

Du point de vue de la psychologie évolutionniste, ce résultat neurofonctionnel est à rapprocher du rôle classiquement imputé à l'émotion dans la survie, à savoir que la peur face à un danger conduit les animaux, dont l'homme, à fuir et à l'éviter. On peut dès lors avancer, en termes darwiniens, que l'évolution a dû façonner un cerveau qui ressent des émotions nécessaires pour inhiber les comportements inadaptés, y compris lorsqu'il s'agit de logique déductive. Contrairement à ce que pensait Piaget, le cerveau humain n'est pas, à l'image d'un ordinateur, un calculateur froid et logique.

Les résultats de cette seconde expérience d'imagerie cérébrale, associés à ceux de l'équipe d'A. Damasio, indiquent que l'émotion peut aider le raisonnement. L'un des rôles essentiels de l'hémisphère droit, fortement impliqué ici, résiderait dans le «traitement spatial des émotions», c'est-à-dire dans une sensibilité aux relations entre les émotions qui détermine le comportement approprié à une situation particulière.

De l'imagerie cérébrale à la pédagogie

Soulignons que ces résultats ne sont que les tout premiers sur les bases cérébrales de la correction d'erreurs et du changement de stratégie dans le raisonnement humain. Toutefois, ils apportent déjà quelques éléments de réponse aux trois questions clés débattues en psychologie cognitive du raisonnement : raisonnons-nous logiquement ? Pourquoi commettons-nous des erreurs de raisonnement ? L'émotion peut-elle aider le raisonnement ? À propos des deux premières questions, nous avons

constaté que, dans certains cas, le cerveau fonctionne spontanément à l'économie, en recrutant par exemple un réseau neuronal fortement ancré dans la perception, ce qui démontre la matérialité des biais de raisonnement. L'imagerie cérébrale a ici permis de comprendre comment le cerveau humain, si sophistiqué soit-il, peut commettre des erreurs de logique. Nos résultats ont également conduit à découvrir la plasticité du cerveau, en l'occurrence sa capacité à inhiber un biais de raisonnement pour accéder à la logique déductive : pour que nous raisonnions correctement, des stratégies d'inhibition du fonctionnement «spontané» du cerveau doivent se mettre en place. Il s'agit de la démonstration neuronale de la flexibilité intellectuelle. Quant à la dernière question, celle du rôle de l'émotion, on y répond en montrant que certaines régions cérébrales dédiées aux émotions et au sentiment de soi participent à l'inhibition d'un biais de raisonnement, ce qui permet d'accéder à la logique.

Comme l'a récemment souligné Mark Johnson, de l'Université de Londres, les nouvelles données d'imagerie cérébrale fonctionnelle sur l'apprentissage chez l'adulte nous apportent des indications intéressantes sur les mécanismes qui sont sans doute à l'œuvre dans le développement neurocognitif de l'enfant. De ce point de vue, les résultats exposés ici nous conduisent à tenir compte, en psychologie de l'enfant et en pédagogie, de deux mécanismes sous-estimés par la théorie de Piaget : l'inhibition des stratégies compétitives et l'émotion, indispensables au cerveau pour qu'il corrige ses erreurs de raisonnement.

Olivier HOUDÉ, professeur de psychologie cognitive à l'Université Paris-5 (Sorbonne) et à l'Institut universitaire de France (IUF), est responsable de l'équipe Développement et fonctionnement cognitifs dans le Groupe d'imagerie neurofonctionnelle, UMR 6095, CNRS-CEA, Universités de Caen et Paris-5, dirigé par Bernard MAZOYER, et où travaillent également Sylvain MOUTIER, Laure ZAGO et Nathalie TZOURIO-MAZOYER.

Antonio DAMASIO, *L'erreur de Descartes*, Éditions Odile Jacob, 1995.

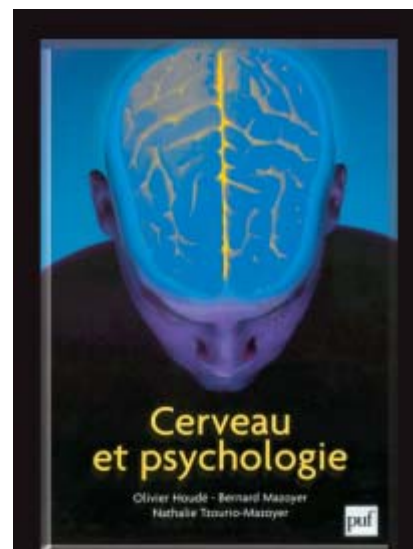
Antonio DAMASIO, *Le sentiment même de soi : Corps, émotions, conscience*, Éditions Odile Jacob, 1999.

Olivier HOUDÉ, *Inhibition and cognitive development : Object, number, categorization, and reasoning*, in *Cognitive Development*, vol. 15, pp. 63-73, 2000.

Olivier HOUDÉ et al., *Shifting from the perceptual brain to the logical brain*, in *Journal of Cognitive Neuroscience*, vol. 12, pp. 721-728, 2000.

Olivier HOUDÉ et al., *Access to deductive logic depends on a right ventromedial prefrontal area devoted to emotion and feeling*, in *NeuroImage*, vol. 14, pp. 1486-1492, 2001.

Olivier HOUDÉ, Bernard MAZOYER et Nathalie TZOURIO-MAZOYER, *Cerveau et psychologie*, PUF, 2002.



614 pages - 28 €

"La première synthèse française des données d'imagerie cérébrale et de psychologie expérimentale.

Splendides images.

Un ouvrage qui a sa place dans la bibliothèque de tout homme cultivé.

Indispensable à lire et à méditer."

Jean-Pierre Changeux,
La Recherche

"Une brillante réussite. L'ouvrage est cohérent,

le style clair et précis, les références toujours pertinentes."

Michel Imbert,
Pour la science

"Tous ceux qui s'intéressent aux énigmes du cerveau apprécieront l'exhaustivité de l'ouvrage."

Kheira Betayeb,
Science et vie

"Un événement !"

Hervé Ponchelet,
Le Point

"Un livre très richement illustré. Une référence."

Impact Médecin

puf

La taxonomie des courbes

MARCEL BERGER

Des mathématiciens explorent la diversité des courbes à la recherche de caractéristiques de classement. Vladimir Arnold a enrichi leur tâche en identifiant une nouvelle spécificité des courbes : l'«étrangeté».



L'univers des courbes a été profondément restructuré : le mathématicien russe, Vladimir Arnold, a découvert des liens de parenté insoupçonnés entre les courbes qui en précisent le classement.

De quelles courbes s'agit-il ? De celles que l'on peut dessiner à la main sur une feuille sans s'arrêter et qui se referment sur elles-mêmes ; par exemple, un cercle, un huit, un trèfle à quatre feuilles..., en bref les courbes fermées planes sans «angle». Ainsi les rectangles, les polygones, ou toute figure possédant un angle sont exclus, car pour leur tracé il faut stopper le crayon aux points angulaires. Il existe bien entendu une infinité de telles courbes fermées que les mathématiciens cherchent à classer.

Comme les entomologistes trient les espèces animales, les mathématiciens ont commencé par explorer l'espace des courbes à la recherche de caractéristiques communes : le nombre de fois où la courbe se recoupe, le nombre de régions qui la composent..., mais ces renseignements se sont révélés insuffisants pour singulariser les courbes. Les mathématiciens ont tenté alors une autre approche : transformer géométriquement les courbes afin d'identifier celles qui recèlent une similarité. Ainsi est apparue la notion d'«invariant», une propriété de la courbe conservée lors des transformations autorisées. L'invariant sert à identifier ces courbes ; c'est en quelque sorte leur nom de famille.

À la fin du XX^e siècle, les invariants mis au jour ne suffisaient pas à pleinement distinguer l'ensemble des courbes

planes. À partir de 1994, V. Arnold a fait progresser la discipline en élaborant un nouvel invariant, «l'étrangeté». Grâce à lui, les courbes ont gagné une nouvelle identité ; elles portent désormais un nom et un prénom.

Les cercles et les autres

Imaginons un quincaillier d'un genre un peu particulier qui vendrait les courbes fermées planes précédemment définies. Ses clients seraient des publicitaires à la recherche de sigles ou des architectes en mal d'inspiration. Afin de satisfaire rapidement ses clients, le quincaillier range l'infinité de courbes qu'il a en stock en catégories de même forme, ou «classes». Selon lui, deux courbes ont la même forme si en déformant l'une, on retrouve l'autre. En mathématique, ces déformations relèvent de la topologie, la branche des mathématiques où l'on ne se soucie pas du détail des formes, comme par exemple leur longueur ou leur courbure, mais où l'on veut déterminer si les formes sont transformables les unes dans les autres.

Quelles déformations le quincaillier-mathématicien autorise-t-il ? Seulement certaines, sinon toutes les courbes seraient équivalentes. On pressent, par exemple, qu'un huit et un cercle sont deux courbes différentes. Deux courbes ne seront pas équivalentes quand on ne peut passer de l'une à l'autre que par une étape de déformation interdite – une courbe à angle ou à point de rebroussement (voir la figure 2). Cette interdiction

s'applique aussi aux courbes de départ ; en termes mathématiques, elles doivent avoir une dérivée non nulle par rapport aux deux variables du plan.

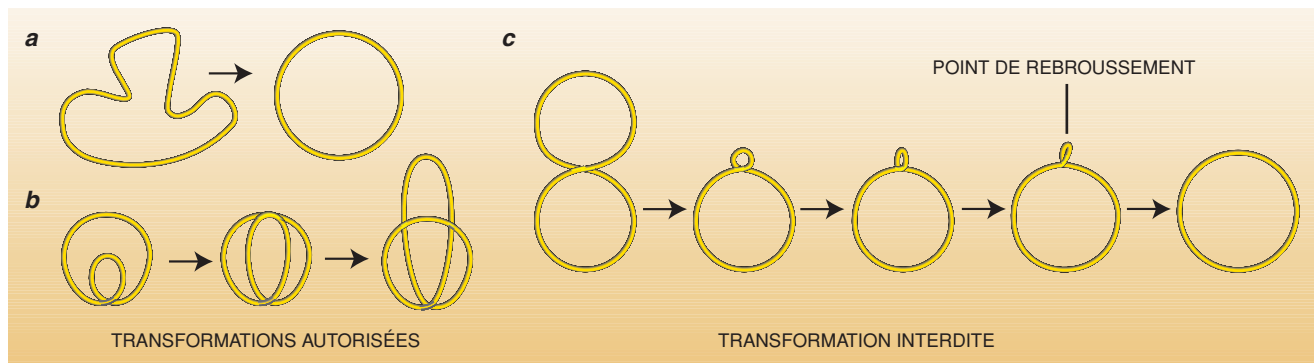
Par quelle catégorie de courbes le quincaillier commence-t-il ? Par celle dont nous avons le sentiment qu'elle est la plus simple : le cercle. L'ensemble des figures géométriques fermées qui ne se recoupent pas, tel le cercle, sont dites «simples». Camille Jordan, en 1900, en démontrant qu'«une courbe fermée simple possède un intérieur, qui est du point de vue de la forme, le même que celui d'un cercle, à savoir un disque», a mis un point final à leur étude. Ce qui est vrai pour l'intérieur des courbes l'est aussi de leur pourtour : si la surface intérieure est de la même forme qu'un disque, la courbe est de même forme que le cercle. Conclusion : il n'existe qu'une seule forme possible pour les courbes simples, celle du cercle.

Attaquons maintenant le cas général des courbes qui se croisent. Nous ramènerons le problème à des courbes particulières, que nous dénommerons «stables». Cette notion est fortement suggérée par un résultat dû au mathématicien américain Hassler Whitney en 1937 : toute «petite» déformation (aussi petite que l'on veut) déforme

1. AFIN DE CLASSER l'ensemble infini des courbes planes, les mathématiciens ont élaboré, à partir des caractéristiques des courbes, des «invariants», des nombres qui se conservent lorsqu'on transforme une courbe en une autre. Toutes les courbes qui ont les mêmes invariants se rangent dans la même catégorie, le même tiroir.



Delphine Bailly



2. LES TRANSFORMATIONS que l'on autorise pour déformer les courbes sont celles qui ne mènent ni à un angle ni à un point de rebroussement. En procédant ainsi, on permet à n'importe quelle courbe «simple»

– sans intersection – de se transformer en cercle (a), et à une boucle de traverser les branches de la courbe mère (b). En revanche, on interdit à une boucle de disparaître (c).

n'importe quelle courbe fermée en une courbe n'ayant que des points doubles simples, c'est-à-dire des points où ne passent que deux branches de la courbe, et où ces branches ne sont pas tangentes. Prenons l'exemple d'une courbe qui se coupe trois fois en certains points. Nous les nommerons points triples :



Quand nous écartons légèrement une branche, le point triple devient trois points doubles :



De même, un point double autotangent (où les deux branches sont tangentes) :



se transforme en deux points doubles simples :



ou en deux parties de courbe sans intersection :



Grâce à Whitney, toutes les courbes, aussi compliquées soient-elles du point de vue des intersections, se ramènent à des courbes n'ayant que des points doubles simples, les courbes stables. La dénomination «stable» est justifiée : après une petite déformation, une courbe stable demeure stable (ses points doubles simples ne se transforment pas en points triples, autotangents, ou autres), tandis qu'une courbe non stable devient nécessairement stable (elle perd ses intersections complexes). Remarquons que ce théorème de Whitney entraîne une propriété intéressante d'un point de vue probabiliste : si nous tra-

çons de façon aléatoire des courbes fermées sans angle, nous avons 100 pour cent de chances qu'elle soit stable, puisque les courbes non stables forment un ensemble de probabilité nulle.

Le territoire des courbes étant ainsi défriché, tentons de trouver des caractéristiques communes aux courbes stables. Deux caractéristiques des courbes stables sautent aux yeux : le nombre N de points doubles et le nombre de régions en lesquelles la courbe partage le plan. En fait, ces deux caractéristiques ne sont pas indépendantes : le nombre de régions est égal au nombre de points doubles additionné de deux.

Le compte-tours

Cependant, regardons les deux courbes de la figure 3. Elles ont deux points doubles et pourtant elles n'appartiennent pas à la même classe, comme nous le verrons rigoureusement par la suite. Le nombre de points doubles se révèle donc insuffisant pour distinguer certaines courbes.

Pour continuer la classification des courbes, les mathématiciens ont cherché des traits conservés durant les transformations, des «invariants». Les invariants sont essentiels dans tous les problèmes de classification, quelle que soit la discipline scientifique. Le nombre de points doubles n'en est pas un, puisque, par certaines transformations, nous pouvons ajouter des boucles (voir la figure 2). Le premier invariant que les mathématiciens ont trouvé est le nombre de rotation (ou d'enroulement) ; il est noté R et est égal, si nous ne demandons pas trop de rigueur, au nombre de fois dont la tangente à la courbe tourne le long du tracé. Puisque la courbe est fermée, en divisant ce nombre R par 2π , nous obtenons un nombre entier, plus agréable à manipuler ; il est tou-

jours pris positif (au besoin, on change le sens de parcours de la courbe). Pour le cercle, il est égal à 1 puisque la tangente tourne de 2π . Il en est de même pour la courbe tortueuse de la figure 4.

En fait, le théorème «de la tangente qui tourne» affirme que ce nombre de rotation est égal à 1 pour toutes les courbes simples (les courbes sans point double) : dans des courbes simples, mais sinueuses, la tangente paraît tourner plus, toutefois il y a finalement compensation quand elle «revient en arrière» (voir la figure 4). Une conséquence amusante est le «théorème du boulevard périphérique» : quelles que soient les contorsions du boulevard périphérique, la longueur de la voie extérieure n'excède celle de la voie intérieure que du produit de l'espacement entre les deux files par 2π . Si vous avez à parcourir la moitié du périphérique, inutile de prendre la voie intérieure pensant gagner du temps, vous ne gagneriez qu'une dizaine de mètres !

Bien que d'apparence simple, le théorème de la tangente qui tourne n'a été démontré qu'au XX^e siècle, la première fois de façon complexe en 1916 par Watson. En 1935, dans la même revue mathématique, Alexander Ostrowski et Heinz Hopf en ont publié chacun une autre preuve. Ostrowski a procédé en approximant la courbe par des polygones, en démontrant le théorème pour ceux-ci, puis en passant à la limite. Hopf, lui, a construit une déformation entre les tangentes à la courbe et les points d'un cercle parcouru à vitesse constante. Des deux démonstrations, celle de Hopf est la plus conceptuelle, celle d'Ostrowski, la plus simple.

Il existe un moyen simple d'évaluer le nombre de rotations d'une courbe à partir du nombre de points doubles. Il faut pour cela donner un

sens de parcours à la courbe et distinguer les points doubles orientés ainsi :



les points doubles dits positifs, en nombre N^+ , et ceux-là :



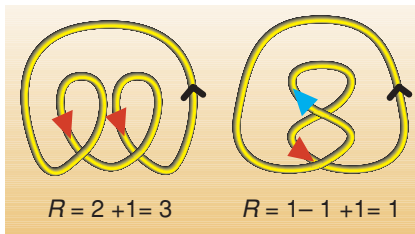
les points doubles négatifs, en nombre N^- . Comme ils correspondent tous deux à des boucles parcourues dans des sens différents, on sent bien que les contributions à R des points doubles positifs et négatifs se compensent. Whitney a démontré que le nombre de rotation de la courbe est égal à $N^+ - N^- + 1$ (l'ajout de 1 tient compte du fait que si la courbe n'a aucun point double, le nombre de rotation vaut déjà un). La figure 3 montre l'application de cette méthode à deux exemples.

Pourquoi le nombre de rotation est-il un invariant des transformations ? Puisque les déformations appliquées aux courbes sont continues, le nombre de rotation, s'il change, doit lui aussi évoluer continûment. Or c'est un nombre entier, donc condamné à varier par sauts. Il doit alors conserver sa valeur lors des déformations autorisées des courbes. Cela étant, pour être pertinent, le nombre de rotation ne doit pas être équivalent à l'autre nombre entier attaché aux courbes, le nombre de points doubles : deux courbes ayant le même nombre de points doubles doivent pouvoir posséder des nombres de rotation différents. C'est bien le cas des deux courbes de la figure 3.

Le quincaillier a maintenant classé ses courbes dans des piles en fonction du nombre de points doubles et du nombre de rotation (voir la figure 5). La pile des courbes à nombre de rotation nul et à un point double, par exemple, contient un seul exemplaire, le huit ; celle à deux points doubles et à nombre de rotation égal à 1, en contient trois :



Remarquons que si le quincaillier rangeait ces courbes dans des tiroirs étiquetés avec tous les couples (R, N) possibles, certains tiroirs resteraient vides, car pour une même courbe, R et N ne sont pas indépendants. Puisque $R = N^+ - N^- + 1$ et que N est la somme des points doubles positifs et négatifs, R ne dépasse jamais $1 + N$. Il est par exemple inutile d'essayer de tracer une courbe dont le nombre R est égal à quatre n'ayant que deux points doubles.

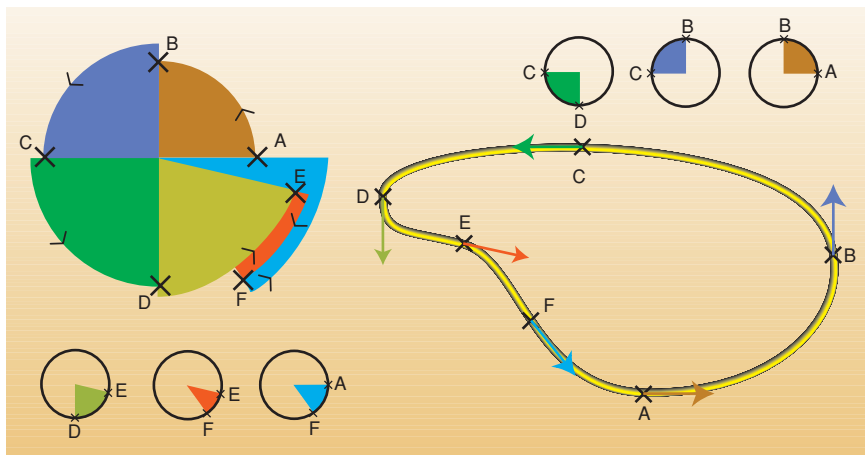


3. LE NOMBRE DE ROTATION se calcule à partir des nombres de points doubles positifs, N^+ (en rouge) et négatifs, N^- (en bleu) : $R = N^+ - N^- + 1$. Présentant deux points doubles, ces courbes au nombre de rotation différent n'appartiennent donc pas à la même classe.

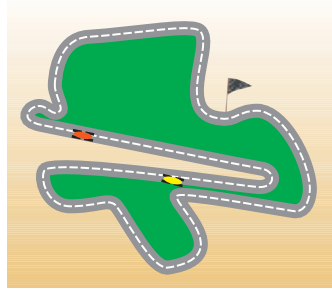
Le quincaillier reste perplexe : certaines piles sont trop importantes, et de toute façon, il préférerait que chacune des piles ne contienne qu'une seule courbe, c'est-à-dire que l'ensemble des caractéristiques qui définissent la pile déterminent sans ambiguïté une seule courbe. Les vis que je vends, se dit le quincaillier, sont classées selon leur diamètre, leur longueur et le type de leur tête (un écrou ou une tête lisse) : j'aimerais qu'il en soit de même avec les courbes. Les deux courbes :



ont le même nombre de rotation – trois –, et le même nombre de points doubles – deux –, mais n'ont pas la même forme (encore une fois, on ne peut les transformer l'une dans l'autre avec les règles permises). Un moyen de les distinguer existe certainement.



4. LE NOMBRE DE ROTATION D'UNE COURBE SIMPLE vaut 1. Dans cet exemple, l'angle que fait la tangente à la courbe par rapport à l'horizontale augmente continûment entre les points A à E (la variation de l'angle entre chaque point est indiqué dans les cercles). Il diminue ensuite jusqu'au point F, à partir duquel il augmente à nouveau. La somme des variations de l'angle sur toutes les sections de la courbe (en haut à gauche) montre qu'après un tour de la courbe la tangente a tourné exactement de 2π , ce qui signifie que le nombre R de rotation est 1. Ce résultat est valable pour toutes les courbes simples, même si celles-ci sont très sinueuses, comme ici le circuit de formule 1 de Sepang en Malaisie (en bas à droite).



L'étrangeté

V. Arnold, des Universités de Paris-Dauphine et de Moscou, qui réfléchissait à des débouchés de la théorie des nœuds sur les mathématiques des courbes planes (voir la figure 7), a conçu un tel troisième invariant en 1994. Initialement obtenu par un savant calcul, la signification géométrique de ce nombre s'est révélé simple dans le cas de certaines courbes dites minimales. Les courbes minimales sont celles qui, pour un nombre de rotation donné, ont le moins de points doubles possibles. Par exemple, parmi les courbes à nombre de rotation égal à deux, il n'y a qu'une courbe minimale,



toutes les autres ont plus d'un point double. Pour se représenter géométriquement l'étrangeté chez cette famille de courbes, V. Arnold s'est inspiré des diagrammes du prince des mathématiciens, Carl Friedrich Gauss, au XIX^e siècle. Gauss avait imaginé ces diagrammes pour étudier les nœuds. Les courbes y sont représentées par des cercles : on parcourt le cercle en même temps que la courbe, et dès qu'on parvient à un point double, on marque un point sur le cercle, de sorte que chaque point double donne deux points sur le cercle ; on relie ensuite ces deux points par un segment. Le résultat obtenu est

R \ N	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					

5. ENSEMBLE DES COURBES qui possèdent de zéro à trois points doubles (N) et dont le nombre de rotation (R) est compris entre zéro et quatre. On voit que le nombre de courbes à N donné augmente rapidement avec N . Il a été démontré qu'il croît exponentiellement avec N .

un cercle traversé de cordes. Le diagramme de Gauss de la courbe précédente est ainsi :



V. Arnold (voir la figure 6) a transformé ces cercles en arbres de points où

chaque point correspond à une région intérieure au cercle comprise entre deux cordes. Par exemple, le diagramme précédent donne l'arbre :



Arnold a découvert sur cet arbre un

point qui joue un rôle particulier, qu'il a nommé la racine de l'arbre. On a l'habitude de marquer ce point en noir et de noter l'arbre de la courbe avec la racine en bas :

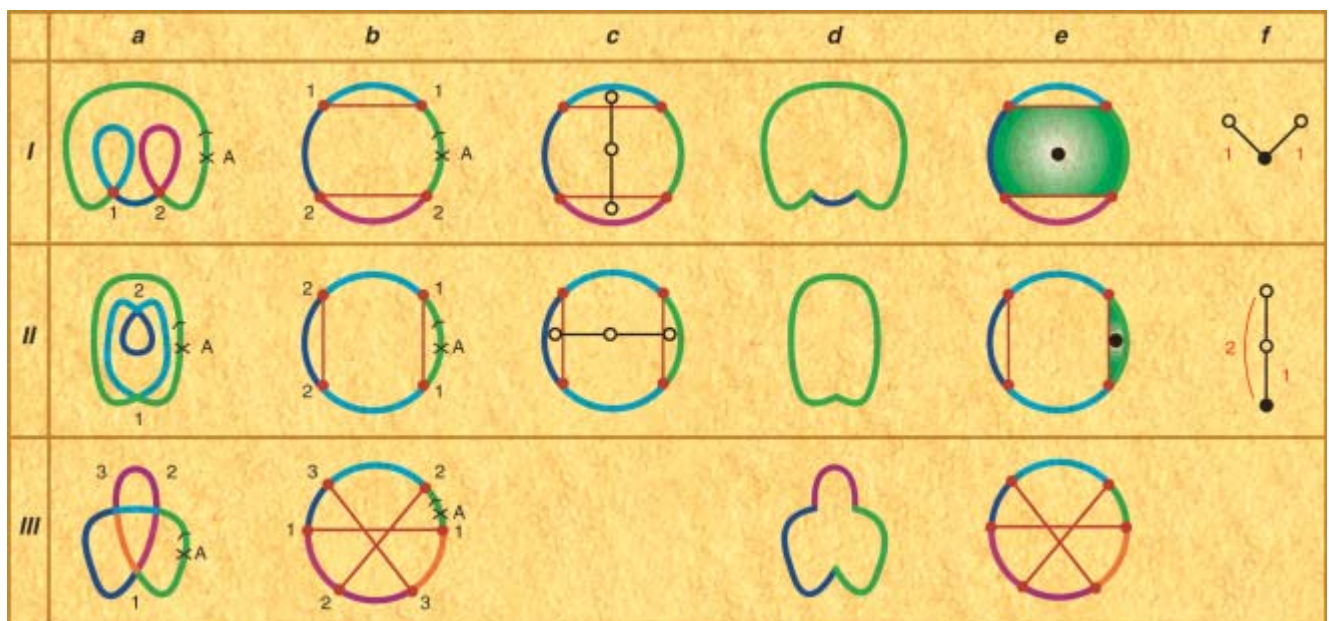


L'étrangeté se calcule ensuite comme la somme des distances (nombre de points à passer) séparant chacun des points de l'arbre à la racine.

La construction donnant l'étrangeté est détaillée sur la figure 6. Quand les branches des arbres n'ont qu'un seul point, comme dans le cas précédent, l'étrangeté est égale au nombre total de points, donc au nombre de points doubles N de la courbe. Quand l'arbre n'a pas d'embranchement, comme :



elle vaut $1 + 2 + 3 + \dots + N = N(N+1)/2$. L'étrangeté permet de distinguer les deux courbes que ni le nombre de points doubles ni le nombre de rotation ne suffisaient à différencier. Elle vaut deux pour la courbe (voir la figure 6) :



6. L'ARBRE D'UNE COURBE est établi en plusieurs étapes à partir d'une version découpée de la courbe en sections (a) indiquées par des couleurs différentes. Chaque section est une portion de la courbe comprise entre deux intersections. Ces sections sont ensuite mises bout à bout sur un cercle qui représente une version « dépliée » de la courbe. Puis on joint par des cordes les points du cercle qui correspondent aux mêmes intersections (b). Les cordes délimitent des régions de l'intérieur du cercle (les petits cercles de la figure c) que l'on relie ensemble quand elles sont adjacentes. Ces points reliés constituent l'« arbre » de

la courbe, dont l'un d'eux joue le rôle de racine. La racine est le point qui appartient à la région bordée par les cordes correspondant au pourtour extérieur de la courbe (d). Cette région est indiquée en vert (e). Perché sur sa racine, l'arbre devient la figure f et l'étrangeté est égale à 2 (somme des distances des points à la racine : $1 + 1$). Un autre exemple de ces opérations est représenté sur la ligne II, pour une courbe d'étrangeté 3 ($1 + 2$). Dans le cas d'une courbe non minimale (III) cette construction ne permet pas de trouver une racine de l'arbre et l'étrangeté n'a pas d'interprétation aussi simple.

7. Les courbes : le nœud de l'affaire

V. Arnold est parvenu à ses résultats sur les courbes par le biais de la théorie des nœuds. Les nœuds sont le pendant à trois dimensions des courbes : des cordes repliées sur elles-mêmes et qui sont nouées par endroits. V. Arnold pensait trouver dans la théorie des nœuds – où l'on cherche aussi à classer les nœuds en catégories – une source d'inspiration pour trouver de nouveaux invariants des courbes. Le lien théorique qu'il voulait établir entre ces deux types d'objets mathématiques provient d'une méthode précédemment découverte consistant à construire un nœud à partir d'une courbe plane. La méthode est peu intuitive : si l'on se contentait de «déplier» à trois dimensions la courbe plane, on obtiendrait une courbe non nouée. Cette méthode consiste à placer sur la troisième direction de l'espace (en plus des deux de la courbe), un axe gradué en degrés. Ensuite, on déplace la courbe le long de cet axe, et l'on marque les points de la courbe dont la tangente par rapport à l'horizontale est égale à la valeur de l'axe où l'on se trouve.

Prenons l'exemple présenté ci-dessous du cercle. Partons du point A, situé en bas du cercle. Puisque la tangente y est nulle, nous plaçons la courbe à la valeur 0° sur l'axe des tangentes et marquons d'un point rouge le point A. C'est le premier point du nœud. Ensuite, parcourons le cercle dans le sens trigonométrique : la tangente s'incline, si bien que nous devons avancer en même temps la courbe le long de l'axe des tangentes. Nous traçons ainsi les points rouges situés à droite de A sur la figure. Quand nous sommes au point B du cercle, la tangente est verticale, puis au point C, elle vaut 180° . Comme une tangente n'est pas

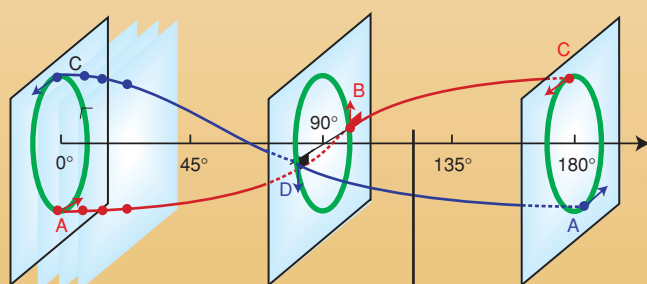
une droite orientée, 180° et 0° sont équivalents. Nous repartons donc à 0° pour recommencer l'opération le long de l'axe et continuer le tracé du nœud (*courbe bleue*). Ce dessin de la partie bleue nous fait revenir au point A. Pour obtenir le nœud, il nous reste à refermer l'axe des angles sur lui-même afin de superposer 0° et 180° : les différentes parties de la courbe se rejoignent et forment un nœud continu. En suivant ce procédé, un cercle donne une corde à deux boucles.

Le second exemple de nœud, dessiné à partir d'une courbe à un point double, a été tracé avec l'axe des angles déjà replié sur lui-même. Comme pour le cercle, les points A, B et C sont les points de la courbe dont la tangente est respectivement inclinée de 0° , 90° et 180° .

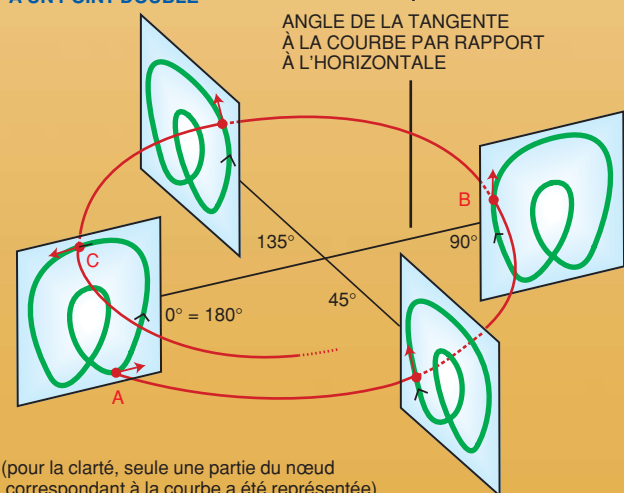
Nous pouvons préciser le volume de l'espace dans lequel les nœuds ainsi conçus se retrouvent. Puisqu'en définitive nous avons fait évoluer la courbe le long d'un cercle, le nœud est contenu dans l'enveloppe de la courbe (son pourtour) «multipliée» par le cercle, ce qui donne un volume délimité par un tore. L'analogie entre courbes et nœuds est telle que pour dénouer le nœud, il nous faut rester à l'intérieur de ce tore. Ainsi, bien que les deux nœuds de la figure soient dénouables dans l'espace tout entier, ils sont indénuables à l'intérieur du tore.

Ce lien entre courbes et nœuds ne fut pas aussi fructueux que V. Arnold l'escomptait, aussi dût-il explorer des voies inédites. Selon lui, malgré les apparences, l'univers des courbes planes est plus complexe que celui des nœuds dans l'espace.

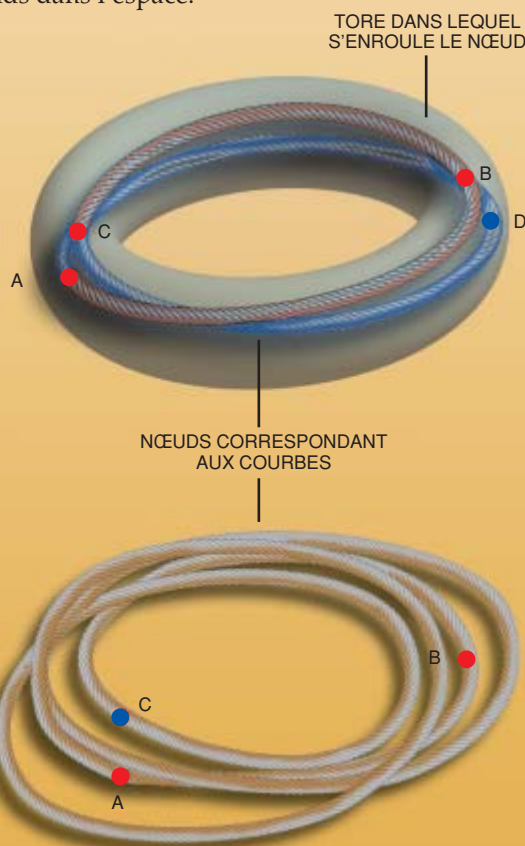
CAS DU CERCLE



CAS D'UNE COURBE À UN POINT DOUBLE



(pour la clarté, seule une partie du nœud correspondant à la courbe a été représentée)



$R = 1$															
	St	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	4
	J^+	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-8
	J^-	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-9	-6	-6	-6	-6	-6	-12
	St	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3
	J^+	2	2	2	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	-4	-4	-6
	J^-	-2	-2	-2	-4	-4	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-8	-8	-10
	St	0	0	0	0	1	1	1	St	-2	1	1	1	2	2
	J^+	2	2	2	2	0	0	0	J^+	4	-2	-2	-2	-4	-4
	J^-	-2	-2	-2	-2	-4	-4	-4	J^-	0	-6	-6	-6	-8	-8
$R = 3$															
	St	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	6
	J^+	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-12
	J^-	-8	-8	-8	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-16
	St	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5
	J^+	-2	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-8	-8	-8	-10	-10	-10	-10
	J^-	-6	-8	-8	-8	-10	-10	-10	-12	-12	-12	-14	-14	-14	-14
	St	2	3	3	St	0	3	4	4	St	2	2	2	2	2
	J^+	-2	-4	-4	J^+	0	-6	-8	-8	J^+	-4	-4	-4	-4	-4
	J^-	-6	-8	-8	J^-	-4	-10	-12	-12	J^-	-8	-8	-8	-8	-8
$R = 5$															
	St	6	7	10	St	5	6	8	9	St	4	7	7	7	7
	J^+	-12	-14	-20	J^+	-10	-12	-16	-18	J^+	-8	-14	-14	-14	-14
	J^-	-16	-18	-24	J^-	-14	-16	-20	-22	J^-	-12	-18	-18	-18	-18

8. ENSEMBLE DES COURBES à quatre points doubles. On a indiqué leur nombre de rotation R , leur diagramme de Gauss (en mar-
ron), leur étrangeté St , et leurs deux autres
invariants J^+ et J^- . Pour toutes les courbes,
 $J^+ - J^- = N$. Pour les courbes minimales, on a
de surcroît $J^+ = -2 St$.

et trois pour la courbe :



Nous savons que cette construction ne concerne que les courbes minimales. Le diagramme de Gauss d'une courbe non minimale existe, mais on ne peut lui associer un arbre.

Le sens de l'étrangeté

La définition de l'étrangeté est relativement simple, mais en est-il autant de sa signification? Celle des deux premiers invariants était claire : le nombre de points doubles correspond à peu près au nombre de boucles de la courbe, tandis que le nombre de rotation exprime combien de fois on tourne sur soi-même en suivant la courbe. Quel sens attribuer à l'étrangeté? Rappelons que Whitney avait montré que deux courbes ayant même nombre de rotation se déduisent l'une de l'autre par une déformation où, à chaque instant de la déformation, la courbe n'a ni angle ni point de rebroussement. Cependant, dans le cas où les courbes n'ont pas la même forme, on rencontrera nécessairement des courbes intermédiaires ayant au moins l'une des intersections atypiques suivantes : des points triples, des points quadruples... des points doubles d'autotangence, des points triples d'auto tangence... Par exemple, pour faire disparaître une boucle, on passe nécessairement par une figure qui comporte un point d'autotangence (voir la figure 2b).

En fait, Whitney a démontré que l'on peut choisir la déformation de façon à ne rencontrer que des courbes ayant comme singularités au plus des points triples et des points d'autotangence, courbes nommées sous-stables. Par exemple, pour passer la boucle rouge de la courbe suivante :



par-dessus la première boucle, nul besoin de faire coïncider les deux points doubles en un point quadruple : on a toujours la possibilité de passer un seul brin de courbe à la fois par-dessus un point double (auquel cas le point

double se transforme en point triple) :



V. Arnold a montré que lorsqu'une courbe se déforme en une autre, le nombre minimum de points triples par lesquels elle passe est égal à la différence des étrangetés des deux courbes (en valeur absolue).

Deux autres invariants définis par V. Arnold ont une signification dans le contexte des transformations. Il s'agit de deux nombres, J^+ et J^- , qui se calculent à partir du nombre de points doubles positifs et négatifs, et du nombre de rotation de sous-parties de la courbe. La moitié de la différence des J^+ de deux courbes donne le nombre minimum de points d'autotangence positive :



par lesquels on doit passer pour transformer l'une dans l'autre. La moitié de la différence des J^- procure, elle, le nombre minimum de points d'autotangence négative :



Ces relations sont vraies pour toutes les courbes (qu'elles soient minimales ou non), mais dans le cas des courbes minimales, V. Arnold a mis en évidence que l'information contenue dans J^+ et J^- est redondante avec l'étrangeté. J^+ est alors simplement l'opposé de deux fois l'étrangeté.

Références incomplètes

Ni l'étrangeté ni J^+ ni J^- ne suffisent à classer complètement les courbes. Ces caractéristiques sont identiques pour les courbes :



Ces courbes possèdent quatre points doubles, représentent chacune trois tours de rotation, et leur étrangeté vaut quatre (voir la figure 8), mais la

forme de ces figures diffère. L'étrangeté est de moins en moins suffisante à mesure que le nombre N croît : tandis que le nombre de classes de courbes croît exponentiellement avec N (voir la figure 5), l'étrangeté, elle, ne varie que de N à $N(N+1)/2$.

Pour le quincaillier, les informations concernant les vis – leur taille, leur diamètre et le type de leur tête – suffisaient à les ranger. Pour les mathématiciens, la situation idéale, quand on peut y arriver, est semblable à celle du quincaillier : l'ensemble d'invariants est alors «caractéristique», c'est-à-dire que la connaissance de la totalité de ces invariants fournit exactement la classe désirée, ici la forme de la courbe (dans la limite où le nombre de courbes n'est pas infini, sinon le problème serait intraitable). Trouvera-t-on d'autres invariants qui compléteront ceux de Whitney et de V. Arnold?

Le lecteur pourra légitimement demander pourquoi aucun travail important n'est paru sur les courbes planes entre Whitney et V. Arnold. Risquons quelques opinions personnelles. Comme l'a dit Mikhael Gromov, les mathématiciens s'intéressent à un problème par curiosité, par intérêt personnel, et enfin, par effet de mode. Parmi ces problèmes, seul l'avenir dit quels sont ceux qui font progresser les structures essentielles des mathématiques. Pour les courbes, l'effet de mode était inexistant, et il semblait difficile de faire une œuvre vraiment nouvelle en travaillant sur les courbes planes. Autre raison : il fallait une idée nouvelle pour progresser après Whitney, qui ne pouvait peut-être germer que dans un environnement mathématique mûr pour ce problème. Enfin la curiosité était notable pour V. Arnold : V. Arnold s'est toujours intéressé aux mathématiques «visibles» – ce qui ne veut pas dire qu'il ne sait pas manier les concepts les plus abstraits quand ils lui sont utiles.

Marcel BERGER est mathématicien. Il a dirigé l'IHES, l'Institut des hautes études scientifiques.

H. WHITNEY, *On regular closed curves in the plane*, in *Compositio math.*, 4: 276-284, 1937.

M. BERGER et B. GOSTIAUX, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Puf, 1987.

V. ARNOLD, *Vassiliev theory of discriminants and knots*, First european congress of math., Paris, 1992.

V. ARNOLD, *Topological invariants of plane curves and caustics*, American mathematical society, 1994.

La science des noeuds, Belin – PLS, 2002.

M. BERGER, *La géométrie vivante ou l'échelle de Jacob*, Cassini, à paraître.

Les mammifères à



1. CET ANCÊTRE DE LA BALEINE, *Rodhocetus* (au premier plan à gauche et à droite), qui vivait il y a environ 48 millions d'années, quelque part dans ce qui est aujourd'hui le Pakistan, se nourrissait de poissons, tandis qu'*Ambulocetus* mangeait de petits mammifères terrestres (à l'arrière plan).

la conquête des mers

KATE WONG

L'étude de nouveaux fossiles et des analyses d'ADN ont éclairé l'origine des baleines : elles descendent des mammifères terrestres, probablement de l'ancêtre de l'hippopotame.



Un jeune *Eotitanops*, qui ressemble à un tapir, s'approche de l'eau pour s'abreuver. Embusquée dans la mangrove, une bête observe la scène et salive : l'*Eotitanops* est un mets de choix. Propulsée par ses puissants membres postérieurs, elle se jette sur l'animal, enfonce ses crocs dans sa proie, puis la traîne dans l'eau. Combat inégal. Victorieuse, la bête regagne la rive pour y dévorer son festin. À première vue, ce prédateur ressemble à un crocodile : les mêmes pattes recroquevillées, la queue puissante, un long museau et des yeux vissés sur le haut du crâne. Pourtant, de plus près, sa peau n'est pas faite de cuir épais, mais recouverte de fourrure ; il n'a pas de griffes, mais des doigts, et ses dents à plusieurs pointes en font un mammifère et non un reptile. Cette créature – *Ambulocetus* – est une baleine primitive, l'un des chaînons qui relient les ancêtres des cétacés aux quelque 80 espèces de baleines, de dauphins et autres marsouins qui peuplent aujourd'hui les océans.

Les biologistes de l'évolution ont longtemps considéré l'apparition des baleines comme une énigme. Les cétacés actuels sont dépourvus de membres et incapables de vivre hors de l'eau : quels liens peuvent-ils avoir avec les mammifères ? En 1851, Herman Melville a même assimilé Moby Dick et ses congénères à des poissons ! Pourtant, les naturalistes du XIX^e siècle, et, avec eux, Charles Darwin, considéraient ces animaux au sang chaud qui allaitent leurs petits et respirent de l'air, comme des mammifères. Or, les ancêtres des mammifères étaient terrestres, de sorte que ceux des baleines devaient l'être également.

Dans son ouvrage *De l'origine des espèces*, Darwin notait qu'un ours nageant le museau hors de l'eau pour attraper des insectes aurait pu être une « idée évolutive » précédant l'apparition des baleines. La suggestion ne suscita que railleries, au point que Darwin supprima le passage dans les éditions ultérieures en se contentant de noter qu'un ours était « presque comme » une baleine.

Dans les décennies qui suivirent, ni l'étude des fossiles disponibles – incomplets ou trop tardifs – ni celle de l'anatomie des cétacés contemporains ne renseignèrent les biologistes sur l'origine des baleines. Ainsi, en 1945, dans sa classification des mammifères, le paléontologue George Simpson écrivait que la baleine a évolué dans l'océan il y a si longtemps qu'aucune trace de ses ancêtres n'a été conservée. Toutefois, durant ces 20 dernières années, des progrès considérables ont été réalisés et l'énigme est aujourd'hui partiellement résolue. Après avoir analysé des fossiles de baleines datant de l'Éocène (entre -55 et -34 millions d'années), les paléontologues pensent que les ancêtres terrestres des cétacés auraient gagné la mer durant cette période. Ils ont également découvert que les baleines à fanons ont certainement divergé des cétacés à dents durant la période suivante, l'Oligocène, et ont déduit des données fossiles et de l'étude de l'ADN des cétacés vivants, où, quand et comment les cétacés ont évolué à partir de leurs ancêtres terrestres.

Le premier indice sur l'origine des baleines fut acquis grâce à une méthode mise au point vers 1945. Alors que Simpson classait les mammifères contemporains sur des critères purement anatomiques, la nouvelle méthode consistait à comparer des animaux vivants d'après les anticorps qu'ils produisaient

en réaction à certains antigènes. Alan Boyden et ses collègues de l'Université de Rutgers appliquèrent cette technique aux mammifères, et montrèrent que les cétacés sont proches (par leurs anticorps) des mammifères à nombre pair d'orteils, ou artiodactyles, un groupe auxquels appartiennent les chameaux, les hippopotames, les cochons et les ruminants. Les baleines étaient-elles elles-mêmes des artiodactyles ? Formaient-elles une branche évolutive distincte ayant un ancêtre commun avec les artiodactyles ?

Dans les années 1960, une étude des mammifères primitifs à sabots, les condylarthes, n'ayant pas encore acquis certaines caractéristiques des artiodactyles ou d'autres ordres de mammifères fit pencher la balance en faveur de la seconde hypothèse. Leigh Van Valen, alors au Muséum d'histoire naturelle de New York, découvrit des ressemblances étonnantes entre les dents à trois pointes des quelques fossiles de baleines et celles d'un sous-groupe de condylarthes carnivore, les mésonychidés. Il trouva également des analogies entre les artiodactyles et un autre groupe de condylarthes, les arctocyonidés, proches des mésonychidés. L. Van Valen en conclut que les baleines descendent des mésonychidés et qu'elles sont liées aux artiodactyles par leur ancêtre commun, les condylarthes.

Les baleines marcheuses

Une décennie s'écoula avant qu'on ne découvre de nouveaux fossiles de baleines suffisamment proches du point de divergence, pour que l'on puisse tester l'hypothèse de L. Van Valen. En 1977, le paléontologue Philip Gingerich, de l'Université du Michigan, recherchait au Pakistan des traces de mammifères terrestres de l'Éocène dans une région où l'on en avait déjà découvertes. L'expédition était décevante : la zone ne contenait que des fossiles marins. Il n'est pas étonnant de trouver des fossiles marins au Pakistan, si loin des côtes actuelles, car, durant l'Éocène, une vaste mer, la Téthys, recouvrait régulièrement ce qui est aujourd'hui le sous-continent indien. Toutefois, parmi ces anciens poissons et des coquillages, l'équipe de paléontologues découvrit deux fragments de bassin qui semblaient provenir d'un grand animal capable de marcher. Ph. Gingerich et ses collègues s'amuserent à imaginer une « baleine marcheuse », mais sans y croire tant l'idée leur paraissait saugrenue. Ils rentrèrent dans leur laboratoire, persuadés que la plus belle pièce ramenée était une mâchoire d'artiodactyle primitif, trouvée sur un autre site.

Deux ans plus tard, dans le Nord du Pakistan, aux pieds de l'Himalaya, l'équipe de Ph. Gingerich mit au jour, parmi des restes de mammifères vieux de 50 millions d'années, un autre fossile de baleine : un fragment de crâne d'une créature de la taille d'un loup pourvu de quelques caractéristiques des cétacés (notamment en ce qui concerne l'anatomie

