

Les mathématiques sur les planches



À l'hôpital Sainte-Anne, le psychiatre qui vient de recevoir dans son service une jeune femme véhémement, disjonctée, trouvée à la rue, laisse tomber son diagnostic : mathématopathie aiguë ! À écouter les bribes du discours décousu de la malade, on découvre que l'exclusion a commencé pour elle à l'école, son échec en mathématique s'avérant catastrophique pour ses études et sa santé mentale. **Dernier numéro**, c'est la pièce, en un acte, d'Olivier Dutailis racontant la folle parade imaginée par cette femme pour régler, à jamais, son compte avec le monde des chiffres, un monde qui, par ailleurs, la fascine comme une inaccessible poésie de l'esprit. Interprété par Joëlle Serane, ce spectacle a été créé, en octobre 1999, au théâtre du Campagnol et présenté au Festival d'Avignon in en juillet 2000. Le 20 octobre 2001, à 15 heures, c'est le Palais de la Découverte* qui ouvre ses portes pour une représentation unique et gratuite donnée dans le cadre de la Fête de la science. Mais ce n'est pas tout ! Mathématopathes et mathématophiles pourront ensuite se retrouver dans un **Bar des sciences** pour rencontrer l'auteur et dialoguer avec **Didier Nordon**, mathématicien et professeur à l'université de Bordeaux 1. Lui tient un autre discours : « Les mathématiques, c'est l'évidence même ! »

*Palais de la Découverte : av. Franklin Roosevelt - 75008 PARIS - Marie-José Loverini : 01 40 74 86 58



POUR LA SCIENCE

inappropriés de familiarité, qui se traduisent par des fausses reconnaissances (les patients croient reconnaître une personne qu'elles voient pour la première fois).

Je n'est pas un autre

La région frontale droite attribuerait le sentiment de familiarité perçu grâce aux aires temporo-lobiques à sa source exacte en « décidant » si le visage qui semble familier est bien celui de la personne correspondante ou celui de quelqu'un d'autre qui lui ressemble. De façon plus précise encore, il semble que l'hémisphère droit soit impliqué dans la reconnaissance du « soi ».

Grâce à un ordinateur, Julian Keenan et ses collègues de la Faculté de médecine Harvard, à Boston, ont ainsi fabriqué une figure chimérique à partir de deux visages : celui d'une personnalité célèbre (Marylin Monroe) et celui du sujet. En inactivant temporairement (quelques minutes) l'hémisphère gauche par injection dans la carotide gauche d'un barbiturique, ils ont montré que les sujets (grâce à l'activité restante de leur hémisphère droit) reconnaissent leur propre visage dans cette image composite ; inversement, quand l'hémisphère droit est temporairement inactivé, ce sont les traits de la personnalité célèbre qui sont identifiés. Ainsi, on ne reconnaît pas autrui comme on se reconnaît soi-même.

Les aires temporales internes (le gyrus para-hippocampique et le gyrus hippocampique) interviennent pour raccorder le visage reconnu à l'ensemble des connaissances dont nous

disposons sur l'individu correspondant. Comme ces informations sont en grande partie codées sous une forme verbale, les régions temporales gauches jouent sans doute là un rôle déterminant. Ces aires temporales internes font partie du système limbique (mémoire et émotions), et sont aussi nécessaires à l'acquisition des nouveaux visages (elles permettent le codage nécessaire à la mémorisation). Enfin, des aires de médiation spécialisées dans le traitement des noms des personnes, localisées dans la région antérieure et externe du lobe temporal gauche ainsi que dans les aires temporales internes, serviraient à activer les zones du langage pour que l'on puisse nommer les individus.

Ainsi, la reconnaissance des visages fait intervenir de façon complémentaire des régions étendues des deux hémisphères. L'hémisphère droit dispose des compétences adaptées à l'analyse visuelle et à la confrontation avec les visages mémorisés. Il attribue le sentiment de familiarité à sa source (je connais ce visage). À l'hémisphère gauche revient de façon préférentielle l'accès aux informations biographiques (je sais qui est cette personne) et la capacité de les verbaliser. Il produit également le nom, qui achève d'individualiser le sujet.

Depuis quelques années, nos connaissances sur le traitement des visages ont fait des progrès considérables, même si bien des questions demeurent ouvertes. Plus qu'une « fonction », la reconnaissance des visages constitue une compétence du cerveau, qui met en jeu des cellules et des aires spécialisées, et une latéralisation cérébrale spécifique.

Patrick VERSTICHEL est neurologue au Centre hospitalier intercommunal de Créteil. En 2000, il a reçu le prix de neurologie Victor et Clara Soriano de l'Académie nationale de médecine pour ses travaux sur les troubles de la reconnaissance des visages.

J. SERGENT, *Face perception and the right hemisphere*, in *Thought without language*, sous la direction de L. Weiskrantz, Oxford University Press, pp. 108-131, 1988.

V. BRUCE et P. GREEN, *La perception visuelle, physiologie, psychologie et écologie*, Presses Universitaires de Grenoble, pp. 416-435, 1993.

H. DAMASIO et al., *A neural basis for lexical retrieval*, in *Nature*, vol. 380, pp. 499-505, 1996.

J. CAMBIER et P. VERSTICHEL, *Le cerveau réconcilié*, Masson, 1998.

P. VERSTICHEL et L. CHIA, *Trouble d'identification des visages après lésion hémisphérique gauche*, in *Revue neurologique*, vol. 155, pp. 937-943, 1999.

B. DE GELDER et W. ROUW, *Paradoxical configuration effects for faces and objects in prosopagnosia*, in *Neuropsychologia*, vol. 38, pp. 1271-1279, 2000.

G. ASSAL, *Prosopagnosie*, in *Bulletin de l'Académie nationale de médecine*, vol. 185, n° 3, pp. 525-536, 2001.

P. VERSTICHEL, *Troubles de la reconnaissance des visages : reconnaissance implicite, sentiment de familiarité, rôle de chaque hémisphère*, in *Bulletin de l'Académie Nationale de Médecine*, vol. 185, n° 3, pp. 537-553, 2001.

ABONNEZ-VOUS À **POUR LA SCIENCE**

L'univers des sciences tel que vous ne l'avez jamais vu



✓ **Votre 1^{er} avantage**

En vous abonnant au magazine *Pour la Science*, vous accédez tous les mois à une information scientifique de qualité : les chercheurs vous expliquent l'actualité de la recherche internationale.

✓ **Votre 2^e avantage : 25% de remise**
soit 1 an d'abonnement (12 n^{os})
56€ seulement !

✓ **Votre 3^e avantage**

Pendant 1 an vous recevez votre magazine chez vous.
Vous pouvez aussi consulter à tout moment
la version numérique sur

www.pourlascience.fr



BULLETIN D'ABONNEMENT

à retourner accompagné de votre règlement à : Service Abonnements • Pour la Science • 8, rue Férou • 75278 Paris cedex 06

POUR LA SCIENCE

☐ **Oui, je m'abonne au magazine *Pour la Science* pendant 1 an**

soit 12 numéros et leur version numérique **au prix de 56€** (au lieu de 74,70€, prix de vente au numéro).

Offre valable uniquement en France métropolitaine. Participation aux frais de port pour l'étranger à ajouter au prix de l'abonnement : France d'Outre-Mer et Europe 12€ - autres pays 25€.

☐ **Je préfère m'abonner uniquement à la version numérique du magazine *Pour la Science* pendant 1 an**

soit 12 numéros consultables et téléchargeables sur www.pourlascience.fr **au prix de 48€** (au lieu de 74,70€, prix de vente au numéro).

J'indique mes coordonnées :

Nom : _____

Prénom : _____

Adresse : _____

Code postal : _____ Ville : _____

Pays : _____ Tél.* : _____

*facultatif

☐ Je souhaite recevoir la newsletter *Pour la Science* à l'adresse e-mail suivante :

@ _____

☐ J'accepte de recevoir également les informations des partenaires de *Pour la Science*.

Je choisis mon mode de règlement :

☐ Par chèque à l'ordre de *Pour la Science*

☐ Par carte bancaire

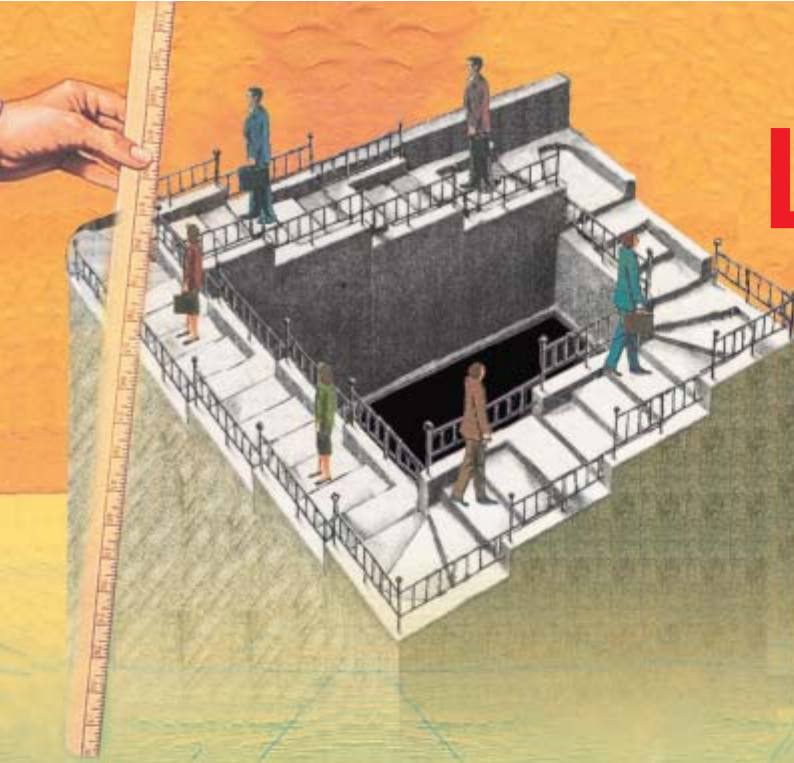
Numéro de carte _____

Date d'expiration _____

Clé _____

(les 3 chiffres au dos de votre CB)

Signature obligatoire



Les enjeux du recrutement

MICHEL BALINSKI

Des procédures de recrutement actuellement utilisées amènent le paradoxe du «mieux-classé, pire-placé» et des possibilités d'ententes frauduleuses. Une seule procédure évite ces imperfections.

Cherchez-vous un emploi ou une situation meilleure? Êtes-vous candidat à un concours – à une grande école ou un corps de l'État? Venez-vous d'être diplômé en médecine, en quête d'un internat des hôpitaux? Ou voulez-vous un poste d'enseignant dans une université?

Si la réponse à l'une de ces questions est oui, vous jouez un rôle dans un marché à deux genres d'agents. D'un côté du marché se trouvent les individus (comme vous) cherchant un poste ou une place et, à l'opposé, les institutions (les employeurs, les grandes écoles, les corps d'État, les hôpitaux, les Facultés des universités) avec des postes ou des places à offrir. Chaque agent d'un même genre a ses préférences et, d'une manière ou d'une autre – que le marché soit organisé ou livré à une main invisible, par le biais d'offres, de stratagèmes, de dates de clôture, de connivences, de contre-propositions... –, les souhaits des uns et des autres se réalisent par des affectations d'individus à des postes.

Ces affectations sont-elles satisfaisantes, efficaces, équitables... ou non? Un exemple vécu, d'un marché très bien organisé, révèle l'essence du problème.

Chaque année le ministère de l'Éducation nationale annonce par divers arrêtés les vacances d'emplois de Maître de conférences et de Professeur des universités dans les diverses disciplines des différentes universités (environ 300 postes de Professeur et plus de 1 200 postes de Maître en 2001). Le

«Guide télématique à l'usage des candidats», envoyé à chaque candidat, explique la pratique actuelle de ce marché. À son cœur, une procédure est utilisée pour attribuer les postes. Parmi un ensemble potentiellement vaste de possibilités, qui toutes tiennent compte à la fois des classements des candidats par les universités et des préférences individuelles des candidats pour les postes, la procédure choisit une affectation particulière.

Malheureusement, ce choix est pervers (comme ceux utilisés dans bien d'autres situations similaires!). Voyons pourquoi et comment faire pour rendre le choix raisonnable.

Les marchés universitaires

La publication des annonces de postes au *Journal Officiel* lance une suite d'événements bien connue de la communauté universitaire. Dans un premier temps, ceux qui sont éligibles aux postes déposent leur candidature, et les commissions de spécialistes des disciplines des universités concernées classent, pour chaque emploi, au maximum cinq postulants (ou, si plusieurs postes de profil identique d'un même établissement ont été publiés, au maximum cinq fois le nombre de postes à pourvoir). Puis, dans un second temps, chaque candidat est informé de ses classements : pas classé pour un poste, classé au troisième rang pour un autre, classé premier pour un troisième, et ainsi de suite. Chacun est alors invité

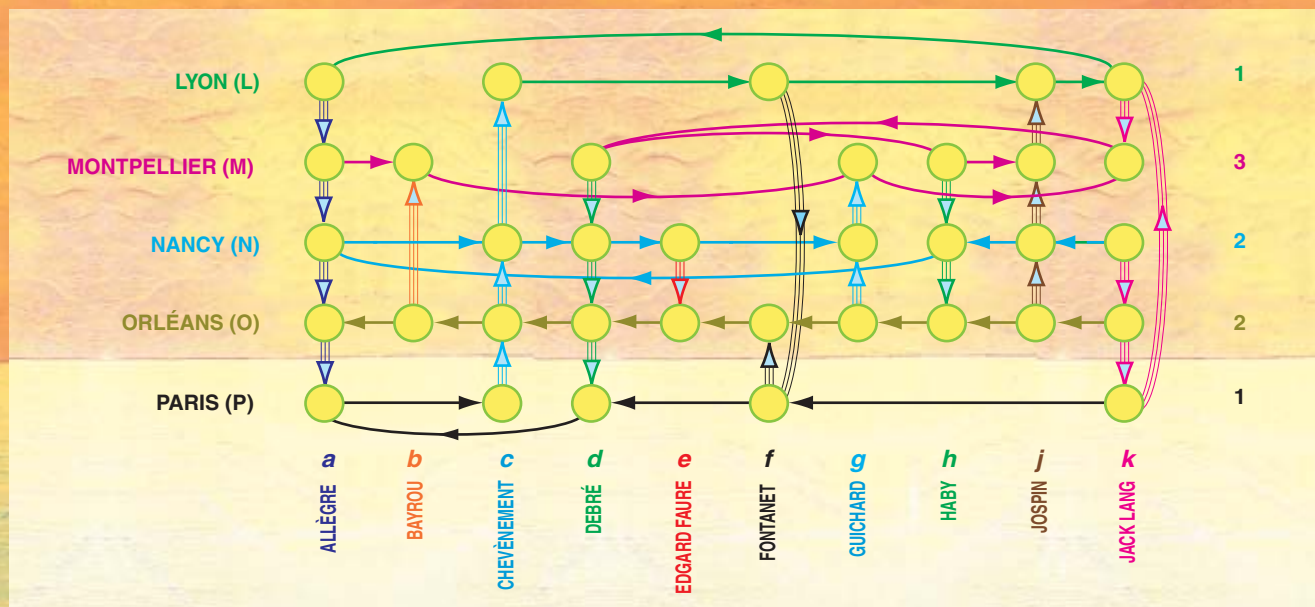
à soumettre par ordre préférentiel les postes qu'il accepterait parmi ceux pour lesquels il a été classé.

Ainsi, un problème mathématique est posé : dans ce marché d'emplois, il y a d'un côté les postes à pourvoir, chaque poste (ou chaque groupement de postes identiques) étant doté d'un classement des candidats ; de l'autre côté les candidats, chacun ayant sa liste de priorité pour les postes où il a été classé.

La question est : *Comment, sur la base de ces seules informations, affecter les candidats aux postes?*

La procédure universitaire française est identique à celle, connue pour ses défauts, utilisée par le ministère de l'Éducation nationale de la Turquie pour résoudre un problème similaire.

En Turquie, chaque année, il s'agit d'affecter plus d'un million d'étudiants aux universités. Un candidat doit se présenter à une batterie d'examen nationaux. Ses résultats, pondérés différemment selon les études qu'il souhaite poursuivre, déterminent son classement dans chaque discipline pour toutes les universités – littérature, mathématiques, architecture, histoire, etc. Il liste ses préférences, par exemple : 1. chimie à Bogaziçi Üniversitesi ; 2. génie chimique à Bogaziçi Üniversitesi... ; 6 et dernier. pharmacie à Ankara Üniversitesi, signifiant ainsi que s'il n'obtient pas au moins son sixième et dernier choix il préfère alors renoncer aux études universitaires.



1. DONNÉES DU PROBLÈME DU RECRUTEMENT en Sciences politiques 2002. Les préférences des candidats et des universités sont indiquées par les flèches (une flèche va d'un moins à un plus acceptable).

Les données brutes des deux problèmes – tout en étant de taille très différente – sont donc de même nature : il y a un marché d'agents de deux types opposés – des postulants d'un côté et des universités de l'autre, chacune avec une capacité – et chaque agent a une liste prioritaire pour ceux du côté opposé.

Modèle mathématique

Concrètement, imaginez qu'en 2002, il y ait neuf postes de Maître de conférences à pourvoir en Sciences politiques (en 2001, il y avait onze), un à l'Université de Lyon I (L), trois identiques à Montpellier III (M), deux identiques à Nancy II (N), deux identiques à Orléans (O) et un à Paris VI (P) ; et dix candidats, tous portant, par hasard, le nom d'un ancien ministre de l'Éducation nationale : Claude Allègre (a), François Bayrou (b), Jean-Pierre Chevènement (c), Michel Debré (d), Edgar Faure (e), Joseph Fontanet (f), Olivier Guichard (g), René Haby (h), Lionel Jospin (j) et Jack Lang (k).

2. UNE AFFECTATION μ EST "MÉRITOIRE" quand, pour tout sommet, soit (i) le sommet est un sommet de μ , soit (ii) le sommet est suivi dans sa colonne par un sommet de μ , soit (iii) le sommet est suivi dans sa ligne par q sommets de μ (où q est la capacité de la ligne, ici le nombre de postes disponibles de l'université concernée). L'affectation verte représentée par l'ensemble des disques verts, n'est pas méritoire car (entre autres) le sommet (O, e) n'est ni vert, ni suivi dans sa colonne par un sommet vert, ni suivi dans sa ligne par deux sommets verts (la capacité de l'université d'Orléans est de deux postes).

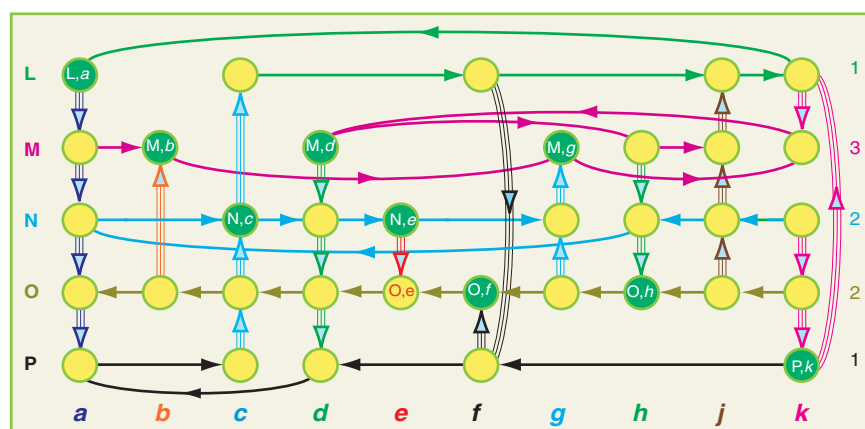
Les données sont représentées sur la figure 1. Le graphe contient des *sommets* (disques jaunes), situés sur une grille, reliés par des *flèches*. Chaque ligne de la grille est associée à un emploi ou groupement d'emplois – et a donc une *capacité* – et chaque colonne de la grille à un candidat. L'existence du sommet noté (N, a), de la ligne N et de la colonne a, signifie que l'Université de Nancy (N) préfère prendre Allègre (a) comme Maître, plutôt que ne pas remplir ses deux postes, et, en même temps, qu'Allègre préfère accepter un poste à Nancy plutôt qu'être sans poste du tout. L'absence du sommet (L, b) indique qu'en aucun cas Lyon (L) n'accepterait Bayrou (b) et/ou Bayrou, Lyon.

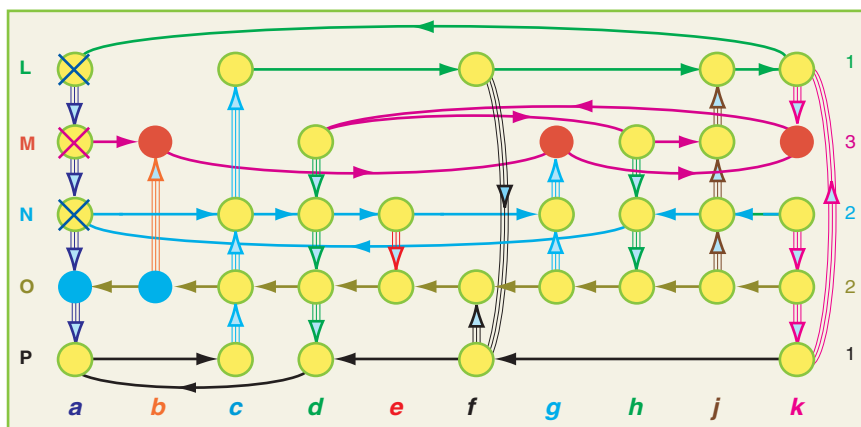
Les flèches du graphe indiquent les préférences. La flèche horizontale allant du sommet (M, g) au sommet

(M, k) traduit en langage graphique que Lang (k) est classé devant Guichard (g) par Montpellier (M) : la flèche part d'un postulant vers un autre jugé meilleur. Donc M classe les candidats dans l'ordre : a, b, g, k, d, h, j, du moins au plus acceptable. Jospin est classé premier, Allègre dernier.

Symétriquement, la flèche verticale de (N, a) vers (O, a) indique qu'Allègre préfère un poste à Orléans plutôt qu'à Nancy, et la colonne de a décrit ses préférences, du moins au plus acceptable des postes universitaires, soit dans l'ordre : L, M, N, O, P. Le premier choix d'Allègre est Paris, le dernier, Lyon.

Quelles sont les affectations possibles dans ce marché universitaire ? L'affectation «verte» (voir les sommets verts de la figure 2) d'Allègre à Lyon, de Bayrou, Debré et Guichard à Mont-





3. LES SOMMETS INUTILES : les sommets rouges ((M, k) , (M, g) et (M, b)) sont les meilleurs de leur colonne, et la capacité de la ligne M est de trois postes. En conséquence, le sommet (M, a) , moins bien classé par Montpellier, est inutile et peut être éliminé (croix rouge). Les sommets (O, a) et (O, b) en bleu sont les meilleurs pour remplir les deux postes d'Orléans : donc (L, a) et (N, a) , moins bien classés par Allègre, sont inutiles (croix bleues) et supprimés.

pellier, de Chevènement et Faure à Nancy, de Fontanet et Haby à Orléans, et de Lang à Paris, revient à choisir l'ensemble des sommets : (L, a) , (M, b) , (M, d) , (M, g) , (N, c) , (N, e) , (O, f) , (O, h) , (P, k) .

Tout ensemble de sommets parmi ceux du graphe ayant au plus un sommet par colonne et dont le nombre de sommets d'une ligne ne dépasse pas sa capacité représente une affectation possible (comme la verte). Désormais, l'analyse du problème se fera dans l'esprit des graphes.

Affectations méritoires

En général, un problème peut avoir un nombre exponentiel d'affectations. Sont-elles toutes raisonnables ?

L'affectation verte de la figure 2 est certes possible, mais à regarder de plus près... certaines anomalies apparaissent. Le sommet (M, j) n'est pas dans l'affectation verte – en fait, Jospin n'est affecté à aucune université –, mais ce sommet suit, dans sa ligne, au moins un sommet vert (M, g) : ainsi Jospin est classé devant Guichard par Montpellier. Pourquoi alors ne pas affecter Jospin à Montpellier plutôt que Guichard ? Manifestement, l'affectation verte ne reconnaît pas les mérites de Jospin. Elle ne distingue pas plus ceux de Lang. Le sommet (M, k) suit, dans sa ligne, au moins un sommet de l'affectation verte et (M, k) suit aussi, dans sa colonne, le sommet vert : Montpellier (M) préfère Lang (k) à au moins un des candidats verts $(b$ ou $g)$, et Lang (k) préfère Montpellier à son affectation verte (P) . L'affectation verte est manifestement inadmissible.

Le principe de mérite à respecter est clair : si un candidat peut être affecté à un emploi de l'université E , mais ne l'est pas, alors soit il est affecté à un emploi qu'il préfère, soit les emplois de E sont tous affectés à des candidats mieux classés que lui par E . Autrement, ce candidat réclamerait un poste à l'université E à la place (si nécessaire) d'un autre candidat moins bien classé. Dans les termes du modèle, une affectation μ est méritoire quand elle répond aux exigences logiques formulées dans la légende de la figure 2.

Il n'est nullement évident qu'il soit possible de trouver une affectation méritoire pour n'importe quel problème, mais quelques observations simples ouvrent la voie à une approche qui en fournira toujours au moins une.

Revenons au problème et regardons la figure 3. Prenons d'abord le point de vue de Montpellier. Cette université (M) a trois postes à pourvoir. Elle voit qu'elle est le premier choix des trois candidats Bayrou (b) , Guichard (g) et Lang (k) (sommets rouges). Donc, M sait qu'elle ne sera jamais obligée de nommer un concurrent classé en dessous de ces trois, en l'occurrence, Allègre, et il n'y a aucune raison de considérer cette possibilité. Dans le graphe, le sommet (M, a) est suivi dans sa ligne par trois sommets qui sont chacun le meilleur de sa colonne, où 3 est la capacité de la ligne M et peut, en conséquence, être éliminé (suppression indiquée par la croix rouge de la figure 3) : c'est un sommet inutile pour une université.

Un sommet peut aussi être inutile du point de vue d'un postulant. Allègre (a) voit qu'il est classé parmi

les deux meilleurs par Orléans (en bleu sur la figure 3), où deux postes sont disponibles, donc il est sûr d'être nommé à Orléans sinon mieux et il peut oublier ses candidatures à Lyon et à Nancy (ainsi qu'à Montpellier, déjà éliminé). (N, a) et (L, a) sont inutiles pour un candidat (indiqués par les croix bleues), ici le candidat Allègre : chacun de ces sommets est suivi dans sa colonne par un sommet parmi les q meilleurs de sa ligne, où q est la capacité de la ligne.

Ainsi, en identifiant et en supprimant des sommets inutiles du graphe, on obtient un graphe plus petit qui représente strictement le même problème : une affectation est méritoire pour un des graphes si et seulement si elle est méritoire pour l'autre. Un moyen d'obtenir des affectations méritoires – y compris celles choisies par les ministères français et turc – est de systématiser cette simplification.

Algorithme graphique

Calculer dans ce système mathématique revient donc à identifier des sommets inutiles et à les éliminer.

L'opération est facile. Afin de trouver les sommets inutiles pour les universités, coloriez en rouge le meilleur sommet de chaque colonne (voir la figure 4a), c'est-à-dire, choisissez la solution dite *candidats-gloutonne*, où à chaque candidat est accordé son meilleur choix. Dans une ligne ayant au moins sa capacité q de sommets rouges, tous les sommets qui précèdent les q meilleurs sommets rouges sont inutiles. Ainsi, dans notre exemple, dix sommets sont identifiés comme inutiles pour les universités (désignés par des croix rouges sur la figure 4b) : leur élimination donne le graphe de la figure 4c. Dans ce graphe, la solution candidats-gloutonne (en rouge) révèle trois sommets inutiles pour les universités (voir la figure 4d), ce qui mène au graphe de la figure 4e. Mais ici, il n'y a pas de sommet inutile pour une université, les sommets rouges – la solution candidats-gloutonne – constituent une affectation méritoire, car cette solution satisfait les exigences définissant les affectations méritoires : chaque sommet est, soit rouge, soit suivi par un sommet rouge dans sa colonne.

Cet algorithme démontre qu'il y aura toujours, pour tout problème, une affectation méritoire, car de deux choses l'une : soit au moins un som-

met inutile pour une université est éliminé, soit aucun n'est inutile pour les universités et, dans ce cas, les rouges constituent une affectation méritoire. La première possibilité ne peut pas se répéter éternellement, donc la seconde doit se produire.

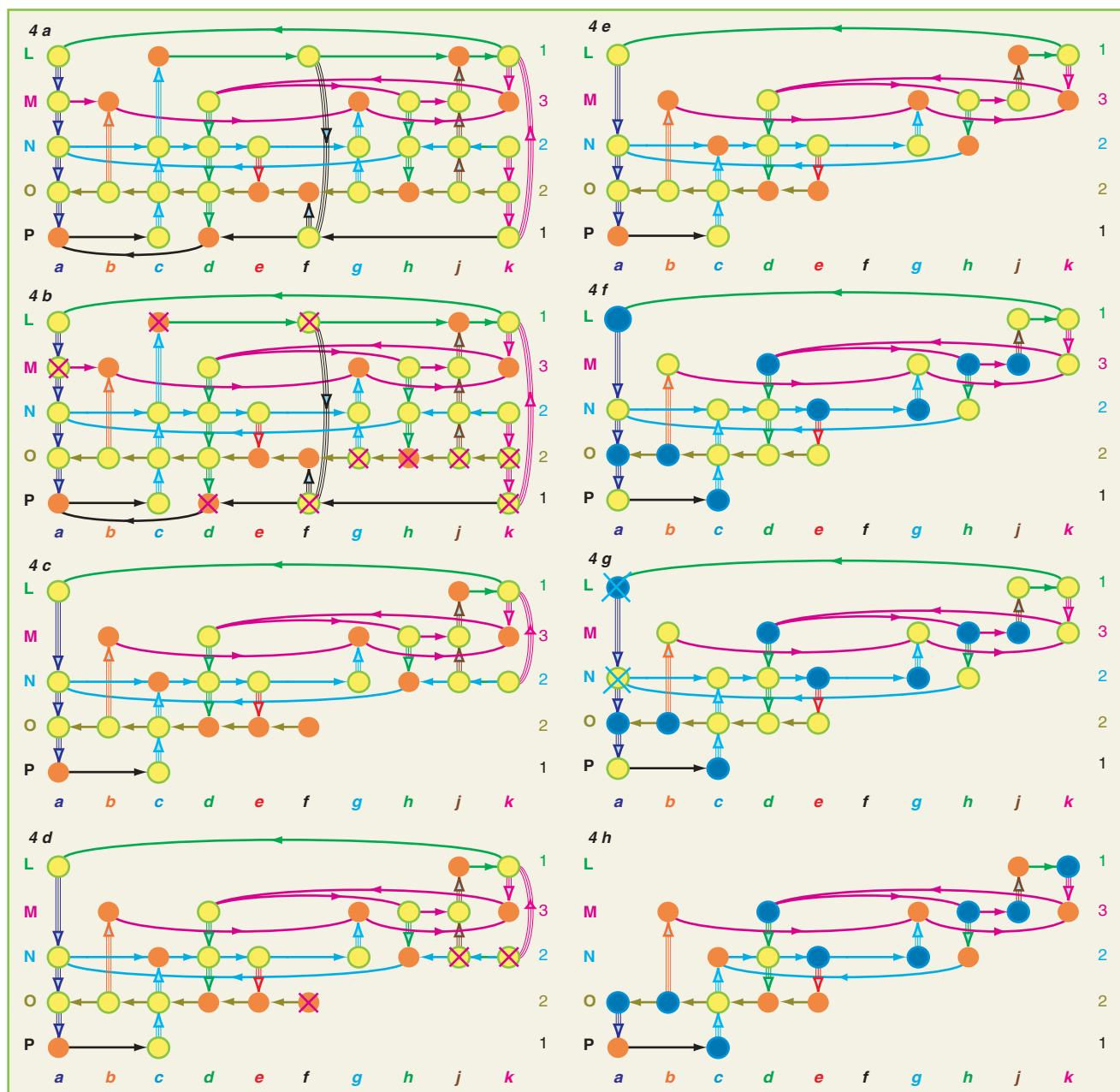
Examinons maintenant les sommets inutiles pour les candidats (on aurait pu commencer par eux). La solution candidats-gloutonne, coloriée en rouge, avait été utilisée pour identifier les som-

rets inutiles pour les universités. Ainsi, afin de trouver les sommets inutiles pour les candidats, choisissez la solution *universités-gloutonne* : coloriez en bleu les q meilleurs sommets de lignes de capacité q , (voir la figure 4f) (dans cette solution, à chaque université est accordé son idéal). Dans une colonne ayant au moins un sommet bleu, tous les sommets qui le précèdent (dans le classement du candidat de cette colonne) sont inutiles. En l'occurrence, il y en a deux (*les croix*

bleues de la figure 4g) : les éliminer donne le graphe de la figure 4h et, dans ce graphe, il ne reste aucun sommet inutile.

Affectations méritoires favorites... pour qui ?

La solution candidats-gloutonne en rouge sur la figure 4h est une affectation méritoire, et donc l'affectation méritoire *favorite des candidats*, dénommée $\mu(C)$. De même, la solution en bleu



4. L'ALGORITHME GRAPHIQUE DE RÉSOLUTION. On commence (4a) par affecter, à chaque candidat, l'université qu'il préfère (en rouge) ; puis (4b) on identifie les sommets inutiles pour les universités (les croix rouges) et on les supprime (4c). La même démarche s'applique maintenant au graphe (4c) : chaque candidat est affecté à son premier choix (en rouge), puis (4d) les sommets inutiles pour les universités sont identifiés (croix rouges) et on les supprime (4e). On réitère pour le graphe (4e) : les candidats sont tous affectés à leur premier choix (en rouge) ; cette fois, il n'y a pas de som-

met inutile pour les universités et les sommets en rouge constituent une affectation méritoire. Toutefois, il peut exister des sommets inutiles pour les candidats. On affecte (4f) à chaque université de capacité q ses q candidats préférés (en bleu), puis (4g) on identifie les sommets inutiles pour les candidats (les croix bleues) et on les supprime (4h). Et on continue ainsi. Le graphe (4h) ne contient aucun sommet inutile : les sommets en bleu indiquent $\mu(U)$, l'affectation méritoire favorite des universités, et les sommets en rouge $\mu(C)$, l'affectation méritoire favorite des candidats.

est l'affectation méritoire favorite des universités, appelée $\mu(U)$. Elles sont visiblement les favorites : $\mu(C)$ (la rouge) donne à chaque candidat son premier choix dans le graphe de la figure 4h, donc son meilleur choix possible puisque seuls ont été éliminés des sommets inutiles (autrement dit, on s'est simplement débarrassé du brouillage du système). Et, bien sûr, $\mu(U)$ (la bleue) donne également à chaque université son meilleur choix possible. Notons que le même graphe final serait obtenu indépendamment de l'ordre d'élimination des sommets inutiles.

Toutefois, ces affectations sont fâcheusement différentes : la figure 4h montre indubitablement que la favorite des candidats $\mu(C)$, la rouge, est la pire pour les universités, et que la favorite des universités $\mu(U)$, la bleue, est la pire pour les candidats.

En général, il peut y avoir beaucoup d'affectations méritoires : un problème avec 9 postes à pourvoir pourrait avoir 55 affectations méritoires..., et avec 18 postes à pourvoir, 4 181 affectations méritoires. En l'occurrence, dans notre problème, il y en a exactement 8 (voir la figure 5). En bas de la figure est l'affectation méritoire favorite des universités, $\mu(U)$, en haut, l'affectation méritoire favorite des candidats, $\mu(C)$, et entre les deux, toutes les autres affectations méritoires. Les flèches vers le haut montrent que les affectations s'améliorent collectivement pour les candidats : en allant de l'une à l'autre, chaque candidat est affecté soit au même poste, soit à un meilleur (de son point de vue). Ainsi, en allant de $\mu(6)$ à $\mu(3)$, Allègre va de son deuxième choix effectif – Orléans – à son premier – Paris –, et Chevènement de son troisième – Paris – à son deuxième – Orléans.

Cependant, quand une affectation méritoire est meilleure pour un candi-

dat, elle est pire pour l'université concernée : de $\mu(6)$ à $\mu(3)$, Orléans et Paris sont moins contentes. Par ailleurs, si deux affectations méritoires ne sont pas liées par une suite de flèches sur la figure 5, l'une n'est pas collectivement meilleure que l'autre pour les candidats ; $\mu(5)$ est meilleure que $\mu(4)$ pour certains candidats, pire pour certains, et la même pour d'autres.

Les procédures des ministères français et turc choisissent toutes les deux une affectation méritoire : précisément, l'affectation favorite des universités, $\mu(U)$. Pourquoi ? Par erreur ? Par rapport à quel objectif ? Mystère. Ceci est peut-être tout simplement dû aux réflexes innés de représentants d'État centralisateurs.

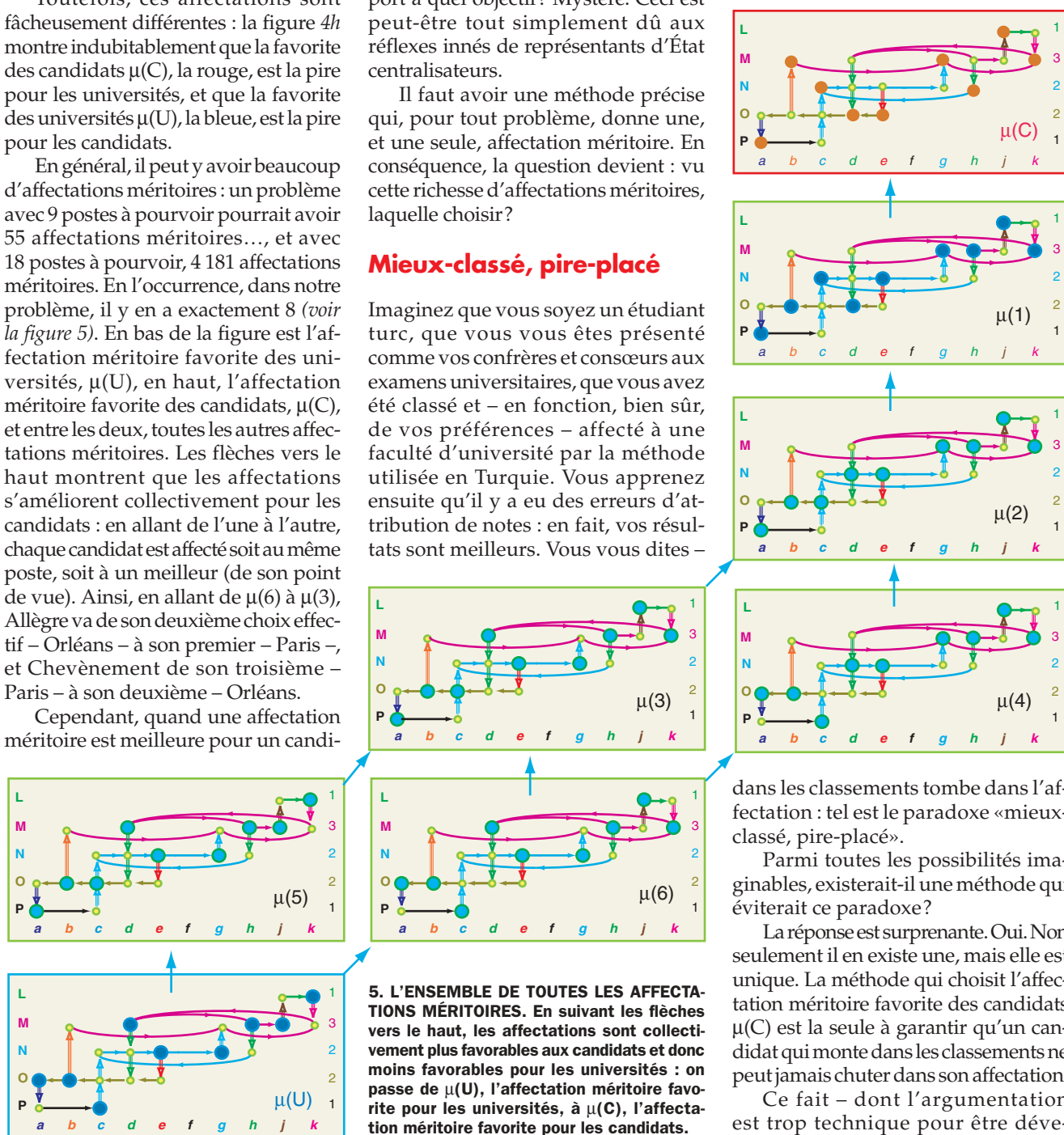
Il faut avoir une méthode précise qui, pour tout problème, donne une, et une seule, affectation méritoire. En conséquence, la question devient : vu cette richesse d'affectations méritoires, laquelle choisir ?

Mieux-classé, pire-placé

Imaginez que vous soyez un étudiant turc, que vous vous êtes présenté comme vos confrères et consœurs aux examens universitaires, que vous avez été classé et – en fonction, bien sûr, de vos préférences – affecté à une faculté d'université par la méthode utilisée en Turquie. Vous apprenez ensuite qu'il y a eu des erreurs d'attribution de notes : en fait, vos résultats sont meilleurs. Vous vous dites –

tant mieux ! – je pourrai aspirer à une meilleure affectation.

Peut-être..., mais ce n'est pas du tout sûr, car le ministère de l'Éducation nationale turc utilise la méthode qui choisit l'affectation favorite des universités, $\mu(U)$. La figure 6 décrit une telle situation. À gauche, le candidat a est classé dernier par l'université L ; à droite, le problème est identique, sauf que le candidat a est maintenant classé premier par L . Résultat (en bleu) : à gauche, a est affecté à son premier choix ; à droite, il est affecté à son dernier choix ! Un candidat qui monte

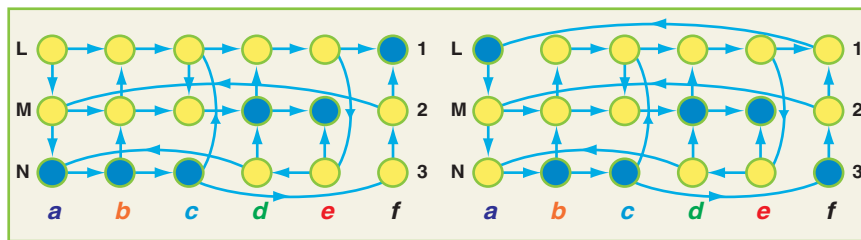


dans les classements tombe dans l'affectation : tel est le paradoxe «mieux-classé, pire-placé».

Parmi toutes les possibilités imaginables, existerait-il une méthode qui éviterait ce paradoxe ?

La réponse est surprenante. Oui. Non seulement il en existe une, mais elle est unique. La méthode qui choisit l'affectation méritoire favorite des candidats $\mu(C)$ est la seule à garantir qu'un candidat qui monte dans les classements ne peut jamais chuter dans son affectation.

Ce fait – dont l'argumentation est trop technique pour être déve-



6. LE PARADOXE MIEUX-CLASSÉ, PIRE-PLACÉ. À gauche, le candidat *a* est classé dernier par l'université *L* ; dans ce cas, $\mu(U)$, en bleu, l'affectation favorite des universités, lui donne son premier choix, *N*. À droite, les conditions sont identiques, à la différence près que le candidat *a* est classé premier par l'université *L*. Résultat : l'affectation $\mu(U)$, en bleu, lui accorde son dernier choix !

loppée ici – devrait suffire à convaincre les autorités turques de changer de méthode. La même déduction s'applique au problème de recrutement en France : il n'est pas acceptable qu'un postulant qui monte dans les classements d'une ou de plusieurs universités reçoive en conséquence un poste moins désiré. De plus, un autre phénomène désagréable, et tout autant choquant, apparaît dans le cas français.

Tricheries incitées

La procédure en France est unique : elle demande à tout postulant de classer ses préférences après qu'il a pris connaissance de ses classements par les universités, et puis l'invite à les modifier, s'il le souhaite, jusqu'à la date fatidique de clôture.

Imaginez ce qui pourrait se passer dans la campagne de recrutement 2002 en Sciences politiques. Une fois les classements des universités annoncés, trois des candidats se concertent, Allègre, Jospin et Lang (*voir la figure 1*). Ils s'informent mutuellement de leur classement, donc ils savent que le classement de Lyon est dans l'ordre 1 Allègre, 2 Lang, 3 Jospin, et que Montpellier classe Jospin 1 et Lang 4. Lyon n'intéresse nullement Allègre (il est certain d'avoir au moins Orléans), donc le poste de Lyon sera pour Lang et un des trois postes de Montpellier sera pour Jospin... sans tricherie !

Toutefois, si Lang ment et tout simplement ne classe pas dans ses préférences Lyon, alors, par la méthode $\mu(U)$ utilisée, Jospin serait sûr d'être affecté à son premier choix, Lyon, et Lang – quatrième sur la liste de Montpellier dont le premier, Allègre, est affecté ailleurs – obtient son premier choix, Montpellier. Étonnant ? Pas vraiment dans un marché où peu de postes sont brigüés par des

candidats dont beaucoup se connaissent. Le fait est que de telles manipulations entrent en jeu actuellement. Sont-elles évitables ?

La réponse est, là aussi, surprenante : parmi toutes les méthodes concevables, il en est une qui évite toute tricherie, et seulement une. La méthode qui choisit l'affectation méritoire favorite des candidats $\mu(C)$ est la seule qui garantisse qu'aucun candidat ne peut profiter de l'annonce de ses préférences autres que vraies.

La solution existe...

L'analyse mathématique tranche clairement. Une seule méthode choisit une affectation méritoire et évite dans toutes circonstances le paradoxe « mieux-classé, pire-placé » : la favorite des candidats, $\mu(C)$. Et si une méthode doit sélectionner une affectation méritoire qui écarte à coup sûr toute tricherie payante des candidats, alors seulement la même, $\mu(C)$, est capable de répondre.

L'analyse des conséquences possibles du choix d'une seule affectation méritoire a permis d'identifier ce qui devrait effectivement être optimisé. Mais après tout, n'est-il pas moral de prendre le point de vue des individus – les postulants – plutôt que celui des institutions – les universités ? Il serait ainsi possible d'afficher ce qui est optimisé, et pourquoi.

Il est évident que, dans les situations turque et française, il faudrait changer de procédure. Est-il possible de le faire en pratique ?

... mais comment l'appliquer en Turquie et en France ?

Remplacer $\mu(U)$ par $\mu(C)$ en Turquie serait facile : seul le choix de solution change, rien d'autre.

Bien sûr, il est actuellement impossible pour les étudiants turcs d'avoir les informations nécessaires afin de tricher

avec efficacité! Mais changer de méthode permettrait d'assurer à tout candidat qu'exprimer ses préférences franchement, sans ambages, est sa stratégie optimale. Aujourd'hui, les candidats agissent autrement – leurs stratégies sont fondées sur les oui-dire des années passées –, entraînant ainsi des effets non désirés (y compris un comportement d'autocensure néfaste).

Il semblerait que remplacer $\mu(U)$ serait aussi facile en France : il n'en est rien! De plus, la réalité est déconcertante : des facteurs autres que des mathématiques pures sont mêlés. Trop souvent, les préférences émises par les universités ne sont pas fondées sur les mérites des divers postulants, mais sont plutôt le résultat de discussions avec d'autres universités préparant leurs propres classements, et de négociations «confidentielles» avec des candidats – par exemple, du genre : «Si l'on vous classe premier, allez-vous nous classer premier?» Cela est évidemment très regrettable. Néanmoins, une fois les classements des universités soumis, les dés sont jetés : le problème mathématique est posé. Bien sûr, parmi les candidats, certains peuvent se sentir tenus d'obéir aux pressions des universités, mais pas tous : d'où l'invitation à la tricherie. La méthode importe.

Aussi ai-je essayé de faire état, dans une lettre adressée au Directeur de la Direction des personnels enseignants (DPE) du ministère il y a plus d'un an, des perversités de la procédure actuelle. Réponse de la DPE :

«J'ai l'impression que vous n'avez pas pris connaissance de l'intégralité de la procédure... La dernière opération est l'application d'un algorithme qui optimise la distribution des affectations selon les vœux des candidats tout en préservant les droits que leur confère leur rang de classement. Cette procédure a été voulue par le ministre et largement concertée à très haut niveau avec les partenaires, dont notamment le Conseil national des Universités...»

J'ai alors demandé «optimise quoi précisément?» (ajoutant, comme encouragement, «j'aurais pensé que l'objectif du ministère serait de trouver la meilleure procédure possible dans l'état des connaissances scientifiques actuelles»). Nouvelle réponse :

«... Cet algorithme est appliqué depuis 1992 sous le regard extrêmement attentif, vigilant et critique de la communauté universitaire et des 50 000 (environ) qualifiés, candidats poten-

tiels, dont de nombreux scientifiques. S'il était contestable ou s'il n'était pas optimal par rapport à l'objectif, cela se saurait, sans aucun doute...»

Dans un dernier échange, le Directeur lui-même m'a assuré par téléphone que la procédure n'était pas exclusivement de nature mathématique. Mais la promesse de m'envoyer les documents pertinents semble avoir été oubliée... *Sic transit gloria mundi*.

L'algorithme utilisé est contestable. Certes, tout est optimal par rapport à un objectif non dit, mais le calcul actuel donne une affectation qui n'est certainement pas optimale pour les candidats : au contraire, elle est la pire possible pour les candidats!

En fin de compte, si le ministère refuse tout changement, le remède n'est pas compliqué. Chaque candidat connaît ses classements individuels et, bien sûr, ses préférences, donc les candidats peuvent établir ensemble un fichier de toutes les informations pertinentes. Il suffit alors que quelques jeunes mathématiciens organisent la collecte des listes préférentielles des universités et des candidats, qu'ils calculent l'affectation méritoire favorite des candidats $\mu(C)$ et qu'ils disent à chaque candidat comment il doit exprimer ses préférences – le plus facile pour le candidat étant d'inscrire seulement l'université à laquelle il est affecté par $\mu(C)$. Un tel système hors-concours assurerait à chaque candidat son meilleur choix possible des affectations méritoires.

Une réforme de la procédure ministérielle ne serait-elle pas préférable à l'établissement d'un système hors-concours pour garantir aux postulants l'optimalité tant vantée de l'affectation?

Michel BALINSKI est chercheur au laboratoire d'économétrie de l'École polytechnique.

M. BALINSKI et G. RATIER, *Graphs and marriages*, in *American Mathematical Monthly*, vol. 105, pp. 430-445, 1998.

M. BALINSKI et T. SÖNMEZ, *A tale of two mechanisms : student placement*, in *Journal of Economic Theory*, vol. 84, pp. 73-93, 1999.

M. BAÏOU et M. BALINSKI, *Many-to-many matching : stable polyandrous polygamy (or polygamous polyandry)*, in *Discrete Applied Mathematics*, vol. 101, pp. 1-12, 2000.

M. BAÏOU et M. BALINSKI, *Fair university admissions*, Laboratoire d'économétrie, École polytechnique, janvier 2001.

Des livres à offrir ou à s'offrir



À contre-idées • Didier Nordon

Trouver du comique dans une idée sérieuse (et inversement), du local dans une idée générale (et inversement), de l'absurde dans une idée sensée (et inversement), de l'esprit littéraire au sein des sciences (et inversement). Au fil de ses billets d'humeur, Didier Nordon s'ingénie à bousculer les idées reçues et tout ce qui semble évident et... qui ne l'est pas. Un livre décapant, pour jouer avec les mots... et les idées.

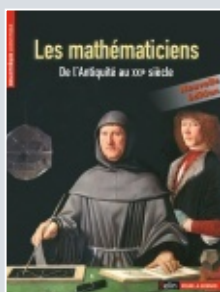
224 pages • 19 euros • 075110



Au nom de l'infini • Jean-Michel Kantor, Loren Graham

Peut-on parler de mathématiques, de religion, de politique dans un même ouvrage ? Oui, et c'est le défi qu'ont relevé le mathématicien Jean-Michel Kantor et l'historien des sciences Loren Graham, du MIT. Ce livre touchera même ceux que les mathématiques laissent indifférents, voire effraient. Les auteurs éclairent les liens étroits entre la vie – avec ses plaisirs et ses drames – et l'œuvre de ces hommes et ces femmes qui ont marqué le XX^e siècle par leur créativité en mathématiques.

288 pages • 24 euros • 075107



Les mathématiciens • Collectif

Autant artistes que scientifiques, les mathématiciens sont en proie à leurs passions, leurs interrogations, leurs doutes, leurs tourments, leurs angoisses, et la hantise de la beauté. « Nul ne peut être mathématicien s'il n'a une âme de poète », disait Sophie Kowalevskaja. Les mathématiciens doivent faire preuve de rigueur et de ténacité, mais surtout d'inventivité. Maudissant chaque jour leur impuissance à faire reculer les frontières du savoir, ils s'émerveillent pourtant, regardant derrière eux, de l'ampleur du chemin parcouru.

280 pages • 24 euros • 075109



La physique buissonnière • Jean-Michel Courty, Édouard Kierlik

La nature est pleine de surprises pour qui veut bien s'aventurer hors des sentiers battus. Passionnés de physique et curieux de sciences, les auteurs vous invitent à une promenade sur ces chemins de traverse. Avec eux, laissez-vous surprendre par un phénomène que vous avez déjà côtoyé sans même le remarquer. Suivez-les pour découvrir et comprendre cette physique du quotidien.

160 pages • 22 euros • 075105