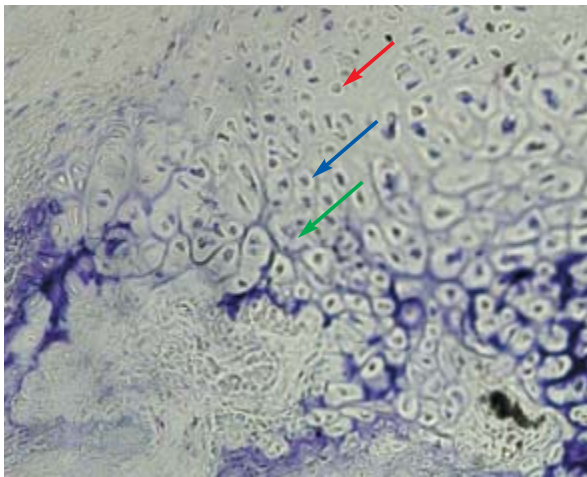




7. LA NACRE (ici implantée sous forme micronisée dans un tissu conjonctif de lapin afin de consolider l'axe vertébral) entraîne le recrutement de cellules conjonctives pour la formation d'os selon un mécanisme identique à la formation osseuse embryonnaire et au processus naturel de la réparation osseuse par la voie endochondrale, laquelle met en jeu trois types de cellules : les chondroblastes (flèche rouge), les chondrocytes prolifératifs (flèche bleue) et les chondrocytes hypertrophiés (flèche verte). L'observation au microscope des tissus au niveau de l'implant montre les différents stades de maturation de ces cellules cartilagineuses qui guident la formation d'un réseau de travées osseuses.

La nacréine, découverte, en 1996, par l'équipe de Hiroshi Myamoto, de l'Université Kinki, à Wakayama, au Japon, est une enzyme qui reconnaît le calcium. En 1997, Daniel Morse, de l'Université de Santa Barbara, a identifié chez une autre espèce d'ormeau, *Haliotis rufescens*, une protéine fibreuse, la lustrine A, qui confère, avec d'autres, son élasticité à la nacre. Cette propriété résulte de la présence de boucles d'un acide aminé, la glycine, répétées régulièrement dans sa séquence. La lustrine A serait essentielle au scellement des tablettes de cristaux entre elles. De plus, un domaine de la lustrine A présente une homologie avec le collagène de type I, caractéristique de l'os, qui expliquerait la reconnaissance immuno-logique de la matrice organique de *Pinctada maxima* par un vertébré. De surcroît, on a mis en évidence, chez une huître *Pinctada*, la MSI60, une molécule de soutien, et, chez un ormeau, la perlucine, une protéine proche des lectines qui participent à l'adhésion cellulaire.

Une équipe allemande a découvert, chez la moule nacrrière *Perna nobilis*, la mucoperline, une molécule apparentée à une mucine, qui participerait aussi au contrôle de la minéralisation. En effet, les mucines influent sur ce phénomène : par exemple, les mucines gastriques participent à la formation des calculs biliaires, ou bien, les mucines salivaires protègent les dents de la déminéralisation. Ces molécules sont souvent susceptibles de se lier aux ions calcium et certaines influent *in vitro* sur la cristallisation en aragonite.

Enfin, la séquence protéique de la perlustrine, une protéine de la nacre d'un ormeau, ressemble à celle d'une protéine de liaison à l'IGF1 des vertébrés. Les IGF forment une famille de facteurs de croissance conservés au cours de l'évolution : ils sont présents chez des mollusques, des arthropodes, des annélides et chez les vertébrés. La découverte de cette protéine de liaison à l'IGF1 dans la matrice organique de la nacre confirme, d'une part, le rôle

de la matrice organique nacrrière en tant que «réservoir» de facteurs actifs et, d'autre part, la conservation phylogénique de domaines moléculaires dans les matrices minéralisables, des invertébrés jusqu'à l'homme.

Des molécules signal qui expliqueraient pourquoi la nacre régénère l'os ont également été identifiées. Ainsi, nous avons isolé, de l'extrait protéique hydrosoluble de nacre de *Pinctada maxima*, quatre fractions protéiques. Une de ces fractions purifiées, contient des protéines qui favorisent *in vitro* la différenciation des fibroblastes et des cellules stromales de la moelle osseuse chez les mammifères. De plus, ces protéines participent au contrôle de l'apoptose (le suicide cellulaire) des ostéoblastes. Ces protéines actives purifiées sont en cours de séquençage.

L'unité fondamentale

Malgré la complexité des différentes structures élaborées et des mécanismes de contrôle, les biominéralisations ont hérité d'une «unité fondamentale» conservée au cours de l'évolution. La diversité des structures minéralisées de soutien et de réserve de calcium n'est sans doute apparue qu'après l'explosion de la vie animale, au Cambrien, il y a 544 millions d'années. Cependant, tous les composants de la machinerie nécessaire au processus de minéralisation étaient disponibles dès la fin du Précambrien, dans des tissus mous non spécialisés. Les premières matrices extracellulaires ancestrales auraient acquis, à la suite d'adaptations successives, la compétence de se minéraliser et de contrôler ce phénomène, l'orientant vers différentes «applications», tels la coquille des mollusques ou le squelette des vertébrés.

Ces processus de biominéralisation ont évolué grâce à un contrôle de plus en plus fin, assuré notamment par les cytokines et par les hormones circulantes. Les preuves s'accumulent pour confirmer l'hypothèse de la conservation de domaines moléculaires au cours de l'évolution des biominéralisations, la plus étonnante étant l'activité ostéogène, chez les mammifères, de certaines protéines de la nacre de *Pinctada*.

Ces découvertes récentes nous offrent aujourd'hui une batterie d'outils biologiques performants ; elles ouvrent un large champ de recherche sur les mécanismes régissant les biominéralisations. Les succès obtenus en régénération osseuse à l'aide de la nacre et la connaissance des molécules responsables de cette activité sont les premiers pas vers la mise au point de biomatériaux efficaces et novateurs en chirurgie réparatrice osseuse.

Évelyne LOPEZ, Sophie BERLAND et Sandrine BORZEIX mènent leurs recherches au Laboratoire de physiologie générale et comparée, associé au CNRS, au Muséum national d'histoire naturelle.

M. LAMGHARI, P. ANTONIETTI, S. BERLAND, A. LAURENT et E. LOPEZ, *Arthrodesis of lumbar spine transverse processes using nacre in rabbit*, in *Journal of Bone and Mineral Research*, vol. 16 (12), pp. 2232-2237, 2001.

L. PEREIRA MOURIÈS, M.J. ALMEIDA, C. MILET, S. BERLAND et E. LOPEZ, *Bioactivity of nacre water-soluble organic matrix from the bivalve mollusk Pinctada maxima in three mammalian cell types: fibroblasts, bone marrow stromal cells and osteoblasts*, in *Comparative Biochemistry and Physiology, Part B* 132, pp. 217-229, 2002.

C'est du billard!

DENNIS SHASHA

**«Bien viser pour bien ricocher»,
telle est la devise d'Eddie Felson.**

Dans une suite de *L'arnaqueur* et de *La couleur de l'argent*, Eddie Felson, alias Paul Newman, est de retour. Il est cette fois-ci aux prises avec Massachusetts Lanky, le fils de Minnesota Fats, le joueur humilié dans le premier épisode. Le désir de vengeance est héréditaire et son rejeton, versé dans les mathématiques, est bien décidé à laver l'affront qui entache l'honneur de la famille. Aussi, lors d'un tournoi, il propose à Eddie quelque variante de leur jeu préféré, le billard américain.

Selon les nouvelles règles, la table a trois mètres de longueur et un mètre de largeur. Elle n'est percée que de quatre trous, un à chaque coin. Par ailleurs, elle est un sommet de perfection, car lorsqu'une boule heurte une bande, l'angle de réflexion est exactement égal à l'angle d'incidence. Enfin, la table est orientée de façon à ce que la largeur soit dans l'axe Nord-Sud et la longueur dans l'axe Est-Ouest. La position de chaque boule est repérée par ses coordonnées (x ; y) dans un repère dont l'origine est le coin Sud-Ouest de la table.

Eddie doit envoyer une boule, placée au point (2 ; 0), dans le trou du coin Sud-Ouest — au point (0 ; 0) —, mais une autre boule, qu'il doit éviter, empêche un tir direct. La solution la plus simple est de faire rebondir la boule une fois sur la bande opposée (voir la figure a). Pour cela, il suffit de frapper la boule vers le Nord-Ouest selon une trajectoire de pente égale à -1 : la boule heurte la bande au point (1 ; 1) et rejoint le trou. Il est aussi facile d'envoyer la boule dans le trou après trois rebonds (voir la figure b) : la boule suit une trajectoire de pente égale à -2 et passe successivement par les points (1,5 ; 1), (1 ; 0) et (0,5 ; 1).

Toutefois, Massachusetts Lanky veut défier Eddie Felson : il lui propose d'atteindre le trou après exactement six rebonds, et il est tellement sûr de son fait qu'il veut parier une forte somme qu'Eddie n'y parviendra pas. Selon quelle pente Eddie doit-il envoyer sa boule pour mettre en échec le fils de son ancien rival ?

La solution de l'énigme sera donnée le mois prochain, et sera bientôt disponible sur le site Internet : www.pourlascience.com

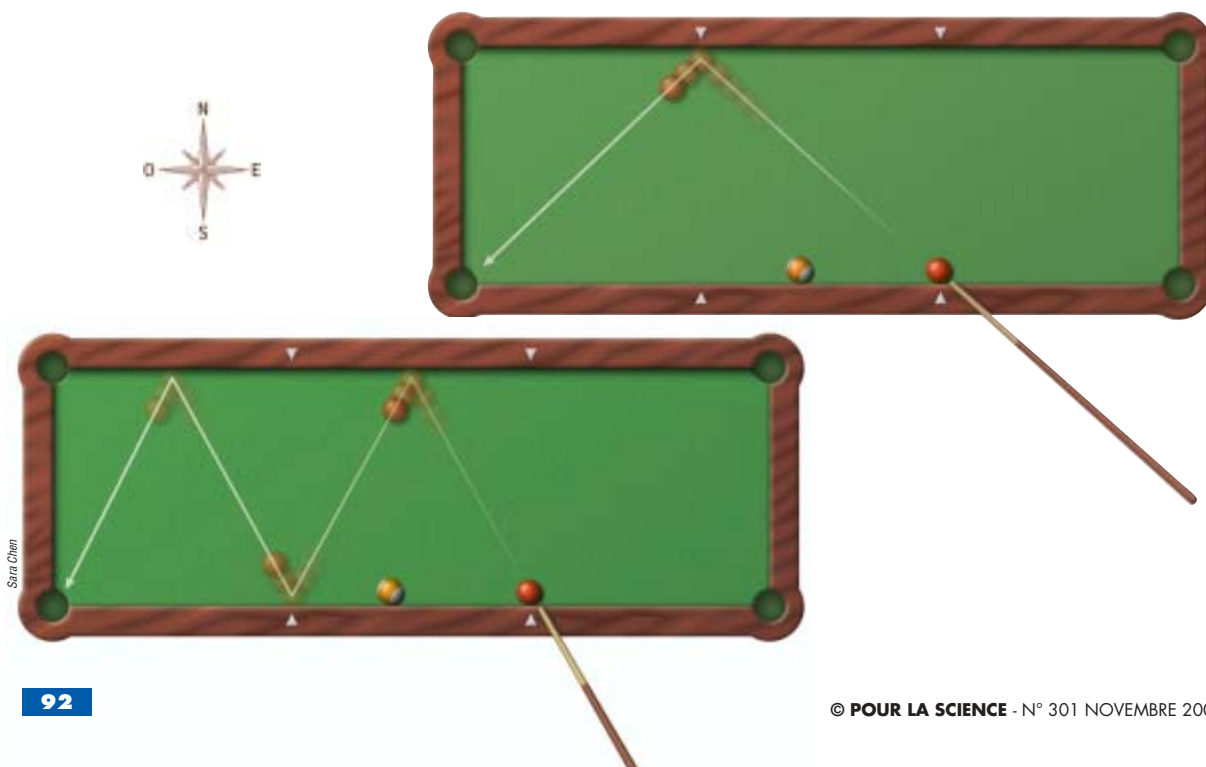
Solution du problème d'énigm Maths du numéro 299

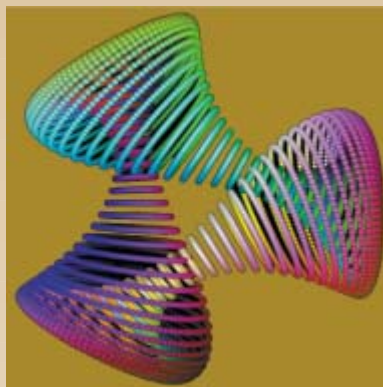
Quand la probabilité de décupler le capital investi de chaque société est p , la probabilité Q_k qu'exactly k sociétés réussissent parmi n sociétés est égale à :

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \text{ où } C_n^k \text{ est égal à } \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Aussi, la probabilité qu'au moins k sociétés réussissent est égale à $Q_k + Q_{k+1} + \dots + Q_{(n-1)} + Q_n$. Quand n est égal à 10 et k à 7, Q_7 est égal à 0,1298337 ; Q_8 est égal à 0,2758967 ; Q_9 est égal à 0,3474254 ; Q_{10} est égal à 0,1968744. La probabilité d'au moins sept succès est la somme de ces quatre probabilités, 0,9500302.

Dès lors, investissez dans 10 sociétés à raison de 1,43 million d'euros pour chacune, vos clients ont plus de 95 pour cent de chances de récupérer $7 \times 14,3$, soit 100,1 millions d'euros. Vous avez mis en réserve 2,7 millions d'euros.





Le monde mathématique existe-t-il?

JEAN-PAUL DELAHAYE

L'existence du monde des objets mathématiques est une question à la fois fondamentale et sans importance. Voyons pourquoi.

Les mathématiques sont une discipline à part : elles traitent d'objets (les nombres, les figures géométriques, les fonctions, les espaces de dimension finie ou infinie, etc.) dont l'existence est controversée. Cela étant, les mathématiciens s'interrogent-ils sur l'existence du monde mathématique? Non. La question – non résolue – n'est jamais abordée dans les revues mathématiques. Certains logiciens en traitent indirectement, car leurs résultats donnent lieu à des interprétations qui favorisent l'existence ou la non-existence des êtres mathématiques. Pourtant les logiciens eux-mêmes choisissent souvent une position qui rend indifférente l'existence (ou l'inexistence) du monde des objets mathématiques. Le «désengagement-ontologique» est général.

PARLER DE RIEN?

En privé, de rares mathématiciens expriment leur sentiment sur la question... en précisant prudemment qu'il s'agit d'un problème philosophique et non scientifique. N'est-ce pas étrange? Un biologiste ne considère pas que l'existence des licornes ou des prions est du ressort des philosophes : son travail est de déterminer cette existence et, s'il n'en est pas capable, il perfectionnera ses outils jusqu'à réussir. Un physicien ne considère pas que la question de l'existence de l'éther (substance hypothétique qu'on pensait le substrat des vibrations des ondes électromagnétiques avant la théorie de la relativité) ou l'existence du proton est une questions échappant à sa compétence. Même si la

mécanique quantique a rendu délicat le traitement de certaines notions, nul physicien ne se défait en laissant aux philosophes le soin de résoudre les questions ontologiques, et aujourd'hui, pour tout physicien, les protons existent et l'éther n'existe pas.

Comment les mathématiciens peuvent-ils refuser de se prononcer sur l'existence du monde des objets abstraits qu'ils passent leur vie à étudier? Récemment le philosophe Mark Balaguer dans son livre *Platonism and anti-Platonism in Mathematics* a éclairé la situation, donnant raison aux mathématiciens : leur méfiance naturelle pour les questions ontologiques est confortée par l'analyse nouvelle qu'il propose et qui dans une démonstration minutieuse de 150 pages renvoie dos à dos ceux qui croient à un monde des êtres mathématiques et ceux qui n'y croient pas. Un philosophe des mathématiques pour la première fois défend donc une vue conforme à l'agnosticisme des mathématiciens. Le cheminement emprunté par M. Balaguer se déroule en plusieurs étapes que nous allons suivre.

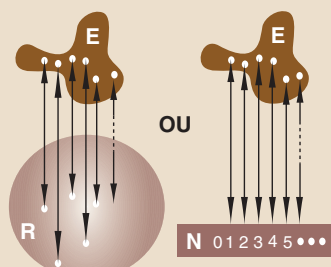
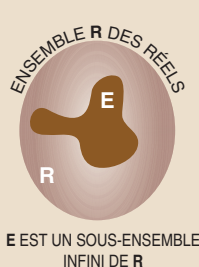
Les philosophes qui croient que les êtres mathématiques existent réellement se nomment les platoniciens en l'honneur du philosophe grec Platon (427-347 avant J.-C.). Selon celui-ci, le monde des idées (et donc celui des objets mathématiques) détermine l'univers des choses terrestres qui n'en est que son pâle reflet (comme dans le fameux mythe de la caverne de Socrate dont les habitants ne voient que l'ombre des choses). Aujourd'hui on nomme platonisme toute philosophie des mathématiques selon laquelle il existe un monde des objets mathématiques indépendant de l'esprit humain. Pour un platonicien :

1. L'HYPOTHÈSE DU CONTINU ET LE PLATONISME GÖDELIEN

L'hypothèse du continu est l'affirmation que tout ensemble infini contenu dans l'ensemble des nombres réels peut être mis en correspondance terme à terme, soit avec l'ensemble des nombres entiers, soit avec l'ensemble des nombres réels (autrement dit : il n'y a pas d'infini intermédiaire entre celui des entiers et celui des réels).

Pour un platonicien de type gödelien, le monde mathématique est celui des ensembles et dans ce monde la vérité de l'hypothèse du continu est déterminée : ou bien l'hypothèse du continu est vraie ou bien l'hypothèse du continu est fausse. Le travail du mathématicien consiste à découvrir ce qu'il en est.

Pour le platonisme plein [proposé par M. Balaguer], le monde des êtres mathématiques contient à la fois des sous-mondes où l'hypo-



thèse du continu est vraie et des sous-mondes où l'hypothèse du continu est fausse ; aucun n'est plus vrai que l'autre. Le mathématicien ne découvrira pas que l'hypothèse du continu est vraie ou fausse, car l'hypothèse du continu n'est pas déterminée.

Pour le platonisme de type gödelien, si «le monde vrai des ensembles» vérifie l'hypothèse du continu, alors il contient des structures corres-

pondant à des univers où l'hypothèse du continu est fausse (et inversement). Cela résulte des travaux des logiciens de la théorie des modèles dont Gödel fut l'un des promoteurs. Cependant ces structures sont, de son point de vue, artificielles et «le monde vrai des ensembles» satisfait l'hypothèse du continu ou ne la satisfait pas. En dépit du prestige de K. Gödel, peu de mathématiciens le suivent aujourd'hui.

(a) Il existe des objets mathématiques tels que les nombres et les ensembles et ces objets ne sont pas localisés dans l'espace et le temps du monde de la physique où nous vivons. Ces objets sont indépendants de nous et de la connaissance que nous en avons.

(b) Nos théories mathématiques décrivent ces objets et nous en fournissent une connaissance fiable. Les mathématiciens *découvrent* les théorèmes.

Pour l'antiplatonisme la situation est opposée :

(a') Il n'y a pas de monde des objets mathématiques.

(b') Nos théories mathématiques et notre capacité à les élaborer doivent être interprétées et expliquées sans référence à ce monde illusoire. Les mathématiciens *inventent* les théorèmes.

De nombreuses variantes du platonisme et de l'antiplatonisme mathématiques ont été défendues et un grand nombre d'arguments ont été échangés entre les partisans de ces deux positions métaphysiques fondamentales sur la nature des mathématiques. Pour M. Balaguer, il est possible de répondre à toutes les objections opposées au platonisme mathématique à la condition d'adopter «un platonisme plein», c'est-à-dire un platonisme maximal qui reconnaît l'existence de tous les objets mathématiques possibles, quelle qu'en soit la taille ou l'abstraction.

PLATONISMES LIMITÉS

Ce platonisme plein ne va pas de soi : si de nombreux mathématiciens et philosophes acceptent l'idée qu'il existe vraiment des nombres entiers, certains considèrent que les ensembles infinis n'existent pas (parfois des ensembles infinis spécifiques sont acceptés et pas d'autres). Pour justifier ces limites aux conceptions platoniciennes (qui s'opposent au platonisme plein de M. Balaguer), on invoque les difficultés et paradoxes rencontrés en théorie des ensembles.

L'impossibilité, par exemple, de régler proprement l'hypothèse du continu est troublante : elle affirme qu'aucun ensemble n'a une taille intermédiaire entre celle de l'ensemble des nombres entiers et celle de l'ensemble des nombres réels. La question est parfaitement claire, pourtant Kurt Gödel et Paul Cohen ont démontré que sa réponse ne dépend pas des autres axiomes de la théorie des ensembles et rien ne penche en faveur ou en défaveur de l'hypothèse du continu. Tout cela laisse croire que nous pouvons considérer que l'hypothèse du continu est vraie ou fausse. Il est bien clair cependant que si les ensembles existent indépendamment de la connaissance que le mathématicien en a, c'est leur nature (et pas lui) qui décide de la vérité de l'hypothèse du continu.

Cette apparente liberté de choix concernant l'hypothèse du continu s'oppose donc à la croyance que les ensembles infinis sont réels. Les mathématiciens intuitionnistes, à la suite de L. Brouwer au début du XX^e siècle, regardent les objets infinis avec une méfiance particulière. Pour un intuitionniste, l'infini est un mirage et il faut refuser de dire que dans la suite des décimales du nombre π «ou bien il y a mille 7 consécutifs ou bien il n'y a jamais mille 7 consécutifs» : pour un intuitionniste, le tiers exclu (l'affirmation que A ou Non-A) ne s'applique pas aux propriétés de la suite infinie des décimales de π et plus généralement ne s'applique pas dès que l'on traite d'objets infinis.

Le grand logicien autrichien Kurt Gödel défendait une forme de platonisme fondée sur l'idée que les objets mathématiques sont les ensembles et que nous disposons d'un sens particulier, l'intuition mathématique, donnant accès à ce monde des ensembles. Cette conception conduisait Gödel à soutenir que les questions indécidées aujourd'hui le seront un jour : pour lui l'hypothèse du continu, par exemple, se résoudrait lorsque nous aurons perçu et formulé de nouveaux axiomes pertinents qui s'ajouteraient à ceux admis aujourd'hui en théorie des ensembles. M. Balaguer ne partage pas la conception de Gödel et son platonisme plein est l'affirmation sans restriction que tout objet mathématique, logiquement possible, existe. Puisque l'on peut ajouter, sans contradictions nouvelles, aux axiomes habituels de la théorie des ensembles, l'hypothèse du continu ou sa négation, les deux types de mondes ensemblistes coexistent dans un super-monde mathématique. Pour M. Balaguer, il n'y a pas à découvrir de vérité concernant l'hypothèse du continu comme le pensait Gödel (au platonisme limité), car le monde mathématique est aussi complet que possible.

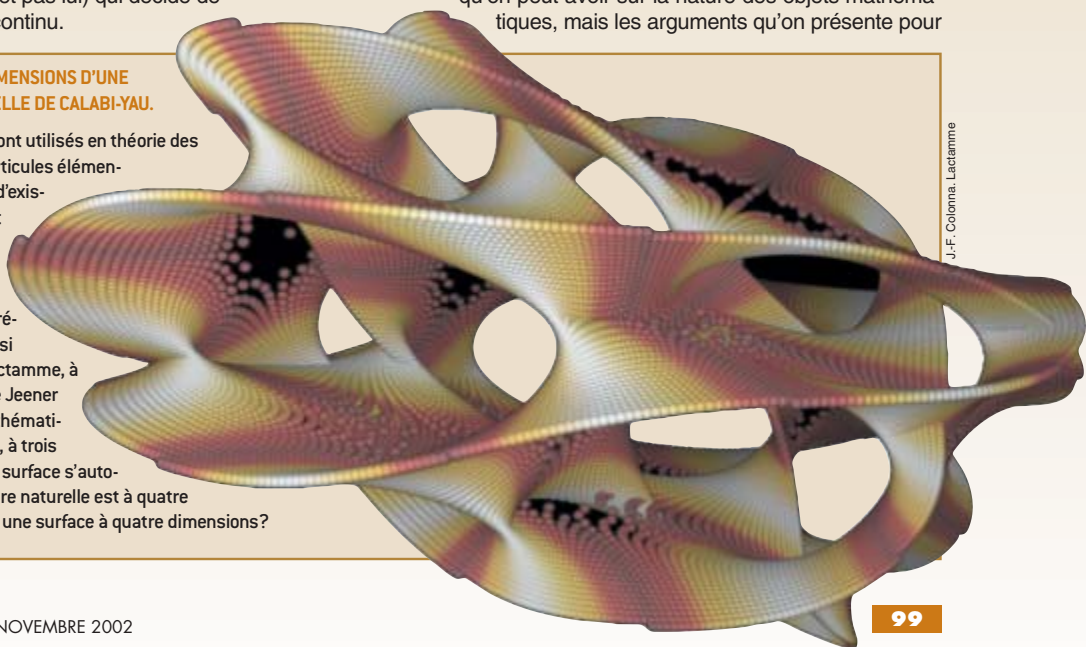
M. Balaguer n'est pas le premier à envisager une telle conception ontologique maximale. On en trouve par exemple déjà la trace chez Hilbert qui dans une lettre à Frege écrivait : «[quand] des axiomes arbitraires ne se contredisent pas les uns avec les autres et avec leurs conséquences, ils sont vrais et les choses définies par ces axiomes existent. C'est pour moi le critère de la vérité et de l'existence.»

Henri Poincaré, Michael Resnik et quelques autres ont aussi défendu des positions apparentées au platonisme plein de M. Balaguer, mais aucun n'en a tiré toutes les conséquences, et souvent, au contraire, leurs philosophies des mathématiques ont pris d'autres formes que celle du platonisme plein. La position de M. Balaguer est donc nouvelle.

M. Balaguer examine méticuleusement, non pas les opinions qu'on peut avoir sur la nature des objets mathématiques, mais les arguments qu'on présente pour

2. REPRÉSENTATION À TROIS DIMENSIONS D'UNE SURFACE QUADRIDIMENSIONNELLE DE CALABI-YAU.

De tels êtres mathématiques sont utilisés en théorie des cordes pour représenter les particules élémentaires ; ils posent un problème d'existence dans la mesure où il n'est actuellement pas envisageable de tester la validité des modèles fondés sur ces structures. La bouteille de Klein, représentée à côté du titre a été aussi calculée par J. F. Colonna au Lactamme, à partir d'une équation de Patrice Jeener (graveur de grand talent et mathématicien). Les deux structures sont, à trois dimensions, une immersion (la surface s'auto-traverse) alors que leur structure naturelle est à quatre dimensions ; mais qui peut voir une surface à quatre dimensions ?



J.-F. Colonna, Lactamme

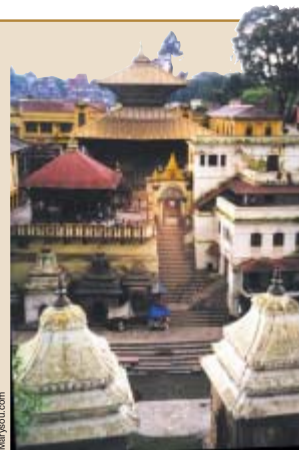
3. LE PLATONISME PLEIN DE M. BALAGUER

Le platonisme «plein» de M. Balaguer est l'affirmation qu'à toute théorie logiquement consistante, correspondent des êtres mathématiques autrement dit : tous les êtres mathématiques possibles existent.

Le platonisme plein de M. Balaguer considère que notre capacité à faire des mathématiques est fondée sur notre capacité à maîtriser et à développer des théories consistantes et n'est pas liée à un improbable et mystérieux contact avec le monde des êtres mathématiques. Le platonisme plein explique que nous pouvons connaître de manière fiable les êtres mathématiques à l'aide de l'analogie du village népalais.

Un anthropologue, qui reste tout seul chez lui, et qui ne s'informe d'aucune façon sur les villages népalais, peut-il décrire des villages népalais sans se tromper ? Oui, si tous les villages népalais – c'est-à-dire conformes à une définition précise et fixée – existent, car alors l'anthropologue n'aura qu'à utiliser la définition des villages népalais et proposer des descriptions consistantes de tels villages : à chaque fois qu'il en élaborera une, un des villages du monde plein des villages népalais sera conforme à son récit.

D'après le platonisme plein de M. Balaguer, le mathématicien peut de la même façon en restant chez lui et sans avoir aucun contact mental ou autre avec les êtres mathématiques les décrire et faire avancer leur connaissance. La connaissance du monde des êtres mathématiques est possible et sans mystère pour le platonisme plein.



défendre une vue ou une autre. Le platonisme de K. Gödel et la majorité des platonismes défendus jusqu'ici ne sont pas en mesure de répondre correctement aux deux objections qu'il place au cœur de son argumentaire : l'objection épistémologique et l'objection de la non-unicité.

L'OBJECTION ÉPISTÉMOLOGIQUE CONTRE LE PLATONISME

L'objection épistémologique est le défi lancé à tout platonicien d'expliquer comment un mathématicien accède à la connaissance du monde des objets mathématiques. Ce défi peut être formulé comme suit :

- (1) Les êtres humains sont tout entiers dans l'espace-temps.
- (2) S'il existe des êtres mathématiques, ils sont hors de l'espace-temps.
- (3) Donc, s'il existe des êtres mathématiques, alors les êtres humains ne peuvent accéder à leur connaissance.
- (4) Et donc finalement, le platonisme, qui affirme à la fois qu'il existe des êtres mathématiques et que les humains peuvent les connaître, est faux.

Un platonicien doit indiquer où pèche ce raisonnement. Diverses stratégies ont été utilisées par les philosophes platoniciens qui, cherchant à bloquer l'inférence faisant passer de (1) et (2) à (3), ont soutenu, soit des théories postulant un contact entre nous et les êtres mathématiques, soit des théories «sans contact». Certaines théories «avec contacts» affirment que nous possédons un sens particulier, l'intuition, nous donnant un accès direct au monde mathématique (Gödel), d'autres affirment que les êtres mathématiques sont présents de manière cachée dans les objets de notre espace-temps et que cette présence nous permet de les connaître – la philosophe américaine Penelope Maddy a récemment développé ce point de vue.

La conception gödelienne est jugée mystérieuse et peu claire : comment fonctionnerait cette intuition et quelle en serait la nature ? Les êtres mathématiques n'ont pas d'actions causales sur les êtres physiques, donc aucune transmission d'information ne peut s'opérer entre le monde mathématique et le monde physique. Rien ne semble donc fonder une théorie raisonnable de l'intuition mathématique «à la Gödel».

La conception de P. Maddy ne semble pas résister non plus à certaines objections précises. Par exemple, M. Balaguer note que pour un mathématicien l'objet a n'est pas le même que $\{a\}$ (l'ensemble ayant pour seul élément a) ou que $\{\{a\}\}$, (l'ensemble ayant pour seul élément, l'ensemble $\{a\}$), etc. alors que pourtant, si a est un objet physique, nous percevons ces différents ensembles de manière identique. La compréhension du monde mathématique (et surtout des objets infinis) ne pro-

vient donc pas de nos expériences avec les objets du monde physique, et donc elle reste mystérieuse.

Les théories platoniciennes «sans contact» proposent des explications de la façon dont l'esprit humain réussit, sans entrer en relation directe avec le monde des objets mathématiques, à en prendre connaissance. Elles sont nombreuses et tentent de justifier qu'il est faux que de (1) et (2) on déduit nécessairement (3). M. Balaguer démontre de façon assez convaincante que seul son platonisme plein relève le défi de l'objection épistémologique. M. Balaguer nous propose la parabole des villages népalais, le point central de sa conception et toute la force de son platonisme plein.

La théorie des villages népalais est explicitée sur la figure 3 : sans n'y avoir jamais été, ni avoir eu aucun contact avec lui nous avons la capacité de décrire les villages népalais hors de notre portée. De même, pour le platonisme plein, la connaissance du monde mathématique est possible sans avoir à postuler aucune intuition mystérieuse, sans avoir à envisager aucun canal de communication magique entre le monde abstrait où se déploient les êtres mathématiques et notre univers matériel, cela parce qu'à chaque fois que le mathématicien décrit des objets mathématiques possibles, ceux-ci existent réellement dans l'univers plein des mathématiques. Le défi de l'objection épistémologique est relevé par le platonisme plein – et par lui seul.

Bien sûr des questions restent posées concernant le sens du mot «possible» quand le platonicien plein définit sa position en disant qu'il considère que tous les objets mathématiques possibles existent. M. Balaguer précise donc que «possible» signifie «consistant» (non contradictoire) et il analyse soigneusement les diverses notions de consistance utilisées en logique (consistance syntaxique, consistance sémantique et consistance intuitive).

L'OBJECTION DE LA NON-UNICITÉ CONTRE LE PLATONISME

La seconde objection majeure formulée au platonisme (par Paul Benacerraf en 1965) est l'objection de la non-unicité. La voici. S'il existe des nombres entiers, alors forcément il en existe de plusieurs sortes et donc on ne peut pas parler du nombre 2 ou du nombre 37 comme le prétend un platonicien. Détaillons la difficulté. En théorie des ensembles (la théorie aujourd'hui systématiquement utilisée pour présenter les mathématiques), E. Zermelo a proposé de définir les entiers en posant : $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\{\emptyset\}\}$, $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$, etc. (réurrence $n+1 = \{n\}$). La méthode fonctionne parfaitement et on obtient de cette façon une structure possédant toutes les propriétés qu'on attribue aux entiers. Il se trouve qu'on peut aussi définir les entiers en s'appuyant sur

l'idée de von Neumann : $0=\emptyset$, $1=\{\emptyset\}$, $2=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3=2\cup\{2\}=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc. (récurrence $n+1 = n \cup \{n\}$). Mille autres idées sont envisageables et aucune n'est meilleure qu'une autre. Finalement, aucun critère ne permet de dire sérieusement ce qu'est le nombre 2. Il n'y a donc pas de nombre 2 contrairement à ce qu'affirme le platonicien. Plus grave, des théorèmes de logique mathématique (théorèmes de Löwenheim-Skolem) affirment que toute théorie non contradictoire formulée dans le langage du calcul des prédicats du premier ordre possède des modèles essentiellement différents (non isomorphes), car construits sur des ensembles ayant des cardinaux différents. En particulier, il existe un ensemble d'objets – nommés entiers non standards – satisfaisant tous les axiomes de l'arithmétique élémentaire et pourtant non dénombrables. Un objet mathématique n'existe jamais seul, chacun possède des doubles (en quantité infinie) et le mathématicien n'est jamais en mesure de parler d'un objet particulier précis contrairement à ce que son langage laisse croire. Le platonisme est faux.

Pour M. Balaguer, cette objection est sans gravité et la solution consiste à admettre, sans s'en offusquer, que le mathématicien parle toujours de plusieurs objets en même temps. Revenons aux villages népalais : tout se passe comme si celui qui voulait décrire des villages népalais n'avait jamais les moyens d'être assez précis pour ne parler que d'un village à la fois. Chaque récit qu'il propose s'applique à plusieurs villages. Cela serait certes un peu troublant, mais ne s'opposerait pas à l'idée que tout ce qu'il dit est vrai, et s'applique bien à des villages népalais réels. La situation en mathématiques serait invariablement de cette nature, et cela ne contredit pas vraiment le platonisme. L'argument de la non-unicité est sans gravité pour le platonicien plein et a pour seul effet de montrer que le langage mathématique qui, pour des raisons de commodité, parle au singulier du nombre 1, de l'espace de dimension 3, du groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, etc. ne doit pas être pris au pied de la lettre : le mathématicien comme l'anthropologue des villages népalais décrit toujours plusieurs réalités simultanément.

LES MATHÉMATIQUES SONT UN ROMAN COLLECTIF

Après avoir défendu le platonisme plein et en avoir proposé une version répondant aux grandes objections classiques qui lui avaient été opposées M. Balaguer entreprend de considérer le point de vue antiplatonicien.

La version d'antiplatonisme qu'il retient est une philosophie élaborée dans la décennie 1980 par le philosophe Harry Field et qui porte le nom de *fictionnalisme*. Pour un fictionnaliste, le mathématicien est dans la situation d'un romancier : ses personnages n'existent pas et rien de ce qu'il dit

n'est vrai. L'affirmation d'un mathématicien que «Le nombre 7 est un nombre premier» est du même type que celles de Gustave Flaubert quand il nous décrit les voyages de Madame Bovary à Rouen, ou qu'il nous fait part des fines analyses de Monsieur Homais. Tout est faux dans le récit de Flaubert, Madame Bovary n'est ni brune ni blonde, elle n'a jamais eu d'enfant, etc., cela simplement parce qu'elle n'existe pas. Pour un fictionnaliste : en mathématiques *stricto sensu* tout est faux. Il est important bien sûr que les récits mathématiques tiennent, c'est-à-dire qu'ils ne se contredisent pas d'une page à l'autre. Les histoires auxquelles s'intéressent les mathématiciens sont des fictions collectives, c'est-à-dire écrites à plusieurs (comme cela arrive parfois en littérature lorsqu'un personnage de roman est utilisé par plusieurs auteurs). Contrairement aux écrivains, les mathématiciens s'entendent pour attribuer à 7 la même place et les mêmes propriétés dans leurs récits : un mathématicien pourrait utiliser 8 là où les autres utilisent 7, mais plutôt que de s'amuser à cela (ce que rien n'interdit en théorie), ils préfèrent raconter de grands récits compatibles et complémentaires les uns des autres.

Satisfaire la contrainte logique de non-contradiction et déduire certaines affirmations d'autres affirmations formulées auparavant sont relativement faciles dans les romans. C'est un jeu qui l'est beaucoup moins dans les fictions mathématiques et d'ailleurs cela finit même par être l'essentiel du travail des mathématiciens. Les textes mathématiques sont pour un fictionnaliste des romans policiers où le raisonnement logique est l'essentiel. Le fictionnalisme est un antiplatonisme : il n'y a pas de monde des objets mathématiques et insistons bien : *stricto sensu* rien n'est vrai en mathématiques d'après cette philosophie.

L'objection principale formulée à l'encontre du fictionnalisme (ainsi qu'à l'encontre de toutes les conceptions antiplatonistes) est l'objection de l'applicabilité : si toutes les mathématiques ne sont qu'inventions plus ou moins libres et arbitraires des mathématiciens à propos d'objets qui n'existent nulle part, comment se fait-il que les mathématiques soient si efficaces et s'appliquent si bien dans les sciences de la nature. Le roman de Flaubert, lui, n'apporte pas la moindre aide pour élaborer des théories physiques ou autres. Puisque les théories scientifiques se réfèrent sans cesse aux nombres et à toutes sortes d'objets mathématiques comme s'ils existaient, et qu'elles s'appuient sur leurs propriétés comme s'il s'agissait de vérités, comment penser que les mathématiques sont fausses ? Comment le fictionnaliste peut-il expliquer que d'affirmations fausses on déduise des faits avérés du monde physique ?

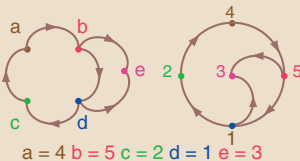
La réponse proposée par H. Field et reprise par M. Balaguer est qu'en formulant soigneusement les théories physiques qui font usage des concepts mathématiques (et qui semblent donc se référer à des objets mathématiques comme s'ils existaient), on peut éviter de s'y référer. H. Field propose

4. L'ISOMORPHISME ET L'OBJECTION DE NON-UNICITÉ

Deux objets mathématiques sont isomorphes si on peut les mettre en correspondance parfaite. Par exemple, deux graphes sont isomorphes s'il existe une façon de renommer les nœuds du premier de façon à ce qu'il soit identique au second.

La notion de structure isomorphe se généralise à toutes sortes d'objets mathématiques. Deux objets isomorphes du point de vue mathématique sont équivalents.

L'ensemble des nombres entiers est isomorphe à une infinité d'autres, ce qui rend impossible de parler du nombre 1 ou du nombre 37. Cette non-unicité est un problème pour le platonicien qui défend l'idée qu'il y a un ensemble unique de nombres entiers, donc un seul nombre 1, un seul nombre 2, etc. Cette objection de la non-unicité a été formulée contre le platonisme par P. Benacerraf.



La réponse du platonisme plein de M. Balaguer est de dire qu'il faut admettre qu'aucune théorie consistante ne parle d'un seul objet mathématique à la fois : il y a donc plusieurs ensembles de nombres entiers (donc plusieurs «nombre 1», plusieurs «nombre 55» etc.) et, pour raison de commodité, le mathématicien s'exprime

comme s'il y avait un ensemble bien déterminé et unique de nombres entiers. L'impossibilité de parler d'un seul objet à la fois est insurmontable et liée à l'idée que, pour un platonicien plein, le mathématicien n'a pas d'accès direct au monde des êtres mathématiques (voir la parabole des villages népalais). La non-unicité ne gêne pas le platonisme plein et au contraire conforte sa conception «sans contact» de la connaissance mathématique.

5. SI CELA EXISTE, C'EST FONDAMENTAL

Le fictionnalisme et le platonisme plein s'accordent sur un grand nombre de points (par exemple, sur l'importance à attribuer à la notion de consistance et à la logique), mais bien sûr s'opposent radicalement sur un point : l'existence du monde des êtres mathématiques et la vérité des énoncés mathématiques.

M. Balaguer défend que cette situation doit être prise au sérieux et acceptée comme telle : les conceptions de la façon dont les mathématiciens produisent de la connaissance mathématique et l'explication de l'efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature – points

où les deux philosophies s'accordent – doivent être considérées comme justes, mais le désaccord doit être considéré comme définitif et insurmontable. Nous ne disposons pas et ne disposerons jamais du moyen de savoir si le monde des êtres mathématiques existe ou non. L'indétermination dans laquelle nous sommes est radicale et ultime. La séparation du monde physique et du monde mathématique (s'il existe) empêche qu'il y ait des faits significatifs conduisant à trancher entre les deux seules philosophies acceptables des mathématiques que sont le fictionnalisme et le platonisme plein.

un programme de « nominalisation » de la physique qui consiste à transformer les théories physiques en théories n'ayant plus à postuler l'existence d'aucun nombre ni d'aucun objet mathématique. Cette idée que finalement dans une théorie physique la référence à des objets mathématiques est accessoire n'est peut-être pas surprenante : quand un physicien affirme que « la température du système S est de 37°C » l'usage qu'il fait du nombre 37 peut être évité en remplaçant les nombres par des noms d'états d'énergie, seuls ces états (physiques) étant supposés exister. Dit autrement : un physicien n'a jamais besoin de postuler que les objets mathématiques existent, car il utilise les mathématiques comme un moyen commode pour exprimer des propriétés du monde physique qu'un langage plus prudent et contourné lui permettrait d'éviter.

M. Balaguer complète les thèses de H. Field en détaillant comment on peut se dispenser de prendre au sérieux l'existence des êtres mathématiques (et donc d'y croire) lorsque l'on présente la mécanique quantique – ce qui semblait délicat. Cette objection étant la principale qui ait été opposée au fictionnalisme, on en arrive donc au terme de cette deuxième étape du cheminement philosophique de M. Balaguer à disposer de deux métaphysiques satisfaisantes des mathématiques : le platonisme plein et le fictionnalisme. Est-ce que rien ne les départage vraiment ?

L'INDÉTERMINATION RADICALE DE L'ONTOLOGIE

Bien qu'apparemment aussi éloignées qu'il est possible, les deux positions successivement défendues par M. Balaguer se retrouvent sur certains points.

(1) Concernant l'hypothèse du continu, les deux philosophies suggèrent la même attitude : on peut adopter l'hypothèse du continu ou sa négation, car l'hypothèse du continu n'est pas une question réellement déterminée, mais bien une propriété laissée au choix du mathématicien. L'important est que les théories des ensembles qu'on utilise soient consistantes. Cette attitude est celle adoptée par la grande majorité des mathématiciens depuis une trentaine d'années.

(2) Il n'est pas nécessaire de ramener l'usage de l'infini à celui du fini comme le préconisent souvent les antiplatoniciens en entreprenant des programmes de « réduction » (ceux-ci d'ailleurs rencontrent l'indifférence générale des scientifiques). Pour un platonicien plein ou un fictionnaliste, la consistance des théories de l'infini suffit à les justifier.

(3) Les connaissances mathématiques peuvent se développer librement selon l'usage adopté aujourd'hui par les mathématiciens et fondé sur la théorie des ensembles et la méthode axiomatique. Il est inutile de s'imposer des normes restrictives du type de celles proposées par les intuitionnistes (interdiction du « tiers exclu ») ou les constructivistes (exigences que tout énoncé existentiel – du type « il existe a tel que X » – soit accompagné d'une construction effective).

(4) L'important est la consistance (la non-contradiction), et les mathématiques sont principalement une affaire de logique.

(5) Les théories mathématiques parlent des objets mathématiques sans détour. Pour les platoniciens, ceux-ci existent, pour les fictionnalistes, ils n'existent pas, mais ce sont ces objets qui sont au cœur des mathématiques, pas d'autres choses telles que les déductions formelles, les constructions mentales, etc., comme le prétendent certains.

(6) Les deux conceptions de M. Balaguer soutiennent que les objets mathématiques n'ont pas d'actions causales dans notre univers, c'est-à-dire sont indépendants du monde physique. Aucune de ces deux conceptions n'a besoin de faire appel à des mécanismes particuliers mettant en contact notre monde et celui des mathématiques.

(7) Les deux théories soutiennent des théories épistémologiques proches : la connaissance mathématique provient de notre aptitude à mener des raisonnements logiques et de notre capacité à élaborer et à maîtriser des théories consistantes.

M. Balaguer considère que cette convergence des deux points de vue n'est pas un hasard et confirme leur justesse fondamentale à chacune. Quant à leur divergence, il soutient qu'en un sens, elle n'a pas d'importance et qu'il est vraisemblable qu'elle ne peut pas être résolue. Non seulement rien ne permet aujourd'hui de choisir entre fictionnalisme et platonisme plein, mais sans doute, rien ne permettra jamais de choisir. Le monde mathématique, s'il existe, est causalement isolé du nôtre et donc rien ne nous conduira jamais à être certain de son existence, tout sera donc pour nous comme s'il n'existait pas. L'existence du monde mathématique a un sens, mais cette existence est hors de notre portée, car aucun des faits auxquels nous avons accès n'est pertinent pour la question. L'existence du monde mathématique est fondamentalement indéterminée : à l'aide des informations dont nous disposons et dans la situation où nous sommes, nous ne saurons jamais lequel du platonisme plein ou de l'antiplatonisme fictionnaliste est exact. Cette indétermination radicale doit être acceptée et nous délivrer de l'obsession de la recherche d'une solution (ce que les mathématiciens semblent avoir compris depuis longtemps). Le désengagement ontologique généralisé, y compris en logique, est la seule attitude raisonnable.

A-t-on atteint avec les conceptions de M. Balaguer l'étape ultime de la philosophie métaphysique des mathématiques, qui la rendrait dorénavant inutile ? J'imagine que ses collègues ne seront pas d'accord pour l'admettre !

M. BALAGUER, *Platonism and anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1998.

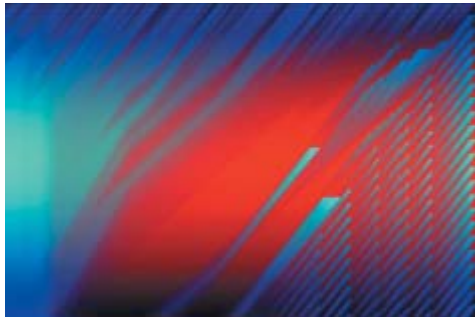
D. W. HART (sous la direction de), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford Readings in Philosophy, OUP, Oxford, 1996.

P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, 1990.

M. PANZA et J.-M. SALANSKIS (sous la direction de), *L'objectivité mathématique. Platonisme et structures formelles*, Masson, 1995.

H. FIELD, *Science Without Numbers*, Princeton Univ. Press, 1980.

H. FIELD, *Realism, Mathematics and Modality*, Basic Books, 1989.

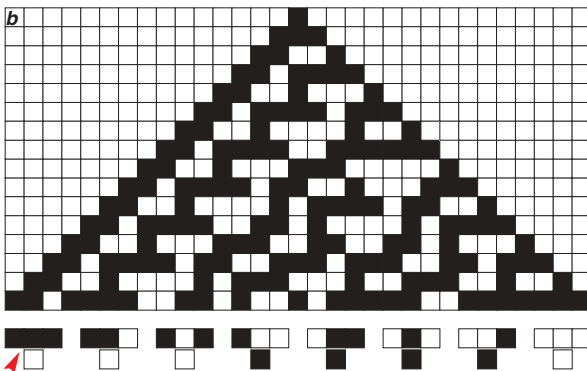
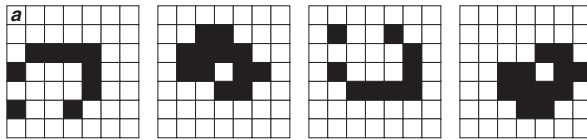


L'art cellulaire

BERNARD CAILLAUD

Dans l'art informatique, la logique et le tube cathodique remplacent le ciseau et le pinceau. Les formes, qui pourtant résultent de règles simples, sont étonnantes et, en partie, imprévisibles.

Au début des années 1960, les artistes découvrent un nouveau champ d'expression : l'ordinateur. Pour les adeptes de l'art informatique, l'écran du tube cathodique se substitue à la toile ou au bloc de marbre des générations précédentes. À cette époque, le mathématicien John von Neumann s'intéresse à la mise au point du *kinematon*, une machine qui, à partir d'éléments de son environnement, fabriquerait une copie d'elle-même. Ses études aboutissent à l'élaboration, avec Stanislas Ulam, d'une version formalisée de cette machine, les automates cellulaires. Dans ces constructions, un espace est subdivisé en éléments identiques, nommés cellules, qui évoluent par étapes discrètes en obéissant à des règles simples de voisinage : dans un plan, le devenir d'une cellule dépend de l'état de ses huit plus proches voisines. Par exemple, dans un plan divisé en cases noires ou blanches selon une répartition initiale aléatoire, une règle stipulerait que, d'une étape à la suivante, une cellule dont le nombre de voisines noires est pair reste inchangée, sinon, elle change de couleur.



Un automate cellulaire explore le devenir de cellules qui évoluent par étapes selon des règles de voisinages. Dans le *Jeu de la vie* (a), un automate à deux dimensions, les règles stipulent que, d'une étape à la suivante, une cellule blanche devient noire si exactement trois de ses huit voisines sont noires et qu'une cellule noire ne le reste que si elle a deux ou trois voisines noires, sinon elle devient blanche. Dans le cas d'un automate à une dimension (b), on peut définir huit règles de voisinage (en bas). Par exemple, selon l'une d'elles (flèche rouge), une cellule noire entourée de deux cellules noires devient blanche. Lorsque les états successifs sont alignés, les motifs qui apparaissent sont *a priori* imprévisibles et on y découvre à la fois des régularités et des structures variables.

Mon tableau de la page ci-contre, *Chromatisation N° 5*, est le résultat d'un automate cellulaire plus complexe. Pénétrons les mystères de ces constructions de l'esprit rendues visibles par l'informatique. Puis, nous découvrirons que leur domaine d'application ne fait que croître.

Au moment de leur apparition, les automates cellulaires restent confidentiels, ils seront popularisés dans les années 1970 grâce au *Jeu de la vie* (voir la figure a) du mathématicien John Conway. Là aussi, sur un plan quadrillé supposé infini, des cellules changent d'état colorimétrique (une cellule est noire quand elle est vivante, blanche lorsqu'elle est morte) à mesure que des règles simples sont appliquées : une cellule blanche naît à l'instant $t + 1$ si exactement trois de ses huit voisines sont vivantes à l'instant t ; une cellule vivante, noire, à l'instant t ne survit à l'instant $t + 1$ que si elle a deux ou trois voisines vivantes, sinon elle meurt et devient blanche. Certaines configurations initiales de cellules s'étendent, d'autres produisent des motifs périodiques, d'autres encore disparaissent, reproduisant ainsi l'évolution de certaines populations animales. Le *Jeu de la vie* est au cœur de *Biowall*, une œuvre de Daniel Mange, du Laboratoire de systèmes logiques, à l'École polytechnique de Lausanne, exposée en octobre 2002 à la Maison européenne de la photographie, à Paris.

Revenons au tableau qui, à l'inverse des exemples précédents, est le produit d'un automate cellulaire à une dimension. Expliquons-nous. Sur une ligne de 480 cellules, le devenir de chacune, de l'instant t à l'instant $t + 1$, dépend des deux cellules voisines et d'elle-même. Lorsqu'on affiche, l'un au-dessous de l'autre, les instants successifs de l'automate, l'écran se remplit peu à peu. La deuxième dimension représente le temps, discret. L'écran n'affiche plus alors un seul état de l'automate cellulaire, mais l'ensemble de son évolution (voir la figure b).

Par ailleurs, ici, les cellules n'oscillent plus entre deux états, le noir et le blanc, mais plutôt, la couleur ayant fait irruption, entre de multiples états colorimétriques. Ces états, nommés C , sont représentés par un nombre, arbitraire, pris, par exemple entre 0 et 100. La couleur de la cellule, que l'on exprime par des proportions (les coordonnées R, V et B) des trois couleurs primaires, le rouge, le vert et le bleu, est une fonction de son état colorimétrique C . Les règles de changements d'état d'une cellule peuvent ne s'appliquer qu'aux états colorimétriques de cette cellule et de ces deux voisines, mais elles peuvent également tenir compte, en plus, du rang i (entre 0 et 480) de la cellule dans la ligne. C'est le cas ici : à l'instant $t + 1$, le nouvel état colorimétrique C_i^* de la cellule i est égal à $(-0,2C_{i-1} + 0,55C_t + 0,6C_{i+1} + 100i/480) \bmod 100$ où C_i , C_{i-1} et C_{i+1} sont les états colorimétriques, à l'instant t , de la cellule i et de ses voisines de gauche et de droite. La fonction *modulo 100* assure que l'état colorimétrique C^* est bien compris entre 0 et 100.