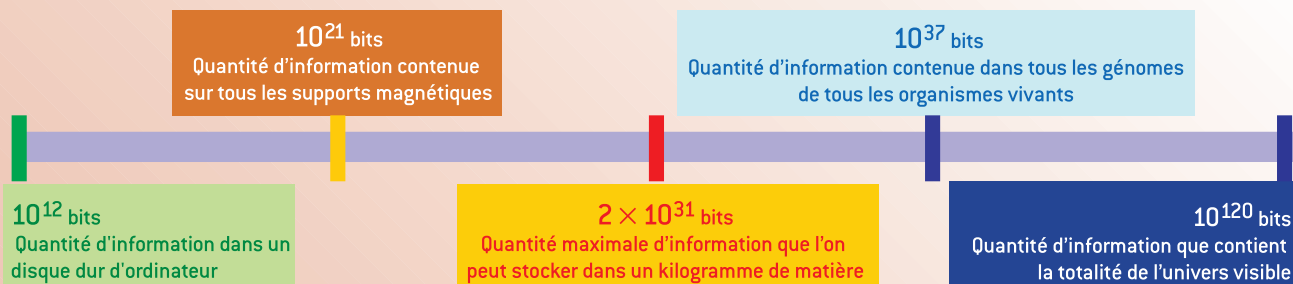


2. QUANTITÉS ASTRONOMIQUES D'INFORMATIONS

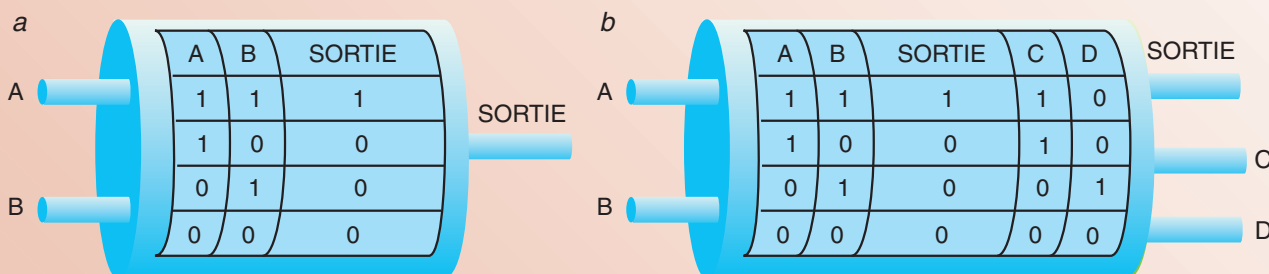


3. LA THERMODYNAMIQUE DU CALCUL

On sait depuis Maxwell qu'information et thermodynamique sont intimement liées, notamment par l'entropie qui mesure le désordre d'un système, mais certaines considérations des physiciens se sont révélées précipitées. En 1950, John von Neumann émit l'idée que toute opération binaire de calcul menée à la température T dissipait une quantité d'énergie de $k_B T \ln 2$ (où k_B est la constante de Boltzman qui vaut $1,3805 \times 10^{-23}$ joule par degré Kelvin) accroissant donc l'entropie de $k_B \ln 2$. Cette idée s'est révélée en partie fautive. Les travaux de Rolf Landauer montrèrent en effet que seule l'opération d'effacement (irréversible) d'une information binaire avait un tel coût thermodynamique. Ainsi une porte ET classique (a) dissipe de l'énergie, car elle perd des informations : quand l'état d'une ligne de sortie est 0, on ne peut en déduire l'état des lignes d'entrée. Au contraire (b), la porte logique réversible de Frekin ne dissipe pas l'énergie : deux bits de sortie, les bits de déchets C et D, permettent de faire fonctionner la porte en sens inverse afin de ramener l'ordinateur dans son état initial. Toute opération binaire réversible peut être

ainsi menée avec un coût thermodynamique nul. Complétant ce résultat, il a été établi par Y. Lecerf en 1963, puis indépendamment par Ch. Bennett en 1973, que tout calcul peut être mené de manière réversible, et donc, sans coût thermodynamique. L'inconvénient des calculs réversibles est qu'ils conduisent à accumuler une sorte de déchet d'information : cette accumulation est créée par l'impossibilité de l'effacement qui oblige à conserver des informations parfois devenues inutiles et encombrantes.

Les méthodes de corrections d'erreurs très utilisées aujourd'hui et dont on voit mal comment on pourrait se passer pour mener des calculs fiables sont malheureusement des opérations fondamentalement irréversibles. La raison en est que corriger une erreur c'est l'effacer. S. Lloyd a calculé qu'un ordinateur ultime d'un kilogramme et d'un litre opérant à 10^{51} opérations par seconde (vitesse indépassable) devrait avoir un taux d'erreur inférieur à 10^{-10} pour éviter la surchauffe, mais que même avec ce taux très faible toute l'énergie du système serait dissipée pour opérer la correction d'erreur en moins d'une nanoseconde !



4. L'ORDINATEUR TROU NOIR

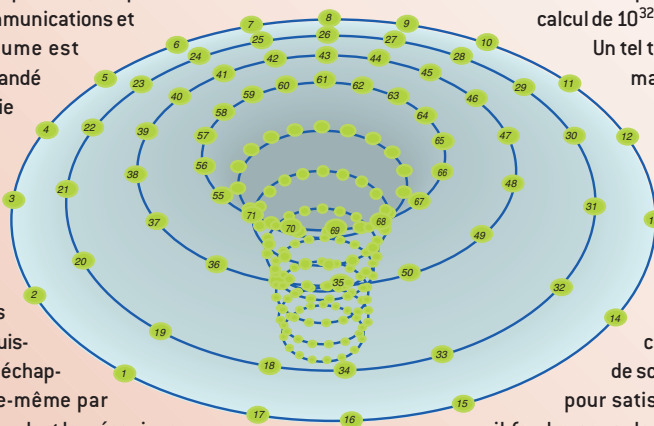
Lorsque l'on souhaite atteindre les limites physiques du calcul, le volume de l'ordinateur est déterminé par l'optimisation des opérations. Si l'on veut mener des opérations en parallèle, les paramètres importants sont la vitesse des communications et la mémoire : aussi un grand volume est préférable. Un petit volume est demandé pour une bonne exécution en série des calculs et une grande densité de mémoire.

Une très forte concentration de matière produit un trou noir et c'est pourquoi S. Lloyd a voulu évaluer les capacités de calcul de ces objets physiques très denses. Cela peut sembler absurde puisqu'aucune information ne devrait s'échapper d'un trou noir : la lumière elle-même par définition ne peut pas le quitter. Cependant la mécanique quantique montre que les trous noirs ne le sont pas complètement et qu'ils s'évaporent, c'est-à-dire émettent des particules, ce qui d'ailleurs

limite leur durée de vie. Utilisant des résultats de Don Page, S. Lloyd évalue qu'un trou noir d'un kilogramme aurait une durée de vie d'environ 10^{-19} seconde et pourrait pendant ce temps mener un calcul de 10^{32} opérations sur 10^{16} bits de mémoire.

Un tel trou noir calculerait donc à la vitesse maximale déterminée par S. Lloyd qui est d'environ 10^{51} opérations par seconde, pour un ordinateur d'un kilogramme. D'autres calculs menés par Y. Jack Ng et utilisant des méthodes différentes, confirment les résultats sur les capacités de calcul des trous noirs.

Bien sûr, l'idée de faire calculer des trous noirs est une idée de science-fiction et n'est envisagée que pour satisfaire la curiosité des théoriciens : il faudra sans doute attendre des décennies, voire des siècles, avant qu'on ne se pose vraiment la question pratique de programmer des trous noirs !



S. Lloyd, s'interrogeant sur un modèle plus raisonnable d'ordinateur d'un kilogramme et d'un volume d'un litre, évoque l'idée d'un stockage, aux températures habituelles, à raison d'un bit par atome (ce qui ne semble pas totalement absurde, car nos technologies permettent déjà de manipuler des atomes un par un) : cela conduirait à une mémoire de 10^{25} bits. Cette mémoire – si l'on se limite à des interactions électromagnétiques entre électrons et atomes – pourrait alimenter un calcul à la vitesse d'environ 10^{40} opérations binaires par seconde, le tout constituant ce qu'on pourrait nommer « l'ordinateur ultime froid ». Pour atteindre les capacités de cette machine, en comptant toujours un ordre de grandeur tous les 5 ans, il ne faudra que 60 ans pour la mémoire et 130 ans pour la vitesse.

Bien sûr, en cours de route des obstacles de toutes sortes seront à surmonter et les chiffres donnés sur ces ordinateurs extrêmes sont uniquement indicatifs de ce qu'on ne pourra pas dépasser quelles que soient les technologies mises en œuvre, y compris si les projets d'ordinateurs quantiques, optiques ou moléculaires aboutissent.

LA CAPACITÉ DE L'UNIVERS

Poursuivant son exploration des limites physiques du calcul et du stockage S. Lloyd, dans un article publié il y a quelques mois, se pose la question grandiose : en considérant que l'univers dans sa totalité mène des calculs, quelle est sa mémoire et combien de calculs a-t-il effectués depuis l'origine des temps, le Big Bang ? Ou ce qui revient au même, pour calculer tout ce qui s'est produit depuis le début du temps, combien faudrait-il d'opérations binaires ?

Pour mener cette évaluation, quelques hypothèses sont nécessaires : nous admettons que le modèle standard du Big Bang est correct. Dans ce modèle, l'âge de l'univers est d'environ 10^{10} ans. L'univers, selon la densité moyenne de la matière, est ouvert (infini en volume et en expansion indéfinie jusqu'à la fin des temps) ou fermé (fini en volume et finissant à terme par se contracter en un instant nommé le Big Crunch qui marque la fin de tout). Même si l'univers est ouvert, nous n'avons accès qu'à une partie finie de l'univers, le reste étant définitivement déconnecté de nous. L'ordinateur géant auquel s'est intéressé S. Lloyd est donc, soit l'univers entier – si l'univers est fermé (et donc fini) –, soit l'ensemble de ce

5. LA SIMULATION D'UN SYSTÈME PAR LUI-MÊME

Les poupées russes emboîtées illustrent les simulations de l'univers dans l'univers lui-même. S. Lloyd a évalué que l'univers depuis le Big bang a effectué un calcul d'environ 10^{120} opérations impliquant au maximum 10^{120} bits de mémoire. La quantité de calculs nécessaire pour simuler l'univers jusqu'à un instant donné est donc finie et une simulation parfaite de l'univers jusqu'à cet instant est envisageable (en théorie) si l'on dispose d'un ordinateur assez puissant. Selon les caractéristiques de l'évolution cosmologique de l'univers – sur lesquelles les spécialistes discutent encore – il est possible ou non de mener un calcul infini dans l'univers futur. Si un tel calcul infini est possible, on peut imaginer utiliser cette capacité pour simuler parfaitement et dans sa totalité l'univers lui-même à partir du Big Bang : les premiers instants demanderaient peut-être des milliards

d'années de calcul, mais chaque instant (avec un décalage de plus en plus grand) serait en définitive simulé. Une telle situation évoque aussi les figures fractales dont certaines parties sont identiques au tout à une échelle réduite, sauf qu'ici l'infini permet à l'univers de posséder une partie qui le reproduit entièrement à l'échelle 1.

L'éventualité d'une simulation parfaite de l'univers en lui-même donne lieu à toutes sortes de situations étranges : lors de la simulation, votre vie sera simulée et donc, en quelque sorte, vous revivrez. Mais dans la simulation, la simulation sera elle aussi simulée et vous revivrez encore au sein de cette simulation dans la simulation. Etc. Au total votre vie se déroulera donc une infinité de fois !



qui se trouve dans la partie accessible de l'univers – si l'univers est ouvert.

Là encore, la mécanique quantique est considérée comme la théorie rendant correctement compte du monde physique et c'est elle qui fixe les caractéristiques de l'univers. Le résultat des calculs de S. Lloyd est que, depuis le Big Bang, cet ordinateur global a effectué un calcul équivalent à environ 10^{120} opérations binaires, et qu'il dispose d'une mémoire de 10^{120} bits (seulement 10^{90} si on se limite aux degrés de liberté contenus dans la matière et l'énergie sans prendre en compte la gravitation). Ces nombres s'expriment uniquement en fonction de l'âge de l'univers (10^{10} ans), et des constantes fondamentales c , h , G . (c est la vitesse de la lumière ; h est la constante de Planck, voir plus haut ; G est la constante de gravitation qui vaut $6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$).

Pour obtenir des relations simples on introduit le temps de Planck t_p qui est une durée au-dessous de laquelle plus rien n'a de sens physique : $t_p = (Gh / c^5)^{1/2} = 5,391 \cdot 10^{-44}$ seconde. Les limites de l'univers vu comme un ordinateur sont alors :
 – Le nombre d'opérations binaires depuis le Big Bang, $(t / t_p)^2$ est égal à 10^{120} .
 – La mémoire, sans la gravitation, $(t / t_p)^{3/4}$, est égale à 10^{90} .
 – La mémoire en prenant en compte la gravitation $(t / t_p)^2 = 10^{120}$.

Que signifient ces nombres ? S. Lloyd en propose trois interprétations. (a) Ils fixent des bornes à la quantité de calculs qu'on peut attribuer à toute la matière

depuis son origine lorsque l'on interprète tout mouvement et toute évolution comme une opération binaire de calcul. (b) Ils indiquent la quantité d'opérations et de mémoire requise pour qu'un ordinateur puisse simuler l'univers dans sa totalité depuis le Big Bang jusqu'à aujourd'hui. (c) Si l'on accepte de considérer que l'univers est un ordinateur, ces nombres indiquent la caractéristique du calcul qu'il a réalisé (à la question : « Qu'est-ce que calcule cet ordinateur ? », S. Lloyd propose de répondre : la dynamique de l'univers).

L'UTILITÉ DES MATHÉMATIQUES

De tels résultats, s'ils sont confirmés, démontrent d'une manière irréfutable l'utilité du raisonnement mathématique. En effet, imaginons qu'on cherche à prouver que le nombre $n = 2^{1279} - 1$, qui possède 386 chiffres, est un nombre premier (cela peut être utile en cryptographie). Si on utilise la méthode naïve – division de n par tous les entiers de 2 jusqu'à la racine carrée de n en s'assurant de ne jamais trouver un reste nul – alors la taille du calcul dépasse 10^{192} opérations. En effet, il faut faire une division au moins pour chacun des entiers entre 2 et la racine carrée de n , et il y en a plus de 10^{192} . Même si depuis le début des temps l'univers entier s'était consacré uniquement à démontrer que $2^{1279} - 1$ est premier, il n'aurait pas réussi, car sa capacité est limitée à 10^{120} opérations binaires.

6. LA PHYSIQUE N'EST QU'INFORMATION ET CALCUL

John Archibald Wheeler a exprimé sa conception ultime de la physique comme science de l'information et du calcul. Ce manifeste fondateur d'une certaine conception informationnelle de la physique qui depuis 1990 s'est considérablement développée (travaux sur les ordinateurs quantiques, théorie quantique de l'information, assimilation de l'univers à un ordinateur, etc.) exprime l'idée que fondamentalement tout en physique n'est qu'information et calculs.

«Au niveau microscopique, il n'existe plus d'espace, de temps, d'espace-temps continu [...] la

fonction d'onde et la théorie quantique standard ne sont que des idéalizations continues qui masquent la nature informationnelle et discrète des expériences dont tout provient [...] Rien en physique n'est plus important que les phénomènes quantiques élémentaires, c'est-à-dire que l'acte fondamental de poser une question physique ayant une réponse OUI ou NON. Dit autrement encore, toute quantité physique, chaque être, tirent son sens ultime des bits ou informations binaires OUI-NON. Une conclusion qu'on peut résumer par IT from BIT [l'être provient du bit].»



Pourtant, depuis le 25 juin 1952, on sait de manière certaine que $2^{1279} - 1$ est un nombre premier et aujourd'hui on connaît des nombres premiers de plusieurs millions de chiffres. Bien sûr, les méthodes pour prouver que ces nombres sont premiers sont bien différentes de la méthode naïve et n'existent que parce que des mathématiciens les ont conçues et ont démontré, par le raisonnement, qu'elles étaient correctes. Ce qui est impossible sans les mathématiques se fait aujourd'hui de manière courante avec elles. Comme nos ressources en calcul sont limitées, raisonner n'est pas un luxe, c'est une nécessité absolue!

L'AVENIR DU CALCUL

Que tout le calcul fait dans le passé soit fini et ait été mené en n'utilisant qu'une quantité limitée de mémoire est une conséquence de la théorie du Big Bang et des principes fondamentaux de la mécanique quantique. En revanche, concernant les calculs qui pourront être faits dans l'avenir tout est plus compliqué et encore sujet à discussion.

De nombreux physiciens, dont Frank Tipler, se sont intéressés à la question fondamentale : à quelles conditions l'univers peut contenir un calcul infini, c'est-à-dire un calcul composé à la fois d'une infinité d'opérations binaires et utilisant un nombre infini de bits? La condition sur le nombre infini de bits est importante, car un calcul infini en nombre d'opérations, mais ne portant que sur un nombre borné de bits, ramène nécessairement à un moment ou à un autre le système (l'ordinateur, l'univers) dans un état antérieur, ce qui – si l'on admet que le déterminisme est valide – produit alors une répétition cyclique de la même série d'événements (l'Éternel retour). Pour que l'univers puisse contenir un authentique calcul infini, il faut que son évolution cosmologique satisfasse des conditions très particulières dont il n'est pas du tout évident qu'elles soient vraies.

Assez paradoxalement, un univers ouvert d'après F. Tipler ne convient pas car son expansion rend impossible l'échange d'informations entre parties

éloignées et donc l'existence d'une mémoire infinie utilisable. Pour F. Tipler, un calcul infini n'est possible que si, au contraire, l'univers est fermé. Cependant ce n'est pas suffisant et il faut de plus que (a) la singularité finale se réduise à un point unique et (b) que la répartition des particules élémentaires possède une certaine forme.

Nous ne discuterons pas de ces questions que les spécialistes de cosmologie étudient encore. Cependant, même si nous ne le savons pas aujourd'hui, il se peut que notre ordinateur-univers poursuive un calcul infini. Avec les théories physiques admises aujourd'hui, si le calcul passé est nécessairement fini, peut-être pas le calcul futur. L'éventualité d'un calcul futur illimité conduit à des spéculations à la frontière de la science où nous allons quand même nous laisser glisser.

Admettons donc que l'univers puisse mener un calcul infini. Il ne fait pas de doute alors qu'il constitue ce que Alan Turing a dénommé un ordinateur universel. Un ordinateur universel est une machine théorique capable, pourvu qu'on adopte le bon codage des données et qu'on la munisse du bon programme, de calculer toute fonction calculable par un ordinateur quel qu'il soit. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, les ordinateurs universels ne sont pas rares et, à une réserve près concernant la mémoire qui doit être potentiellement infinie, tout ordinateur vendu actuellement est un ordinateur universel. Si vous fournissez à votre ordinateur portable quand il le demande les compléments de mémoire dont il a besoin (par exemple en utilisant son lecteur de disquettes) alors c'est un ordinateur universel au sens de Turing.

La démonstration que des systèmes très simples sont des ordinateurs universels (le Jeu de la vie de Conway est l'un des plus élémentaires) a établi sans que persiste le moindre doute que le monde physique si son avenir satisfait les conditions permettant une mémoire infinie est un authentique ordinateur universel. Or un ordinateur universel dans un univers autorisant un calcul infini pourrait entreprendre la simulation parfaite de l'univers depuis le Big Bang. Pour cela, il suffirait de le programmer en s'inspirant du principe de dilution dans l'infini : la suite des nombres entiers $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ peut être diluée dans une suite infinie de zéros : $0, 0, 0, 0, 0, \dots$. Cette dilution est nécessaire pour qu'une partie de l'univers puisse en simuler la totalité. À cette fin on insère les nombres en les espaçant de plus en plus comme dans : $0, 1, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 5, \dots$

De même, en simulant la première nanoseconde de l'univers, ce qui pourrait prendre un temps assez long (par exemple 10^{10} années) si votre ordinateur universel n'est pas très rapide, puis la deuxième nanoseconde en prenant le temps nécessaire (par exemple 10^{20} années, car l'expansion a rendu l'univers plus complexe), puis la troisième nanoseconde en prenant le temps nécessaire (par exemple 10^{30} années) etc. On enclenche un processus de calcul qui à l'intérieur de l'univers engendre une simulation exacte de l'évolution de l'univers. Notons bien que la simulation exacte de la première nanoseconde de l'univers est en théorie possible puisque d'après les calculs de S. Lloyd elle n'a demandé qu'un nombre fini d'opérations binaires et une mémoire finie. De même pour la deuxième seconde, etc. La mécanique quantique en ramenant tout à des quantités finies autorise – en théorie – les simulations exactes de l'univers. Bien sûr, le continu dans cette conception du monde n'est qu'une illusion.

Cette simulation parfaite et totale de l'univers dans lui-même est l'équivalent du paradoxe de la bibliographie proposé par Bertrand Russell : Tristram Shandy a passé deux ans à écrire l'histoire des deux premiers jours de sa

vie, il déplorait que, ne pouvant pas aller plus vite, il lui soit impossible d'écrire son autobiographie complète ; c'est faux, fit remarquer Russell, s'il vit éternellement toute journée de sa vie sera décrite : Shandy consacrera son année de vie numéro n à l'écriture du récit de sa journée numéro n , et donc aucune journée de sa vie ne sera omise.

Revenons à l'univers. Si on imagine que nos descendants lancent une simulation parfaite de l'univers et s'arrangent pour qu'elle se poursuive indéfiniment (même si c'est très lentement), alors cela signifie en particulier que votre vie sera simulée, ce qui sera pour vous une sorte de seconde vie dans l'ordinateur. Malheureusement si la simulation est parfaite, elle sera en tout point identique à votre première vie et votre conscience simulée ne saura pas qu'elle n'est que le résultat d'une simulation et non pas une vraie vie... peut-être d'ailleurs êtes-vous en ce moment non pas dans le véritable univers, mais dans sa simulation ?

Explorons encore plus avant cette étrange idée. La simulation exacte contiendra en elle-même la simulation de la simulation, qui elle-même... Ce n'est donc pas une fois seulement que votre vie sera reproduite dans l'ordinateur simulant l'univers, mais une infinité de fois ! Plus troublant encore, avec cet ordinateur universel véritable, on pourrait s'amuser à simuler des variantes de l'univers, par exemple des variantes dans lesquelles votre vie au lieu de s'arrêter brusquement en 2050 se poursuivrait 20 ans de plus. Pourquoi ne pas imaginer que la variante de la simulation soit telle que vous soyez immortel ? Si c'est possible, nos descendants ne résisteront pas à la tentation de se rendre ainsi immortels... et peut-être nous avec !

Un ordinateur universel pourrait simuler tous les univers possibles : il commencerait par n'en simuler qu'un en n'utilisant ses ressources d'une manière diluée, puis avec les capacités restantes en simulerait un autre, encore de manière diluée, etc. Les univers envisageables dans le cadre de

la théorie du Big Bang et de la mécanique quantique ne demandent pour être simulés jusqu'à un instant t qu'un nombre fini d'opérations binaires et de mémoires, ils peuvent donc être exhaustivement énumérés et simulés par un unique ordinateur universel convenablement programmé. Dans un tel calcul, tous les univers physiques possibles sont simulés et donc vous y êtes, y compris dans des versions de vous-même variées à l'infini.

Tout cela paraît délirant, pourtant ces considérations ne résultent que de la prise au sérieux des théories dont on admet qu'elles sont les plus vraisemblables pour rendre compte du monde physique.

Face à ces considérations inquiétantes trois attitudes sont possibles.

– On peut décréter que, sans doute, les théories véritables rendant compte du monde ne sont pas celles qu'on a utilisées pour arriver à tout cela. Puisque les théories scientifiques sont régulièrement remplacées par de nouvelles théories contredisant les précédentes, cette attitude semble raisonnable et tentante, bien qu'elle laisse sans réponse la question : si on ne doit pas prendre au sérieux les conséquences des théories les mieux vérifiées, que doit-on prendre au sérieux ?

– On peut considérer que c'est seulement la possibilité d'un calcul infini qui doit être contestée : les hypothèses cosmologiques autorisant qu'un authentique calcul infini se déroule ne sont sans doute pas satisfaites, et donc aucune simulation parfaite de l'univers ne sera jamais possible. N'est-ce pas un peu facile ?

– On peut considérer à l'opposé comme le propose F. Tipler dans son étrange livre *The Physics of Immortality* que le monde ne peut pas être fini ou cyclique et qu'il doit donc être configuré de telle façon qu'un calcul infini y soit possible avec tout ce qui s'ensuit. F. Tipler en tire une sorte de christianisme scientifique qui surprend quelque peu, et qui malgré une incontestable cohérence, à ma connaissance n'a pas soulevé beaucoup d'enthousiasme, ni chez les croyants ni chez les athées.

À vous de choisir.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique théorique à l'Université de Lille.

Philip BALL, *Life Can Go Forever. An Accelerating Universe Does Not Have to Fry Life*, in *Nature*, 20520-11, mai 2002.

Charles BENNETT et **Rolf LANDAUER**, *Les limites physiques du calcul*, in *Pour la Science*, pp. 18-27, septembre 1985.

Seth LLOYD, *Ultimate Physical Limits to*

Computation, in *Nature*, vol. 406, pp. 1047-1052, 2000.

Seth LLOYD, *Computational Capacity of the Universe*, in *Physical Review Letters*, vol. 88, n° 23, 237901/1-4, 2002.

Norman MARGOLUS et **L.B. LEVITIN**, *The Maximum Speed of Dynamical Evolution*, in *Physica*, D 120, pp. 188-195, 1998.

Frank TIPLER, *The Physics of Immortality*, Doubleday, New York, 1994.



Attraction fractale

RICHARD TAYLOR

Les secrets des œuvres de Jackson Pollock, un maître de l'art abstrait, révélés par l'analyse informatique : elles sont fractales !

Au début des années 1940, le peintre américain Jackson Pollock (1912-1956) quitte Manhattan pour s'installer dans une maison à Long Island, dans l'État de New York. Là, une vieille grange lui sert d'atelier, un immense atelier où, selon les critiques, l'art moderne a été bouleversé. En effet, les petites toiles installées verticalement sur un chevalet deviennent trop étroites pour l'artiste. Il leur préfère d'autres en grand format, de plusieurs mètres carrés de surface, posées à même le sol. Le pinceau est alors relégué au placard au profit d'un

long bâton d'où s'écoule une peinture fluide qui laisse sur la toile la trace des mouvements de l'outil. Au final, l'œuvre est un entrelacs inextricable de trajectoires colorées (voir *Blue Poles* : numéro 11, sur la page ci-contre).

À l'opposé du peintre néerlandais Piet Mondrian (1872-1944), chantre de l'abstraction artificielle et géométrique, Pollock prône une peinture « naturelle et organique. » En quoi les œuvres de Pollock reflètent-elles la nature ?

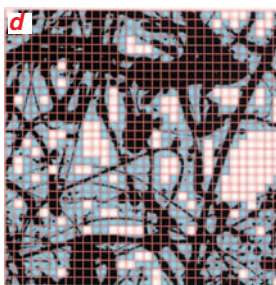
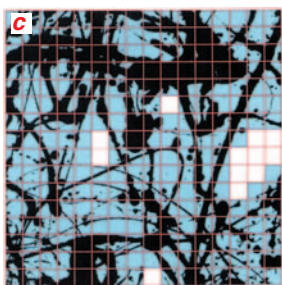
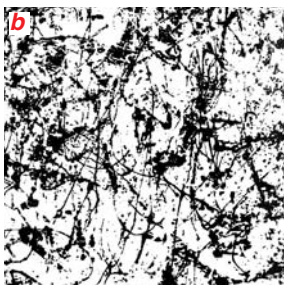
À l'époque de Pollock, la nature semblait désordonnée et régie par le hasard. Pourtant, pendant les années 1960,

l'étude de la dynamique des systèmes naturels a donné naissance à la théorie du chaos. Puis, dix ans plus tard, Benoît Mandelbrot a jeté les bases de la géométrie fractale. On comprenait enfin la forme des nuages, des montagnes, des côtes maritimes... Aujourd'hui, l'analyse informatique des œuvres de Pollock révèle que les fractales sont aussi au cœur de l'art abstrait.

Les objets de la géométrie classique ont pour dimensions des nombres entiers, par exemple, le plan est de dimension deux. Toutefois, en géométrie fractale, certains éléments, tel le triangle de Sierpinski (voir la figure à côté du titre), ont pour dimension des nombres non entiers. Comment détermine-t-on la dimension fractale d'un objet ? Par exemple, un carré C peut être divisé en $N = 4$ petits carrés identiques au premier selon un rapport d'homothétie de facteur $f = 2$, ou bien, 16 petits carrés identiques au premier selon un rapport d'homothétie de facteur quatre. Les mathématiciens définissent la dimension d du carré C par $\text{Log } N / \text{Log } f$, ici, $d = \text{Log } 4 / \text{Log } 2 = \text{Log } 16 / \text{Log } 4 = 2$. Pour le triangle de Sierpinski, $d = 1,58$.

L'une des propriétés des objets fractals est l'autosimilarité : une partie agrandie est identique à l'objet entier. Toutefois, on distingue l'autosimilarité exacte, telle celle du triangle de Sierpinski, et l'autosimilarité statistique, quand un détail n'est pas rigoureusement identique à l'ensemble, mais que les propriétés statistiques sont conservées. La plupart des motifs naturels fractals ne sont qu'autosimilaires statistiquement. Est-ce le cas des tableaux de Pollock ? Si oui, quelle est leur dimension fractale ?

Le tableau *Autumn rhythm* (voir la figure), peint en 1950, est composé de quatre couleurs : noir, marron, blanc et gris. À l'aide d'un ordinateur, on sépare les différentes couches du tableau numérisé. D'abord, on s'intéresse à la couche noire, dite d'ancrage, qui constitue le



L'analyse du caractère fractal du tableau *Autumn rhythm* (a) requiert sa numérisation, puis la séparation des couches de différentes couleurs. Sur la couche noire, par exemple (b, ici un détail), on superpose une grille de carrés égaux (c), puis l'on compte les carrés (en bleu) traversés par le motif peint (les carrés vides sont en blanc). On répète l'opération avec des grilles de carrés plus petits (d). Au final, on observe que le logarithme du nombre de carrés bleus « traversés » est proportionnel au logarithme de la taille des carrés élémentaires : le motif noir est fractal, et le quotient en est la dimension. Il en est de même pour toutes les couches colorées ainsi que pour l'ensemble du tableau.

Metropolitan Museum of Art, New York. ©2002 Pollock-Krasner Foundation/ Artists Rights Society (ARS), New York

Courtesy Richard P. Taylor

National Gallery of Australia, Canberra. ©2002 Pollock-Krasner Foundation/ Artists Rights Society (ARS), New York