

Entrez dans le quadrille

DENNIS SHASHA

Une chorégraphe sollicite votre aide pour son prochain spectacle.

Concentré sur la recherche de la solution de l'énigme du mois dernier, vous ne voyez pas arriver dans votre bureau la chorégraphe de la célèbre compagnie «102 sus, 2 sous» qui a fait un triomphe la saison passée. Elle a besoin de vos talents pour résoudre un problème qui entrave la mise au point de son prochain ballet. Après lui avoir juré de garder le secret le plus absolu sur votre (éventuelle) participation, elle vous expose la situation.

«Ma compagnie est composée de 12 hommes (*les carrés bleus sur la figure*) et de 20 femmes (*en rose*). Avant le final, les hommes encerclent les femmes selon cette disposition.»

Elle dessine une configuration (*voir la figure ci-contre*) sur le verso d'une feuille sans se soucier du recto, puis poursuit.

«Je veux qu'après seulement trois mouvements, les femmes encerclent les hommes de cette façon.»

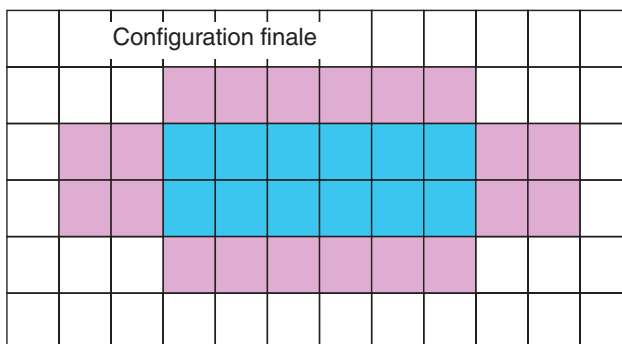
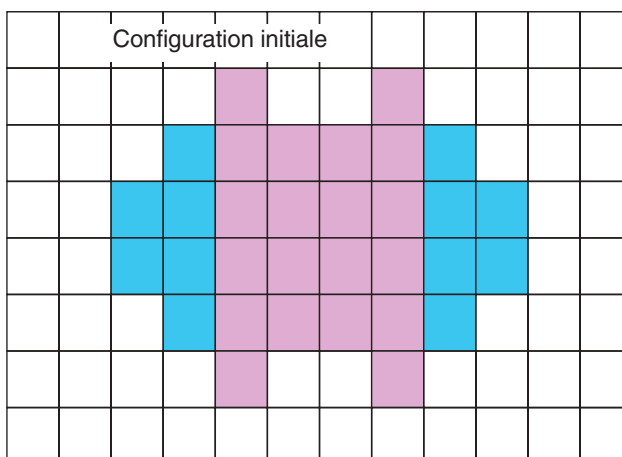
Elle dessine alors la deuxième configuration.

«Pendant chaque mouvement, un danseur peut rester sur place ou se déplacer d'un pas dans l'une des quatre directions : à gauche, à droite, en avant ou en arrière. J'impose deux conditions. D'une part, deux danseurs ne peuvent s'échanger leur place pendant un mouvement, d'autre part, deux danseurs ne peuvent être à la même place à la fin d'un mouvement. J'évite toute collision.»

«Vous avez les configurations initiale et finale, déterminez-moi les déplacements de chaque danseur à chaque mouvement!»

Son exposé terminé, elle s'assied, bien décidée à ne partir qu'avec la solution. À vous de l'aider... Pour ce faire, pensez à vous munir d'un papier quadrillé.

La solution de l'énigme sera donnée le mois prochain, et sera bientôt disponible sur le site Internet : www.pourlascience.com



Solution du problème d'énigmatics du numéro 286

Pour le premier problème, vous pouvez espérer gagner 9 309,091 euros. Définissons $S(x, t, n)$, la somme dont vous disposerez à la fin de la série de paris quand vous avez x euros, quand il reste t jets de pièce et que l'oracle a n mensonges à sa disposition (n est égal à 1 ou à 0).

Lorsque vous avez à jouer t fois, que l'oracle ne peut plus mentir et que vous avez x euros, vous pariez tout votre argent à chaque fois : $S(x, t, 0) = x \cdot 2^t$. Dans le cas où il reste un pari et que l'oracle peut encore mentir, vous ne pariez rien : $S(x, 1, 1) = x$.

Calculons $S(x, t+1, 1)$. Si vous mettez en jeu b euros au pari suivant, soit l'oracle ment et vous finirez la partie avec $S(x-b, t, 0)$, soit l'oracle ne ment pas cette fois et vous aurez $S(x+b, t, 0)$. Opti-

miser le gain consiste à évaluer $S(x-b, t, 0)$ et $S(x+b, t, 0)$, car l'oracle vous ferait choisir la pire solution. Étudions l'équation $S(x-b, t, 0) = S(x+b, t, 0)$.

$S(x, 1, 1) = x$, $S(x, 1, 0) = 2x$, $S(x, t, 0) = x \cdot 2^t$, $S(x, 2, 1) = 4x/3$ (vous avez parié $x/3$), $S(x, 3, 1) = 2x$ (vous avez parié $x/2$). Pour $S(x, 4, 1)$, on résout $S(x-b, 3, 0) = S(x+b, 3, 1)$. Soit $8(x-b) = 2(x+b)$. $b = 6x/10$ et $S(x, 4, 1) = 32x/10$. Et ainsi de suite...

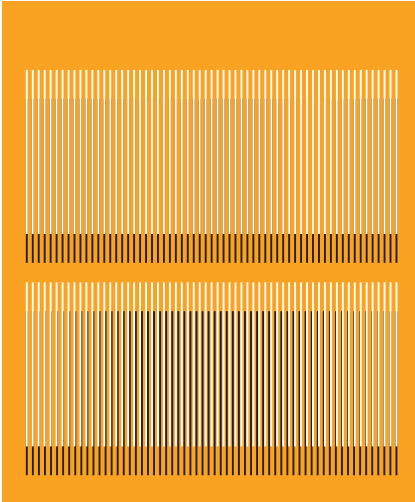
Ainsi, $S(100, 2, 1) = 133,33$ euros, $S(100, 3, 1) = 200$ euros, $S(100, 4, 1) = 320$ euros, $S(100, 5, 1) = 533,33$ euros, $S(100, 6, 1) = 914,28$ euros, $S(100, 7, 1) = 1600$ euros, $S(100, 8, 1) = 2\,844,44$ euros, $S(100, 9, 1) = 5\,120$ euros, $S(100, 10, 1) = 9\,309,09$ euros,

$S(100, 11, 1) = 17\,066,67$ euros. Après 20 jets de pièce, vous auriez plusieurs millions d'euros!

Pour le second problème, quand vous devez parier à l'avance, vous n'aurez au final que 1 600 euros au mieux. Créons de nouveau deux fonctions. $M(n)$ est le montant minimal que vous êtes sûr d'avoir après n jets si le mensonge a déjà eu lieu : $M(n) = 100 +$ les sommes des $n-1$ paris – la somme du pari le plus élevé.

$V(n)$ est la somme que vous avez après n jets quand le mensonge est encore à venir. $V(n) = 100 +$ tous les paris gagnés.

La meilleure stratégie qui se présente est de parier successivement : 50 ; 50 ; 100 ; 100 ; 200 ; 200 ; 400 ; 400 ; 800 ; 800. Ce qui se traduit par les gains successifs suivants : 50 ; 100 ; 100 ; 200 ; 200 ; 400 ; 400 ; 800 ; 800 ; 1600.



Les moirés de Vasarély

LOÏC MANGIN

L'œuvre de Vasarély nous invite à une promenade entre la physique et les mathématiques.

«Un mathématicien est un faiseur de motifs. Ces motifs, comme ceux des peintres ou des poètes, doivent être beaux ; les idées, comme les couleurs ou les mots, doivent s'assembler harmonieusement.»

Godfrey Hardy

En 1965, au musée d'Art moderne de New York, sont regroupées pour la première fois les œuvres dites d'art optique, car elles jouent sur les illusions perceptives, les effets de moirés, les scintillements... Parmi les artistes que l'on y admire figurent François Morelet, et surtout l'initiateur de cette forme d'art, le peintre français d'origine hongroise Victor Vasarély (1906-1997). Par son succès auprès des critiques et du public, Vasarély est rapidement baptisé «l'inventeur de l'art optique». À cette époque, l'engouement est tel que de nombreuses revues, de *Vogue* à *Scientific American*, font leur couverture des œuvres d'art optique. Les uns pour leur esthétique, les autres pour leur rigueur géométrique.

Victor Vasarély a fréquenté le Műhely de Budapest, l'équivalent hongrois du Bauhaus, l'école d'art fondée à Weimar en 1919 par Walter Gropius. Pour ce dernier, le but de toute activité plastique est la construction et l'architecture. Vasa-

rély a ainsi suivi, indirectement, les enseignements des professeurs de l'école disparue en 1933, tels Josef Albers (1888-1976), Paul Klee (1879-1940) ou Wassily Kandinsky (1866-1944), les inventeurs de l'art abstrait.

Installé à Paris en 1930, il devient l'un des maîtres de l'abstraction géométrique et concrétise dans ses œuvres ses recherches théoriques, notamment celles sur la perspective. En 1953, dans une série nommée *Transparence*, il joue avec les effets de moirés (voir la figure 3), où un motif périodique de lignes est couvert du même motif (ou de son négatif) imprimé sur un support transparent. De petits déplacements de ce dernier créent les motifs moirés. Survolons les bases mathématiques de ces figures, ainsi que les services qu'elles rendent aux physiciens.

Le moiré le plus simple apparaît quand deux séries identiques de lignes verticales régulièrement espacées sont superposées avec un léger décalage ou une rotation de quelques degrés. De larges rayures sombres apparaissent : plus l'alignement est parfait, plus ces rayures sont espacées.

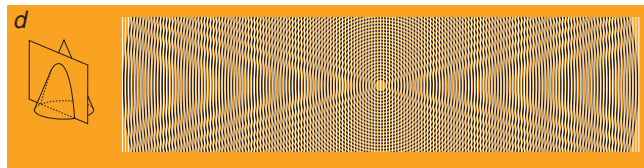
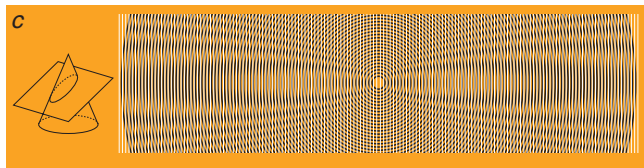
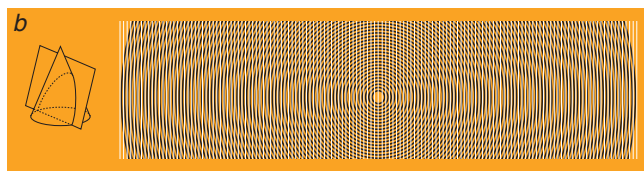
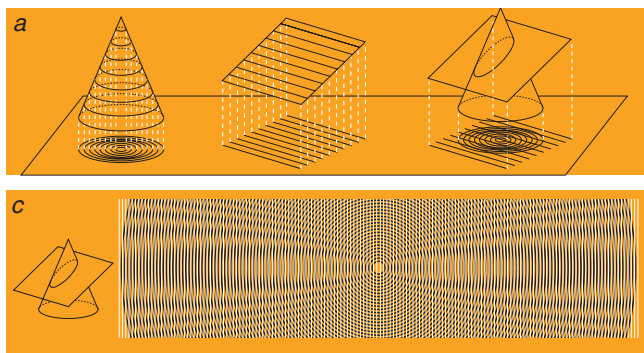
Pour comprendre l'origine des figures de moirés, considérons-les en termes de géométrie projective. Ce domaine des mathématiques est celui

des objets d'un espace à trois dimensions projetés sur un espace à deux dimensions. Par exemple, quand on projette les intersections d'un cône avec une série de plans, parallèles à sa base et équidistants, on obtient sur un plan de projection parallèle à la base du cône une série de cercles concentriques (voir la figure 1).

De la même façon, les intersections d'un plan incliné par une série de plans perpendiculaires au plan de projection se projettent en une série de lignes parallèles. Ces lignes parallèles sont d'autant plus écartées que le plan initial est incliné par rapport au plan de projection.

Ainsi, en géométrie projective, un cône est équivalent à une série de cercles concentriques et un plan, à une grille. Quels motifs moirés apparaissent lors de la superposition des cercles concentriques et de la grille ? Des ellipses, des hyperboles, des paraboles (voir la figure 1), c'est-à-dire les différentes intersections d'un plan et d'un cône, ce que les mathématiciens nomment les sections coniques.

Quand l'espacement de la grille est environ égal à celui des cercles concentriques, les figures de moirés obtenues sont des paraboles (1b). Lorsque l'espacement augmente, c'est-à-dire que le plan initial est de plus en plus hori-



1. Les figures de moirés résultent de la superposition de deux réseaux de cercles ou de droites. Quand on projette les intersections d'un cône par une série de plans parallèles au plan de la base (a, à gauche), on obtient des cercles concentriques. Par ailleurs, les intersections d'un plan incliné par une série de plans perpendiculaires au plan de

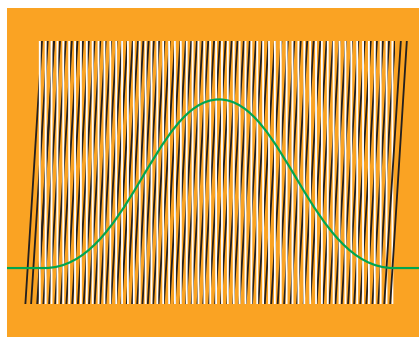
projection (a, au centre) se projettent en une série de droites parallèles. On obtient des figures de moirés en superposant ces deux réseaux de projection (a, à droite). Selon l'inclinaison du plan par rapport au cône, on obtient les figures d'intersection d'un cône par un plan : des paraboles (b), des ellipses (c) et des hyperboles (d).

zontal, les figures moirées deviennent des ellipses (1c). À l'inverse, quand l'écartement diminue – le plan se redresse – les figures de moirés deviennent des hyperboles (1d).

Grâce aux figures de moirés, on peut recréer une courbe de Gauss en superposant deux séries de lignes parallèles. La courbe «en cloche» est fonction des probabilités d'une variable aléatoire soumise à de multiples causes indépendantes. La première série est composée de lignes verticales équidistantes. Les espacements de la seconde représentent les probabilités de chaque valeur que peut prendre la variable. En d'autres termes, les espacements de la première grille sont constants, ceux de la seconde sont plus serrés au centre. Les figures de moirés obtenues suivent la courbe de Gauss (voir la figure 2).

Les physiciens utilisent aussi les figures de moirés. Par exemple, une de leurs propriétés est d'amplifier les différences entre deux séries périodiques. Quand deux séries de lignes parallèles sont rigoureusement identiques, leur superposition est parfaite. À l'inverse, une légère différence dans la régularité ou dans les espacements apparaît quand les deux séries sont superposées (voir la figure à côté du titre).

En 1874, le physicien britannique Lord Rayleigh (1842-1919) a proposé d'utiliser cette caractéristique des figures de moirés pour vérifier la qualité des réseaux de diffraction : il s'agit de plaques (à l'époque en verre) transparentes striées de rainures régulièrement espacées. Ils sont employés pour étu-



2. Grâce aux moirés, on visualise les solutions du problème de l'interférence entre deux fonctions périodiques. Les lignes verticales blanches sont régulièrement espacées, alors que les espacements des lignes noires suivent une courbe de Gauss qui apparaît quand les deux grilles sont superposées.

dier la lumière. Ainsi, les imperfections du réseau testé sont immédiatement détectées lorsque ce dernier est placé sur un réseau original dont on est sûr de la qualité.

Poursuivons avec la lumière ! En cristallographie, les phénomènes de moiré rendent d'innombrables services. Par exemple, quand deux fines lames de cristaux identiques sont superposées, des figures de moirés apparaissent au microscope électronique. Cependant, lorsque les cristaux sont plus épais, les électrons du microscope n'ont pas suffisamment d'énergie pour traverser les cristaux trop décalés l'un par rapport à l'autre : ils ne passent que lorsque la superposition est parfaite.

Les motifs obtenus résultent des interférences créées lors du passage des élec-

trons à travers les réseaux atomiques. Ces figures de moirés fournissent de multiples renseignements : par exemple, l'amplification inhérente aux moirés que nous avons décrite met en évidence des anomalies cristallines d'une taille inférieure au diamètre d'un atome (de l'ordre de quelques dixièmes de milliardièmes de mètre), soit à une précision 100 à 1 000 fois supérieure à la résolution du microscope.

Les figures de moirés aident aussi les cristallographes à déterminer, à l'aide des rayons X, la structure atomique de certaines molécules, telles les protéines, quand celles-ci sont sous une forme cristalline. Par ailleurs, les moirés aident à vérifier la qualité d'une lentille. Celle-ci est placée entre deux grilles et deux lentilles «parfaites» qui corrigent le grossissement des motifs. Quand la lentille testée renferme des distorsions, les lignes des moirés sont courbes.

Enfin, grâce aux moirés, on peut étudier la vitesse de dissolution, par exemple d'un sucre, dans une solution placée entre deux grilles de lignes parallèles : à mesure que le sucre se dissout, l'indice de réfraction de la solution évolue et modifie les figures de moirés que l'on observe.

Vasarély était très au fait de ce qui se faisait en science. Connaissait-il pour autant toutes les applications possibles des figures de moirés ?

V. VASARÉLY, *Monographie*, vol. 1, Éditions Griffon, Neuchâtel, 1965.

Fondation Vasarély, site Internet : www.fondationvasarely.com



3. En 1953, Victor Vasarély réalise les œuvres de la série *Transparence*. Elles sont composées, d'une part, d'un motif de lignes noires et blanches (ci-dessus, à gauche) peint sur un support opaque, d'autre part, du même motif (dans certaines œuvres, il

s'agit du motif en négatif) reproduit sur un support transparent que l'on superpose au premier. Les mouvements du support transparent, par exemple un décalage ou une rotation (au centre et à droite), créent des figures de moirés.



La plongée sous-marine

ROLAND LEHOUCQ • JEAN-MICHEL COURTY

Qui veut évoluer sous l'eau doit respecter des règles strictes, dictées par la physique et par la physiologie.

Le masque se plaque sur le visage ; les oreilles font mal. Toute personne qui a déjà plongé le sait : la pression ambiante augmente à mesure que l'on s'enfonce sous l'eau (d'environ une fois la pression atmosphérique tous les dix mètres). À 20 mètres de profondeur, elle est ainsi le triple de la pression atmosphérique (c'est-à-dire la pression qui règne à la surface de l'eau plus la pression due à la couche d'eau). Les tissus mous qui constituent notre organisme sont à la pression ambiante. Composés pour l'essentiel de matières solides et d'eau, ils sont peu compressibles et ne changent quasiment pas de volume au cours d'une plongée.

En revanche, le comportement de l'air contenu dans le système respiratoire est tout autre. Les gaz sont beaucoup plus compressibles que les liquides (1 000 fois plus que l'eau). Dès le milieu du XVII^e siècle, l'Irlandais Robert Boyle et le Français Edme Mariotte énoncèrent une loi pour décrire leur compressibilité : «Le volume d'un gaz est, à température constante, inversement proportionnel à la pression qu'il subit.» Ainsi, quand la pression double, le volume qu'occupe un gaz est divisé par deux. Ceci explique que dès dix mètres de profondeur, le masque écrase le visage. Pour s'affranchir de cet inconvénient, les plongeurs munis de bouteilles doivent apprendre à insuffler de l'air dans leur masque par le nez à mesure qu'ils descendent. Pour éviter des douleurs dans les oreilles dues à une trop forte pres-

sion sur les tympans, ils soufflent par les voies nasales en se bouchant le nez, de sorte que la pression augmente dans les trompes d'Eustache (de petits conduits qui assurent l'équilibre de la pression sur les tympans).

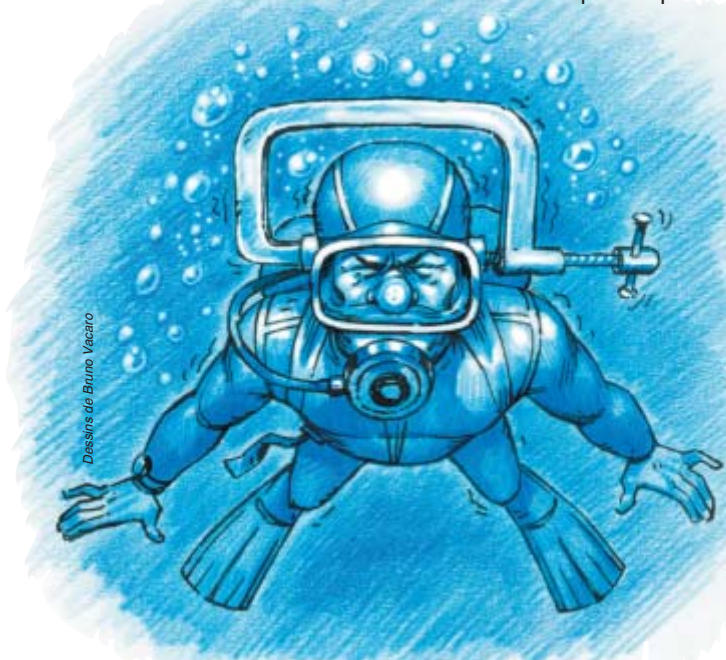
Les conséquences pratiques de la compressibilité de l'air sont encore plus nombreuses lorsque les plongeurs remontent. Après une expiration normale, la quantité d'air résiduelle dans les poumons est supérieure à trois litres, et elle n'est jamais inférieure à 1,5 litre, même lors d'une expiration profonde. Dans les poumons d'un plongeur qui remonte, cet air résiduel se dilate à mesure que diminue la pression ambiante. Si la remontée est trop rapide, le volume risque d'excéder la capacité maximale des poumons, qui avoisine six litres. Pour cette raison, les plongeurs qui remontent évitent de bloquer leur respiration ; ils expirent en permanence, de façon à éviter que les tissus qui composent leurs poumons ne se distendent jusqu'au point de rupture des membranes des cellules pulmonaires. Cet accident rare, mais redouté, est nommé la surpression pulmonaire.

Notons que la dilatation de l'air touche toutes les cavités intérieures, même celles dont on ne soupçonne pas l'existence ! Il arrive, par exemple, qu'un plombage mal réalisé contienne de minuscules cavités pleines d'air. En raison de la petite taille de l'ouverture qui les relie à l'extérieur, plusieurs minutes, voire plusieurs dizaines de minutes sont nécessaires pour que la pression qui règne à l'intérieur de l'une de ces petites bulles atteigne la pression ambiante. Toutefois, au bout d'une plongée de 40 minutes, par exemple, cet équilibre est atteint. Pendant la remontée, la pression dans les cavités n'a pas le temps de s'équilibrer. La surpression qui s'ensuit alors à l'intérieur des dents crée de violentes douleurs, peut faire éclater la dent, ou expulser le plombage. Si vous plongez, ayez un bon dentiste !

DISSOLUTION DES GAZ

Les gaz ne se logent pas seulement dans les cavités, mais se dissolvent aussi dans les liquides. On trouve ainsi dans le sang tous les gaz que contient l'air. En 1803, le Britannique William Henry remarqua que la quantité de gaz qui se dissout dans un liquide est proportionnelle à la pression que ce gaz exerce sur le liquide, et que la quantité de gaz qui se dissout dans un liquide donné à une pression donnée dépend de la nature de ce gaz et de celle du liquide. De l'eau en contact avec de l'air contient des proportions d'azote et d'oxygène différentes de leurs proportions dans l'air.

Un litre d'eau à la pression atmosphérique contient ainsi quelque 15 milligrammes d'azote et 8 milligrammes d'oxygène, alors que sous la même pression, l'air contient quatre fois moins d'oxygène que d'azote. L'air qu'un plongeur respire sort des bouteilles, puis passe par le détendeur, qui le met à la pression ambiante. Puisque la pression augmente au cours de la descente, de plus en plus d'oxygène et d'azote se dissolvent



La pression augmente avec la profondeur ; elle écrase le nez et enfonce les tympans. Les plongeurs s'affranchissent des effets indésirables de la pression ambiante en soufflant dans leur masque.