle se trompe peut-être, comme cela lui arrive.

Critique : on prouve sans mal qu'un pari groupé composé d'un nombre fini de paris favorables est favorable. Précisément, l'espérance de gain d'un pari groupé est la somme des espérances de gain des paris individuels. Dans le cas infini la situation est la même et une somme infinie de gains moyens positifs est bien évidemment positive. La loi des paris groupés est bonne et on ne peut la refuser.

(c) *Troisième possibilité d'explication : les probabilités continues.*

Dans le pari considéré, on tire un nombre réel au hasard. Or cela n'est pas possible en pratique et d'ailleurs, concrètement, on ne pourrait pas mettre en œuvre le pari comme c'est suggéré en prenant un point au hasard sur une droite ou en lançant une infinité de fois un dé à dix faces.

Critique : en théorie des probabilités, on considère sans arrêt des situations analogues et la théorie de la mesure donne un sens précis à l'idée d'un nombre réel tiré au hasard entre 0 et 1. Si ce type de tirage continu n'a pas de sens, pourquoi tant de livres lui sont-ils consacrés ? Et s'il a un sens habituellement (et est utile concrètement dans de nombreuses applications), pourquoi ici n'en aurait-il pas ?

Je supplie donc les lecteurs de m'indiquer une réponse plus satisfaisante.

A Bet with Leonid Levin, in The Mathematical Intelligencer, vol. 23, n° 1, p. 42, 2001.

Michel EMERY, *Quelques phénomènes curieux en probabilités et statistiques, in L'Ouvert, 2001, article à paraître.*

Entrez dans le quadrille

DENNIS SHASHA

Une chorégraphe sollicite votre aide pour son prochain spectacle.

Concentré sur la recherche de la solution de l'énigme du mois dernier, vous ne voyez pas arriver dans votre bureau la chorégraphe de la célèbre compagnie «102 sus, 2 sous» qui a fait un triomphe la saison passée. Elle a besoin de vos talents pour résoudre un problème qui entrave la mise au point de son prochain ballet. Après lui avoir juré de garder le secret le plus absolu sur votre (éventuelle) participation, elle vous expose la situation.

«Ma compagnie est composée de 12 hommes (*les carrés bleus sur la figure*) et de 20 femmes (*en rose*). Avant le final, les hommes encerclent les femmes selon cette disposition.»

Elle dessine une configuration (*voir la figure ci-contre*) sur le verso d'une feuille sans se soucier du recto, puis poursuit.

«Je veux qu'après seulement trois mouvements, les femmes encerclent les hommes de cette façon.»

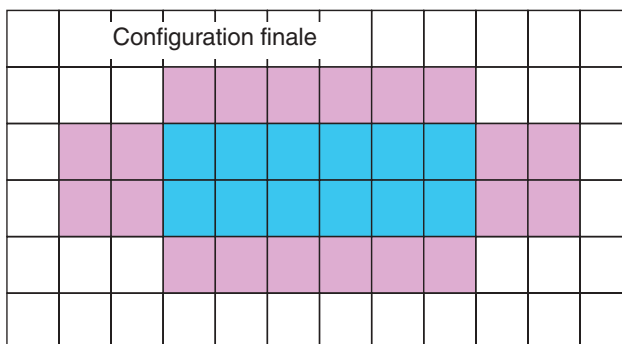
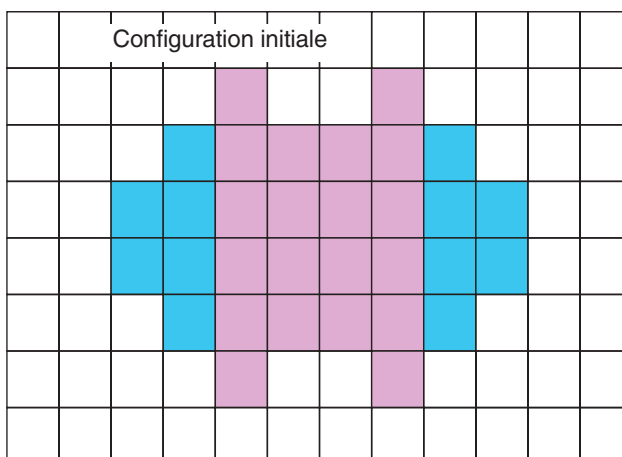
Elle dessine alors la deuxième configuration.

«Pendant chaque mouvement, un danseur peut rester sur place ou se déplacer d'un pas dans l'une des quatre directions : à gauche, à droite, en avant ou en arrière. J'impose deux conditions. D'une part, deux danseurs ne peuvent s'échanger leur place pendant un mouvement, d'autre part, deux danseurs ne peuvent être à la même place à la fin d'un mouvement. J'évite toute collision.»

«Vous avez les configurations initiale et finale, déterminez-moi les déplacements de chaque danseur à chaque mouvement!»

Son exposé terminé, elle s'assied, bien décidée à ne partir qu'avec la solution. À vous de l'aider... Pour ce faire, pensez à vous munir d'un papier quadrillé.

La solution de l'énigme sera donnée le mois prochain, et sera bientôt disponible sur le site Internet : www.pourlascience.com



Solution du problème d'énigmatics du numéro 286

Pour le premier problème, vous pouvez espérer gagner 9 309,091 euros. Définissons $S(x, t, n)$, la somme dont vous disposerez à la fin de la série de paris quand vous avez x euros, quand il reste t jets de pièce et que l'oracle a n mensonges à sa disposition (n est égal à 1 ou à 0).

Lorsque vous avez à jouer t fois, que l'oracle ne peut plus mentir et que vous avez x euros, vous pariez tout votre argent à chaque fois : $S(x, t, 0) = x \cdot 2^t$. Dans le cas où il reste un pari et que l'oracle peut encore mentir, vous ne pariez rien : $S(x, 1, 1) = x$.

Calculons $S(x, t+1, 1)$. Si vous mettez en jeu b euros au pari suivant, soit l'oracle ment et vous finirez la partie avec $S(x-b, t, 0)$, soit l'oracle ne ment pas cette fois et vous aurez $S(x+b, t, 0)$. Opti-

miser le gain consiste à évaluer $S(x-b, t, 0)$ et $S(x+b, t, 0)$, car l'oracle vous ferait choisir la pire solution. Étudions l'équation $S(x-b, t, 0) = S(x+b, t, 0)$.

$S(x, 1, 1) = x$, $S(x, 1, 0) = 2x$, $S(x, t, 0) = x \cdot 2^t$, $S(x, 2, 1) = 4x/3$ (vous avez parié $x/3$), $S(x, 3, 1) = 2x$ (vous avez parié $x/2$). Pour $S(x, 4, 1)$, on résout $S(x-b, 3, 0) = S(x+b, 3, 1)$. Soit $8(x-b) = 2(x+b)$. $b = 6x/10$ et $S(x, 4, 1) = 32x/10$. Et ainsi de suite...

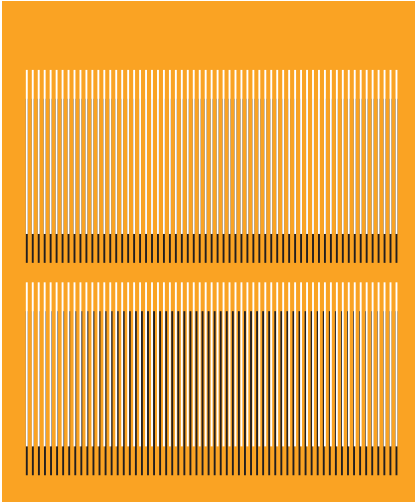
Ainsi, $S(100, 2, 1) = 133,33$ euros, $S(100, 3, 1) = 200$ euros, $S(100, 4, 1) = 320$ euros, $S(100, 5, 1) = 533,33$ euros, $S(100, 6, 1) = 914,28$ euros, $S(100, 7, 1) = 1600$ euros, $S(100, 8, 1) = 2\,844,44$ euros, $S(100, 9, 1) = 5\,120$ euros, $S(100, 10, 1) = 9\,309,09$ euros,

$S(100, 11, 1) = 17\,066,67$ euros. Après 20 jets de pièce, vous auriez plusieurs millions d'euros!

Pour le second problème, quand vous devez parier à l'avance, vous n'aurez au final que 1 600 euros au mieux. Créons de nouveau deux fonctions. $M(n)$ est le montant minimal que vous êtes sûr d'avoir après n jets si le mensonge a déjà eu lieu : $M(n) = 100 +$ les sommes des $n-1$ paris – la somme du pari le plus élevé.

$V(n)$ est la somme que vous avez après n jets quand le mensonge est encore à venir. $V(n) = 100 +$ tous les paris gagnés.

La meilleure stratégie qui se présente est de parier successivement : 50 ; 50 ; 100 ; 100 ; 200 ; 200 ; 400 ; 400 ; 800 ; 800. Ce qui se traduit par les gains successifs suivants : 50 ; 100 ; 100 ; 200 ; 200 ; 400 ; 400 ; 800 ; 800 ; 1600.



Les moirés de Vasarély

LOÏC MANGIN

L'œuvre de Vasarély nous invite à une promenade entre la physique et les mathématiques.

«Un mathématicien est un faiseur de motifs. Ces motifs, comme ceux des peintres ou des poètes, doivent être beaux ; les idées, comme les couleurs ou les mots, doivent s'assembler harmonieusement.»

Godfrey Hardy

En 1965, au musée d'Art moderne de New York, sont regroupées pour la première fois les œuvres dites d'art optique, car elles jouent sur les illusions perceptives, les effets de moirés, les scintillements... Parmi les artistes que l'on y admire figurent François Morelet, et surtout l'initiateur de cette forme d'art, le peintre français d'origine hongroise Victor Vasarély (1906-1997). Par son succès auprès des critiques et du public, Vasarély est rapidement baptisé «l'inventeur de l'art optique». À cette époque, l'engouement est tel que de nombreuses revues, de *Vogue* à *Scientific American*, font leur couverture des œuvres d'art optique. Les uns pour leur esthétique, les autres pour leur rigueur géométrique.

Victor Vasarély a fréquenté le Műhely de Budapest, l'équivalent hongrois du Bauhaus, l'école d'art fondée à Weimar en 1919 par Walter Gropius. Pour ce dernier, le but de toute activité plastique est la construction et l'architecture. Vasa-

rély a ainsi suivi, indirectement, les enseignements des professeurs de l'école disparue en 1933, tels Josef Albers (1888-1976), Paul Klee (1879-1940) ou Wassily Kandinsky (1866-1944), les inventeurs de l'art abstrait.

Installé à Paris en 1930, il devient l'un des maîtres de l'abstraction géométrique et concrétise dans ses œuvres ses recherches théoriques, notamment celles sur la perspective. En 1953, dans une série nommée *Transparence*, il joue avec les effets de moirés (voir la figure 3), où un motif périodique de lignes est couvert du même motif (ou de son négatif) imprimé sur un support transparent. De petits déplacements de ce dernier créent les motifs moirés. Survolons les bases mathématiques de ces figures, ainsi que les services qu'elles rendent aux physiciens.

Le moiré le plus simple apparaît quand deux séries identiques de lignes verticales régulièrement espacées sont superposées avec un léger décalage ou une rotation de quelques degrés. De larges rayures sombres apparaissent : plus l'alignement est parfait, plus ces rayures sont espacées.

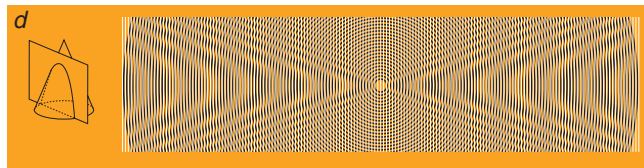
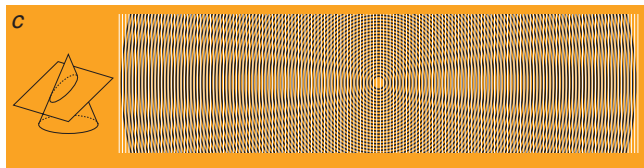
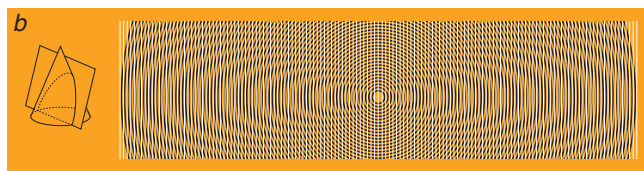
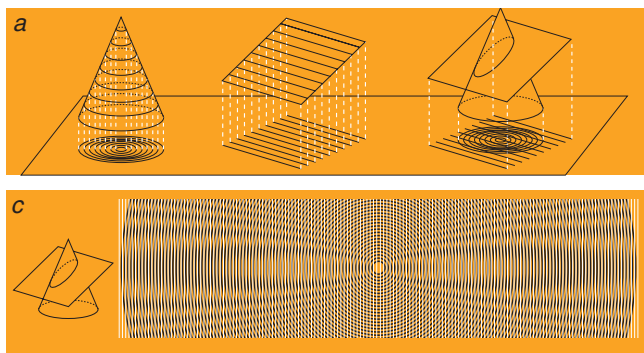
Pour comprendre l'origine des figures de moirés, considérons-les en termes de géométrie projective. Ce domaine des mathématiques est celui

des objets d'un espace à trois dimensions projetés sur un espace à deux dimensions. Par exemple, quand on projette les intersections d'un cône avec une série de plans, parallèles à sa base et équidistants, on obtient sur un plan de projection parallèle à la base du cône une série de cercles concentriques (voir la figure 1).

De la même façon, les intersections d'un plan incliné par une série de plans perpendiculaires au plan de projection se projettent en une série de lignes parallèles. Ces lignes parallèles sont d'autant plus écartées que le plan initial est incliné par rapport au plan de projection.

Ainsi, en géométrie projective, un cône est équivalent à une série de cercles concentriques et un plan, à une grille. Quels motifs moirés apparaissent lors de la superposition des cercles concentriques et de la grille ? Des ellipses, des hyperboles, des paraboles (voir la figure 1), c'est-à-dire les différentes intersections d'un plan et d'un cône, ce que les mathématiciens nomment les sections coniques.

Quand l'espacement de la grille est environ égal à celui des cercles concentriques, les figures de moirés obtenues sont des paraboles (1b). Lorsque l'espacement augmente, c'est-à-dire que le plan initial est de plus en plus hori-



1. Les figures de moirés résultent de la superposition de deux réseaux de cercles ou de droites. Quand on projette les intersections d'un cône par une série de plans parallèles au plan de la base (a, à gauche), on obtient des cercles concentriques. Par ailleurs, les intersections d'un plan incliné par une série de plans perpendiculaires au plan de

projection (a, au centre) se projettent en une série de droites parallèles. On obtient des figures de moirés en superposant ces deux réseaux de projection (a, à droite). Selon l'inclinaison du plan par rapport au cône, on obtient les figures d'intersection d'un cône par un plan : des paraboles (b), des ellipses (c) et des hyperboles (d).