

5. SI CELA EXISTE, C'EST FONDAMENTAL

Le fictionnalisme et le platonisme plein s'accordent sur un grand nombre de points (par exemple, sur l'importance à attribuer à la notion de consistance et à la logique), mais bien sûr s'opposent radicalement sur un point : l'existence du monde des êtres mathématiques et la vérité des énoncés mathématiques.

M. Balaguer défend que cette situation doit être prise au sérieux et acceptée comme telle : les conceptions de la façon dont les mathématiciens produisent de la connaissance mathématique et l'explication de l'efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature – points

où les deux philosophies s'accordent – doivent être considérées comme justes, mais le désaccord doit être considéré comme définitif et insurmontable. Nous ne disposons pas et ne disposerons jamais du moyen de savoir si le monde des êtres mathématiques existe ou non. L'indétermination dans laquelle nous sommes est radicale et ultime. La séparation du monde physique et du monde mathématique (s'il existe) empêche qu'il y ait des faits significatifs conduisant à trancher entre les deux seules philosophies acceptables des mathématiques que sont le fictionnalisme et le platonisme plein.

un programme de « nominalisation » de la physique qui consiste à transformer les théories physiques en théories n'ayant plus à postuler l'existence d'aucun nombre ni d'aucun objet mathématique. Cette idée que finalement dans une théorie physique la référence à des objets mathématiques est accessoire n'est peut-être pas surprenante : quand un physicien affirme que « la température du système S est de 37°C » l'usage qu'il fait du nombre 37 peut être évité en remplaçant les nombres par des noms d'états d'énergie, seuls ces états (physiques) étant supposés exister. Dit autrement : un physicien n'a jamais besoin de postuler que les objets mathématiques existent, car il utilise les mathématiques comme un moyen commode pour exprimer des propriétés du monde physique qu'un langage plus prudent et contourné lui permettrait d'éviter.

M. Balaguer complète les thèses de H. Field en détaillant comment on peut se dispenser de prendre au sérieux l'existence des êtres mathématiques (et donc d'y croire) lorsque l'on présente la mécanique quantique – ce qui semblait délicat. Cette objection étant la principale qui ait été opposée au fictionnalisme, on en arrive donc au terme de cette deuxième étape du cheminement philosophique de M. Balaguer à disposer de deux métaphysiques satisfaisantes des mathématiques : le platonisme plein et le fictionnalisme. Est-ce que rien ne les départage vraiment ?

L'INDÉTERMINATION RADICALE DE L'ONTOLOGIE

Bien qu'apparemment aussi éloignées qu'il est possible, les deux positions successivement défendues par M. Balaguer se retrouvent sur certains points.

(1) Concernant l'hypothèse du continu, les deux philosophies suggèrent la même attitude : on peut adopter l'hypothèse du continu ou sa négation, car l'hypothèse du continu n'est pas une question réellement déterminée, mais bien une propriété laissée au choix du mathématicien. L'important est que les théories des ensembles qu'on utilise soient consistantes. Cette attitude est celle adoptée par la grande majorité des mathématiciens depuis une trentaine d'années.

(2) Il n'est pas nécessaire de ramener l'usage de l'infini à celui du fini comme le préconisent souvent les antiplatoniciens en entreprenant des programmes de « réduction » (ceux-ci d'ailleurs rencontrent l'indifférence générale des scientifiques). Pour un platonicien plein ou un fictionnaliste, la consistance des théories de l'infini suffit à les justifier.

(3) Les connaissances mathématiques peuvent se développer librement selon l'usage adopté aujourd'hui par les mathématiciens et fondé sur la théorie des ensembles et la méthode axiomatique. Il est inutile de s'imposer des normes restrictives du type de celles proposées par les intuitionnistes (interdiction du « tiers exclu ») ou les constructivistes (exigences que tout énoncé existentiel – du type « il existe a tel que X » – soit accompagné d'une construction effective).

(4) L'important est la consistance (la non-contradiction), et les mathématiques sont principalement une affaire de logique.

(5) Les théories mathématiques parlent des objets mathématiques sans détour. Pour les platoniciens, ceux-ci existent, pour les fictionnalistes, ils n'existent pas, mais ce sont ces objets qui sont au cœur des mathématiques, pas d'autres choses telles que les déductions formelles, les constructions mentales, etc., comme le prétendent certains.

(6) Les deux conceptions de M. Balaguer soutiennent que les objets mathématiques n'ont pas d'actions causales dans notre univers, c'est-à-dire sont indépendants du monde physique. Aucune de ces deux conceptions n'a besoin de faire appel à des mécanismes particuliers mettant en contact notre monde et celui des mathématiques.

(7) Les deux théories soutiennent des théories épistémologiques proches : la connaissance mathématique provient de notre aptitude à mener des raisonnements logiques et de notre capacité à élaborer et à maîtriser des théories consistantes.

M. Balaguer considère que cette convergence des deux points de vue n'est pas un hasard et confirme leur justesse fondamentale à chacune. Quant à leur divergence, il soutient qu'en un sens, elle n'a pas d'importance et qu'il est vraisemblable qu'elle ne peut pas être résolue. Non seulement rien ne permet aujourd'hui de choisir entre fictionnalisme et platonisme plein, mais sans doute, rien ne permettra jamais de choisir. Le monde mathématique, s'il existe, est causalement isolé du nôtre et donc rien ne nous conduira jamais à être certain de son existence, tout sera donc pour nous comme s'il n'existait pas. L'existence du monde mathématique a un sens, mais cette existence est hors de notre portée, car aucun des faits auxquels nous avons accès n'est pertinent pour la question. L'existence du monde mathématique est fondamentalement indéterminée : à l'aide des informations dont nous disposons et dans la situation où nous sommes, nous ne saurons jamais lequel du platonisme plein ou de l'antiplatonisme fictionnaliste est exact. Cette indétermination radicale doit être acceptée et nous délivrer de l'obsession de la recherche d'une solution (ce que les mathématiciens semblent avoir compris depuis longtemps). Le désengagement ontologique généralisé, y compris en logique, est la seule attitude raisonnable.

A-t-on atteint avec les conceptions de M. Balaguer l'étape ultime de la philosophie métaphysique des mathématiques, qui la rendrait dorénavant inutile ? J'imagine que ses collègues ne seront pas d'accord pour l'admettre !

M. BALAGUER, *Platonism and anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1998.

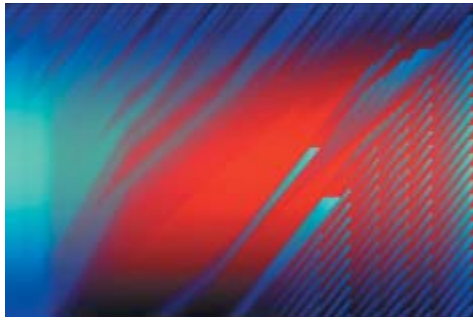
D. W. HART (sous la direction de), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford Readings in Philosophy, OUP, Oxford, 1996.

P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, 1990.

M. PANZA et J.-M. SALANSKIS (sous la direction de), *L'objectivité mathématique. Platonisme et structures formelles*, Masson, 1995.

H. FIELD, *Science Without Numbers*, Princeton Univ. Press, 1980.

H. FIELD, *Realism, Mathematics and Modality*, Basic Books, 1989.

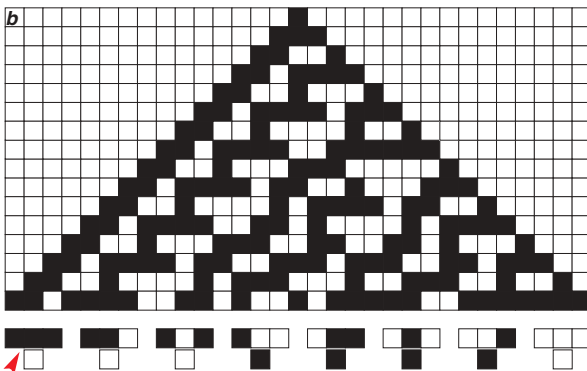
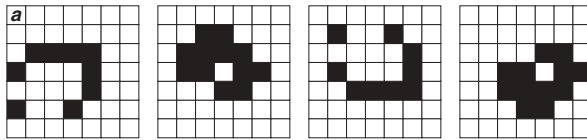


L'art cellulaire

BERNARD CAILLAUD

Dans l'art informatique, la logique et le tube cathodique remplacent le ciseau et le pinceau. Les formes, qui pourtant résultent de règles simples, sont étonnantes et, en partie, imprévisibles.

Au début des années 1960, les artistes découvrent un nouveau champ d'expression : l'ordinateur. Pour les adeptes de l'art informatique, l'écran du tube cathodique se substitue à la toile ou au bloc de marbre des générations précédentes. À cette époque, le mathématicien John von Neumann s'intéresse à la mise au point du *kinematon*, une machine qui, à partir d'éléments de son environnement, fabriquerait une copie d'elle-même. Ses études aboutissent à l'élaboration, avec Stanislas Ulam, d'une version formalisée de cette machine, les automates cellulaires. Dans ces constructions, un espace est subdivisé en éléments identiques, nommés cellules, qui évoluent par étapes discrètes en obéissant à des règles simples de voisinage : dans un plan, le devenir d'une cellule dépend de l'état de ses huit plus proches voisines. Par exemple, dans un plan divisé en cases noires ou blanches selon une répartition initiale aléatoire, une règle stipulerait que, d'une étape à la suivante, une cellule dont le nombre de voisines noires est pair reste inchangée, sinon, elle change de couleur.



Un automate cellulaire explore le devenir de cellules qui évoluent par étapes selon des règles de voisinages. Dans le *Jeu de la vie* (a), un automate à deux dimensions, les règles stipulent que, d'une étape à la suivante, une cellule blanche devient noire si exactement trois de ses huit voisines sont noires et qu'une cellule noire ne le reste que si elle a deux ou trois voisines noires, sinon elle devient blanche. Dans le cas d'un automate à une dimension (b), on peut définir huit règles de voisinage (en bas). Par exemple, selon l'une d'elles (flèche rouge), une cellule noire entourée de deux cellules noires devient blanche. Lorsque les états successifs sont alignés, les motifs qui apparaissent sont *a priori* imprévisibles et on y découvre à la fois des régularités et des structures variables.

Mon tableau de la page ci-contre, *Chromatisation N° 5*, est le résultat d'un automate cellulaire plus complexe. Pénétrons les mystères de ces constructions de l'esprit rendues visibles par l'informatique. Puis, nous découvrirons que leur domaine d'application ne fait que croître.

Au moment de leur apparition, les automates cellulaires restent confidentiels, ils seront popularisés dans les années 1970 grâce au *Jeu de la vie* (voir la figure a) du mathématicien John Conway. Là aussi, sur un plan quadrillé supposé infini, des cellules changent d'état colorimétrique (une cellule est noire quand elle est vivante, blanche lorsqu'elle est morte) à mesure que des règles simples sont appliquées : une cellule blanche naît à l'instant $t + 1$ si exactement trois de ses huit voisines sont vivantes à l'instant t ; une cellule vivante, noire, à l'instant t ne survit à l'instant $t + 1$ que si elle a deux ou trois voisines vivantes, sinon elle meurt et devient blanche. Certaines configurations initiales de cellules s'étendent, d'autres produisent des motifs périodiques, d'autres encore disparaissent, reproduisant ainsi l'évolution de certaines populations animales. Le *Jeu de la vie* est au cœur de *Biowall*, une œuvre de Daniel Mange, du Laboratoire de systèmes logiques, à l'École polytechnique de Lausanne, exposée en octobre 2002 à la Maison européenne de la photographie, à Paris.

Revenons au tableau qui, à l'inverse des exemples précédents, est le produit d'un automate cellulaire à une dimension. Expliquons-nous. Sur une ligne de 480 cellules, le devenir de chacune, de l'instant t à l'instant $t + 1$, dépend des deux cellules voisines et d'elle-même. Lorsqu'on affiche, l'un au-dessous de l'autre, les instants successifs de l'automate, l'écran se remplit peu à peu. La deuxième dimension représente le temps, discret. L'écran n'affiche plus alors un seul état de l'automate cellulaire, mais l'ensemble de son évolution (voir la figure b).

Par ailleurs, ici, les cellules n'oscillent plus entre deux états, le noir et le blanc, mais plutôt, la couleur ayant fait irruption, entre de multiples états colorimétriques. Ces états, nommés C , sont représentés par un nombre, arbitraire, pris, par exemple entre 0 et 100. La couleur de la cellule, que l'on exprime par des proportions (les coordonnées R, V et B) des trois couleurs primaires, le rouge, le vert et le bleu, est une fonction de son état colorimétrique C . Les règles de changements d'état d'une cellule peuvent ne s'appliquer qu'aux états colorimétriques de cette cellule et de ces deux voisines, mais elles peuvent également tenir compte, en plus, du rang i (entre 0 et 480) de la cellule dans la ligne. C'est le cas ici : à l'instant $t + 1$, le nouvel état colorimétrique C_i^* de la cellule i est égal à $(-0,2C_{i-1} + 0,55C_t + 0,6C_{i+1} + 100i/480) \bmod 100$ où C_i , C_{i-1} et C_{i+1} sont les états colorimétriques, à l'instant t , de la cellule i et de ses voisines de gauche et de droite. La fonction *modulo 100* assure que l'état colorimétrique C^* est bien compris entre 0 et 100.

À partir de C_i^* , on calcule les coordonnées R, V et B de la cellule i . Toutefois, les fonctions de chacune d'elles sont différentes afin d'éviter l'apparition du gris. En outre, dans ces fonctions, on choisit d'utiliser la valeur j , c'est-à-dire le rang de la ligne considérée : la coordonnée R est égale à $C_i^* \sin(j\pi/480)$, la coordonnée V à $(100 - C_i^*) \sin(j\pi/480)$, la coordonnée B à $90 - 0,8C_i^*$. Une fois ces règles définies, on laisse «travailler» l'ordinateur et on regarde ce qui arrive à partir d'une ligne initiale de 480 cellules aux couleurs choisies au hasard. Dans le tableau ci-dessous, ces règles ont été appliquées à une ligne où les bleus et les noirs ont été privilégiés. À chaque ligne initiale est associé un résultat graphique différent. Le tableau reproduit à côté du titre montre un autre résultat des mêmes règles appliquées à une ligne initiale différente.

Le résultat est *a priori* imprévisible dans ses détails ! Toutefois, on peut formuler *a posteriori* des hypothèses sur quelques caractéristiques du résultat obtenu. Par exemple, les discontinuités qui apparaissent surtout à droite du tableau seraient dues à la périodicité des fonctions *sinus* ainsi qu'au *modulo* : ces deux éléments ramènent brusquement la valeur de C_i^* qui dépasse 100 à 0. Par ailleurs, pourquoi le rouge et le cyan n'apparaissent-ils qu'au centre du tableau, selon l'axe vertical ? Pour des valeurs de j très petites (en haut) ou proches de 480 (en bas), $\sin(j\pi/480)$ est proche de zéro, réduisant les proportions de rouge et de vert dans le haut et le bas du tableau dominés alors par le bleu, ou par le noir quand la proportion de bleu est elle-même basse.

Certains artistes ont trouvé dans les automates cellulaires un moyen de création quasiment infini. Toutefois, ces derniers restent aussi des outils pertinents d'analyse : par exemple, les automates cellulaires sont utilisés pour simuler le comportement d'un gaz, les propriétés magnétiques d'un matériau, le développement urbain, la propagation d'un feu de forêt...

Grâce aux automates cellulaires, on étudie des univers virtuels dont on contrôle l'ensemble des lois. Peuvent-ils nous aider à comprendre le nôtre ? C'est ce que pense Stephen Wolfram, spécialiste de la complexité, qui, en étudiant notamment de façon systématique tous les automates cellulaires à une dimension où les cellules oscillent entre deux couleurs selon leurs voisins immédiats, s'interroge sur les formes complexes produites par un programme simple. Selon lui, les automates cellulaires à une dimension sont des calculateurs universels, c'est-à-dire qu'ils peuvent simuler n'importe quelle «machine». Aussi, défend-il l'idée selon laquelle on pourrait peut-être «reconstruire» notre univers dans ses moindres détails à partir d'un programme simple.

Bernard CAILLAUD est artiste et chercheur associé à l'Université de Caen.

Bernard CAILLAUD, *La création numérique visuelle. Aspects du Computer Art depuis ses origines*, Europia, Paris, 2001.

Stephen WOLFRAM, *A new kind of science*, Wolfram media, 2002.



Pièges à eau

JEAN-MICHEL COURTY • ÉDOUARD KIERLIK

Les meilleurs pièges à humidité (utilisés pour les couches-culottes !) sont ceux qui offrent une surface et une avidité maximales pour les molécules d'eau.

L'eau, c'est la vie, mais ses effets peuvent pourrir la vie. Elle s'infiltre dans les fondations des maisons, se condense sur les parois ou dans les locaux fermés, etc., commettant d'irréparables outrages. Et les bébés mouillés réveillent leurs parents. Comment se débarrasser de l'eau ? Avec des absorbants d'humidité ! Avec l'eau, tout est superficiel : les meilleurs absorbants d'humidité sont ceux qui offrent la plus grande surface de contact et qui ont la « plus grande soif ».

LA CAPILLARITÉ

De nos années passées sur les bancs de l'école, nous avons gardé le souvenir amusé de l'avidité des buvards. N'est-ce pas là une bonne méthode pour piéger l'eau ? Elle est en effet efficace, car elle exploite la capillarité. Au XVIII^e siècle, le médecin anglais James Jurin analyse le phénomène de capillarité en plongeant des capillaires (tubes fins) dans l'eau. L'eau présente une grande affinité pour le verre propre : elle « mouille » sa surface au maximum, cherchant à la recouvrir entièrement. La gravité qui la retient vers le bas l'empêche de monter jusqu'au sommet du capillaire. Ainsi, l'eau s'élève-t-elle dans le capillaire à une hauteur inversement proportionnelle au rayon de celui-ci. Elle monte par exemple à 14 millimètres dans un tube d'un millimètre de rayon et à presque un mètre dans un tube d'un rayon de dix micromètres.

Revenons à notre papier buvard et aux tissus qui, comme lui, sont constitués d'un entrelacs de fibres de cellulose. Ces matériaux offrent à l'eau de nombreux interstices, où elle pénètre par capillarité. Lorsque nous les soulevons après qu'ils se sont imbibés, l'eau reste piégée entre les fibres. L'imbibition des éponges et des chiffons absorbants de nos cuisines relève du même principe, la capillarité.

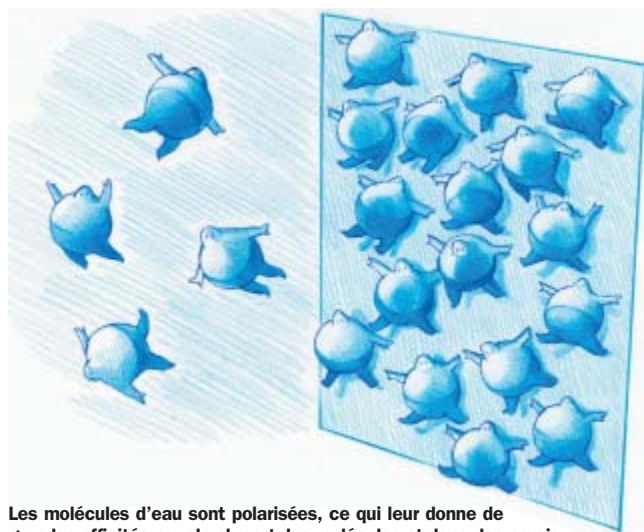
Nous nous interrogeons alors : pourquoi l'eau mouille-t-elle si facilement les surfaces de nombreux matériaux ? Comme nous le savons, une molécule d'eau est constituée d'un oxygène et de deux hydrogènes qui mettent en commun quatre électrons. Toutefois, l'atome d'oxygène tire à soi cette « couverture électronique ». La molécule d'eau est globalement neutre, mais elle présente une « polarité », c'est-à-dire des excès de charges, négatives sur l'oxygène et positives sur les deux hydrogènes. Cette molécule dite polaire interagit fortement avec les molécules chargées ou polarisées : tandis que l'oxygène (négatif) recherche la compagnie des charges positives, les hydrogènes (positifs) recherchent celle des charges négatives. Ainsi, les molécules d'eau se fixent durablement sur toutes les parois constituées de molécules polaires ou électriquement chargées, c'est-à-dire sur un bon nombre d'entre elles... Ces considérations permettent à l'ingénieur d'augmenter l'efficacité des éponges et autres papiers absorbants.

CHLORURE DE CALCIUM

Pour piéger l'eau, il faut lui présenter la surface la plus grande. Comment faire ? Nous plaçons souvent des dessiccants dans les armoires où nous rangeons des objets délicats, par exemple des appareils de mesure. Ces dispositifs déshydratants sont généralement composés d'un bac récepteur et d'une recharge contenant des cristaux de chlorure de calcium (CaCl_2). Mis en solution dans l'eau, ce sel se dissocie en anions calcium Ca^{++} et en cations chlorure Cl^- ; ceux-ci s'entourent de molécules d'eau, l'ion calcium attirant la partie oxygène de la molécule d'eau, l'ion chlorure, la partie hydrogène. Le même phénomène a lieu en présence des molécules d'eau de l'air ambiant : ainsi, le cation Ca^{++} et les deux anions Cl^- captent jusqu'à six molécules



Le papier absorbant de nos cuisines s'imbibe par capillarité : l'eau remonte entre les fibres de cellulose avant de se fixer à leurs surfaces.



Les molécules d'eau sont polarisées, ce qui leur donne de grandes affinités pour la plupart des molécules et donc des parois.