

l'hexahexaflexagone sous le nom de *Kaleidoscope* (voir : <http://www.halfpast.demon.co.uk/html/tt.html>).

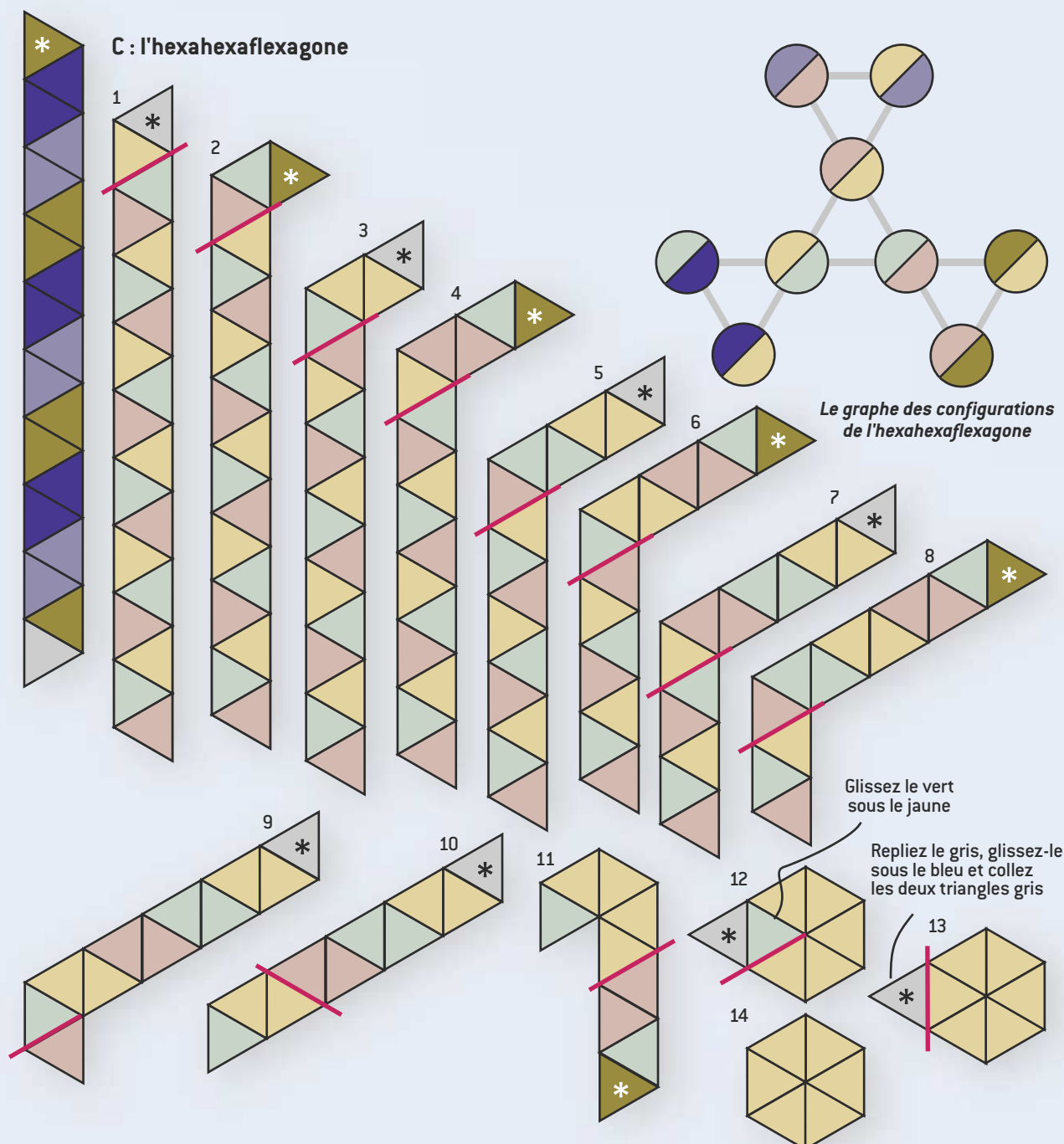
La construction des flexagones ayant un très grand nombre de faces est délicate ; toutefois, à condition de prendre des feuilles assez grandes et de mener les découpages et assemblages avec soin, des flexagones à 30 ou même 50 faces ne semblent pas impossibles. Qui ira le plus loin ? Envoyez-moi vos constructions (avec le graphe des configurations), je donnerai dans cette rubrique le nom des gagnants ainsi que les caractéristiques de leurs flexagones.

Si à la place de triangles vous utilisez des carrés, une nouvelle sorte de flexagones peut être obtenue qui, elle aussi, a été largement étudiée. On les dénomme des tétraflexagones. En fait des flexagones utilisant des carrés, des pentagones et

toutes sortes de figures de bases ont été imaginés, créés et analysés. Pour approfondir cet art géométrique et combinatoire vivant, en plus du livre de Les Pook déjà cité vous devez consulter l'adresse internet : <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/oldweb/pflexagon.html>. Vous y trouverez des articles sur le sujet et même le texte inédit d'un projet de livre de 1962 consacré aux flexagones.

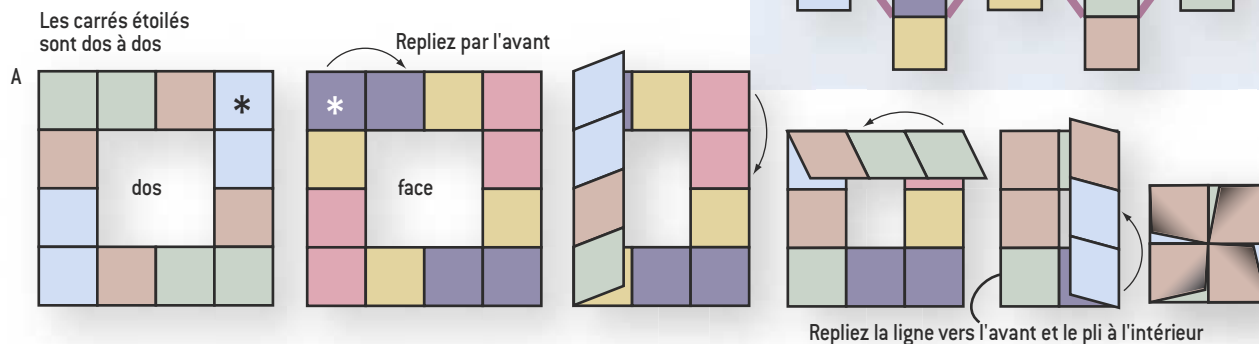
Sans utiliser la colle !

Malgré l'ancienneté du sujet et les nombreux travaux menés, une nouvelle famille de flexagones a récemment été découverte. L'élégance de ces nouveaux pliages montre que, même après des dizaines d'années d'étude, certaines



l'hexahexaflexagone vous en changez la configuration, ce que vous voyez, car les couleurs des faces se modifient. À chaque flexage, la face qui

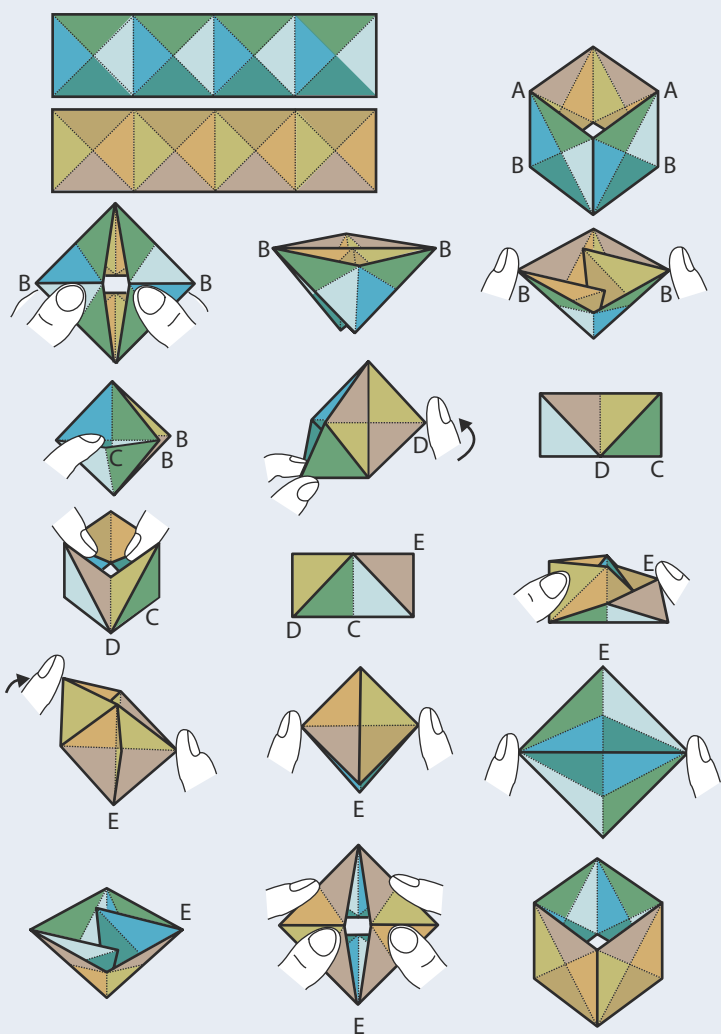
disparaît est remplacée par une nouvelle face : les triangles qui la composent changent d'orientation.



4. Vous pouvez aussi faire des flexagones sans colle !

En voici un premier exemple : (A) le pliage symétrique de la feuille trouée. La dernière des quatre opérations de pliage nécessite une très délicate manipulation pour que la face en bas à gauche, qui se place natu-

rellement sur le dessous (lorsqu'on replie les quatre derniers carrés), se retrouve au-dessus. Le résultat final est une forme rigide (elle ne se déplie pas d'elle-même) qui reste identique quand vous faites tourner le pliage d'un quart de tour (elle est invariante par rotation de 90 degrés).



5. Le flexatube. Bien que découvert en 1939 par Arthur Stone l'inventeur des flexagones, le flexatube n'est pas très connu. C'est pourtant un magnifique casse-tête facile à fabriquer soi-même. On marque des plis comme le dessin l'indique dans une bande rectangulaire 4×1 . On referme la bande, ce qui donne un anneau. Le problème est de retourner l'anneau (l'intérieur doit devenir l'extérieur et réciproquement) en utilisant uniquement les plis marqués, c'est-à-dire en faisant comme si chaque triangle rectangle dessiné était en carton rigide. L'étonnant est que c'est possible comme le montre la suite de dessins. Avec un tube plus long (quelle que soit sa longueur), le retournement reste possible, mais bien sûr nécessite une mosaïque plus fine de triangles.

questions simples et leurs solutions échappent à toute une communauté de passionnés. Robert Neale s'est demandé si on ne pouvait pas créer des flexagones sans collages. Il a trouvé plusieurs objets répondant à cette condition.

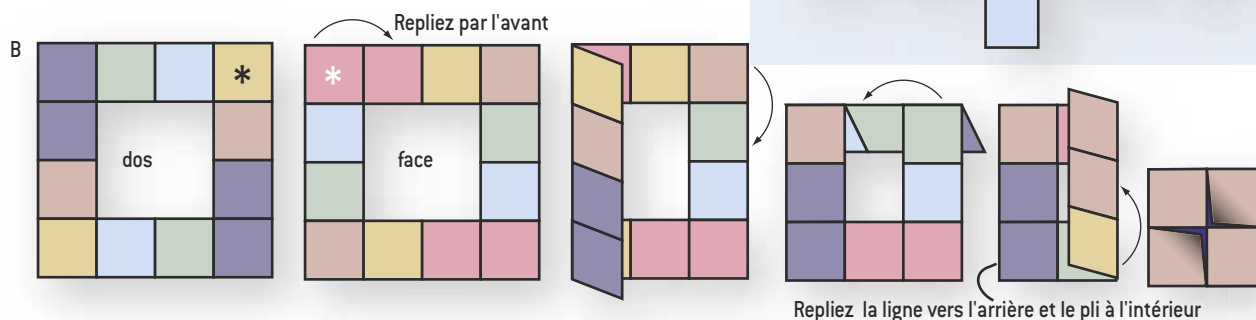
Partant d'une feuille de papier carrée (ou rectangulaire) à la surface de laquelle on a fait apparaître un quadrillage régulier de 16 carrés (ou rectangles), on découpe les 4 carrés (ou rectangles) centraux. Avec cette feuille trouée en main, deux pliages astucieux produisent deux flexagones très commodes pour faire de micro-albums photos (il faut coller les photos *après* avoir plié le support à cause de la manipulation spéciale décrite plus bas).

Le premier pliage que nous dénommerons « pliage symétrique » consiste à replier les quatre carrés situés à gauche – vers l'avant –, puis les quatre carrés du haut – vers l'avant –, puis les quatre carrés de droite – vers l'avant –, puis enfin les quatre carrés du bas – toujours vers l'avant (voir la figure 5a). Attention cependant, le dernier pliage doit être accompagné d'une manipulation un peu délicate permettant au résultat final d'être invariant par rotation d'un quart de tour: il faut lors du dernier pliage faire passer le carré de papier, qui sans manipulation particulière se serait trouvé tout en dessous en bas à gauche, par-dessus les deux autres de la même pile.

Cette opération serait impossible si les 12 carrés étaient rigides, mais grâce à la souplesse du papier on peut y arriver... sans rien déchirer. Le résultat est une configuration stable: si vous jetez votre flexagone sans colle correctement plié, il ne se défait pas et pour revenir à la feuille trouée dépliée, il faut nécessairement à un moment ou un autre forcer le pliage.

Si vous avez réussi le pliage, le flexagone peut s'ouvrir de quatre façons différentes – c'est l'opération de flexage pour ce type de flexagones – vous amenant dans quatre configurations nouvelles. Une sixième et une septième configurations existent aussi. La forme du graphe des sept configurations est une double boucle (voir la figure 4A).

Le second pliage du carré troué, que nous dénommerons « pliage asymétrique », consiste à replier alternativement les quatre carrés de la colonne de gauche – vers l'avant –, puis les quatre carrés du haut – vers l'arrière –, puis les quatre carrés de droite – vers l'avant –, puis enfin les quatre carrés du bas – vers l'avant. Attention, comme

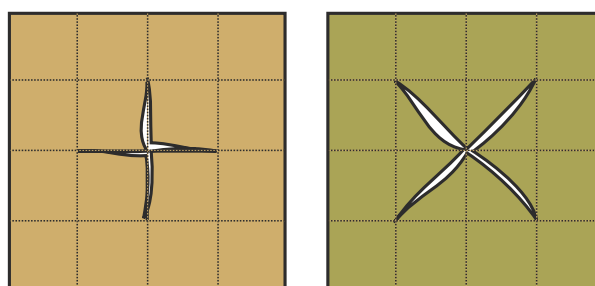


Cette forme est un des tétraflexagones sans colle de R. Neale : il possède six faces et peut se trouver dans sept configurations différentes. Autre exemple, [B] : le pliage asymétrique de la feuille trouée. Comme précédemment, il faut, lors de la dernière étape, permuter les carrés

en bas à gauche pour que celui qui se place naturellement au-dessus se retrouve en dessous. Si vous utilisez le coloriage destiné au pliage asymétrique et que vous faites le pliage symétrique, vous observerez une disposition intéressante...

précédemment, le dernier pliage doit être accompagné d'une manipulation (assez délicate à faire, mais il faut se laisser guider par le résultat à obtenir) faisant passer sur le dessus, le carré de papier qui sans manipulation particulière se serait trouvé en dessous dans le coin en bas à gauche. Le graphe des configurations cette fois ne comporte que 6 nœuds et c'est un carré muni de tiges conduisant à des configurations isolées (un peu plus difficiles à découvrir que les autres).

Les deux pliages particuliers que vous venez d'apprendre vous seront utiles pour quatre autres flexagones sans colle inventés par R. Neale. Partant cette fois d'une feuille de papier carrée avec quadrillage à 16 carrés (ou rectangles) mais sans trou, faites une entaille en forme de + et faites le pliage symétrique ou le pliage asymétrique (voir la figure 6). Nous vous laissons le plaisir de trouver vous-même les graphes des configurations de ces deux flexagones. En partant d'une entaille en forme de x, vous obtiendrez encore deux flexagones nouveaux, l'un avec le pliage symétrique, l'autre avec le pliage asymétrique. Amusez-vous bien. Y a-t-il d'autres flexagones sans colle à découvrir ?



6. Feuilles à entailles. En utilisant des feuilles entailées par un + ou un x comme l'indique le dessin et en opérant des pliages symétriques ou asymétriques (décrits sur les figures 5A et 5B), vous obtiendrez quatre nouveaux flexagones « sans colle » dont nous vous laissons le plaisir de découvrir l'espace des configurations.

rectilignes se généralise à des tubes aussi longs que l'on veut à condition bien sûr de faire un plus grand nombre de plis initiaux. À ma connaissance, le même problème avec non plus un tube, mais un sac (l'une des extrémités de la boîte est fermée) n'est pas résolu : peut-on retourner une boîte dont la surface est faite de polygones rigides reliés ? Si c'est possible, quels polygones faut-il choisir pour réussir le retournement de la boîte et quel est le détail des manipulations ? Toujours si c'est possible, quel est le nombre minimum de polygones que délimiteront les plis permettant le retournement d'une boîte à faces carrées ? La corne d'abondance des flexagones est encore pleine.

Le flexatube

Pour ceux qui aiment les casse-tête et les pliages, une des découvertes, qu'Arthur Stone fit en manipulant ses flexagones, mérite d'être plus connue, car elle est à la fois troublante et très belle. Il s'agit de ce qu'on appelle le flexatube. Partant d'une feuille de papier de taille 4×1 (4 carrés côte à côte) colorée en noir d'un côté et en blanc de l'autre, vous marquez quatre plis sur chaque carré, d'abord en suivant les deux diagonales, puis en suivant la verticale et l'horizontale passant par le centre. Vous joignez ensuite les deux extrémités de la bande que vous fixez avec du papier adhésif (voir la figure 5). Cela vous conduit à une sorte de cylindre à section carrée, autrement dit à une boîte cubique sans fond ni couvercle.

Le but du casse-tête est d'inverser l'intérieur et l'extérieur, en n'utilisant que les plis marqués avant le collage. L'opération est possible, mais n'est pas évidente. En fait, il y a deux solutions très différentes, mais aucune n'est facile (la figure 5 en propose une). Ce retournement d'un tube aussi large que haut en n'utilisant qu'un nombre fini de plis

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Univ. de Lille.

Martin GARDNER, *Flexagons*, in *Scientific American*, pp. 162-166, déc. 1956.

Les POOK, *Flexagons Inside Out*, Cambridge University Press, 2003.

Robert NEALE, *Self-Designing Tetraflexagons*, in *The Mathemagician and Pied Puzzler. A Collection in Tribute to Martin Gardner*, sous la direction de Elwyn Berlekamps et Tom Rodgers, A. K. Peter, Ltd, Natick, MA, 1999.

Harold MCINTOSH, *A Quick Flexagon Survey*, 2003 : <http://delta.cs.cinvestav.mx/~ffmcintosh/oldweb/pflexagon.html>

Highland Game : <http://www.halfpast.demon.co.uk/html/tt.html>. Boutique en ligne proposant des flexagones dont (a) le flexatube nommé *Table Teaser* ; (b) le trihexaflexagone nommé *Crafty coaster* ; (c) le hexahexaflexagone nommé *Kaleidoscope*.

David MITCHELL, *The Magic of Flexagons*, Norfolk, England, 1998.

Escher et la double quête de l'infini

Escher parvient, par un génial tâtonnement graphique, à ses pavages infinis du plan. Il en révèle les lois avant les mathématiciens et les physiciens.

Comment est-ce possible ? Comment les lézards de la gravure *De plus en plus petit* convergent-ils vers le centre, si étroitement imbriqués qu'ils recouvrent tout le plan en un tourbillon central (page ci-contre) ? C'est le grand art de Maurits Cornelis Escher (1898-1972) qui combine deux caractéristiques rares, les idées géométriques incongrues et la qualité de la réalisation.

La gravure *De plus en plus petit* a une histoire qui commence en juillet 1941, à Baarn aux Pays-Bas. Escher travaille alors à l'élaboration d'un cahier résumant par l'image ce qu'il a acquis concernant les pavages, notamment par des voyages à l'Alhambra de Grenade où il a admiré les mosaïques et leurs symétries. Il représente dans son cahier le « système XE » (figure 1) composé de figures construites à partir de triangles rectangles isocèles et ayant les mêmes symétries que ces triangles : un centre de rotation de 180 degrés au milieu de l'hypoténuse et un centre de rotation de 90 degrés au sommet du triangle (pour les puristes, c'est le type isoédrique IH79 défini par B. Grünbaum et G. C. Shepard dans le livre *Tilings and Patterns*). Sur son esquisse XE sont dessinées les déformations compensées des côtés qui confèrent à la nouvelle figure en grisé la même aire que celle du triangle de base. La symétrie de 180 degrés sur l'hypoténuse fait que ce qui est en creux dans une moitié est, par rapport au côté, en relief sur l'autre moitié. Et, par la rotation de 90 degrés, le relief d'un petit côté devient un creux dans le côté tourné.

Car Escher cherche à transformer les déformations des triangles en un contour plus figuratif : il change un sévère triangle rectangle isocèle en un lézard (figure 2) et les rotations sont mieux explicitées sur la figure 3. Il dessine alors son pavage du plan par des lézards dans un autre cahier

réservé aux pavages réussis (figure 4). Sur la base de ce pavage du plan, il va réaliser un pavage « fractal », bien avant que le mot ne soit inventé. En 1956, dans sa quête de représentation de l'infini, il a l'idée d'un schéma dont l'algorithme est le suivant : un triangle rectangle isocèle engendre deux triangles adjacents plus petits (rapport 1/2) ayant chacun subi une rotation, et ainsi de suite (figure 5). Mais le triangle de base doit satisfaire de nouvelles caractéristiques, très contraignantes pour la réalisation d'un motif figuratif et Escher ne trouve pas de motif satisfaisant.

Il ne renonce pas et inverse le sens des triangles. C'est alors qu'il repense à son lézard dessiné 15 ans auparavant. Et alors, divine surprise, celui-ci peut être adapté ! Comme son contour est obligatoirement imparfait, la base de la tête, par exemple, ne peut pas être à la même hauteur de chaque côté (figure 6), et le magicien Escher va user de trucs pour rétablir la qualité du dessin. Les lézards semblent identiques, mais il n'en est rien et il dessine neuf modèles de lézards différents afin de donner à l'ensemble une forme parfaite. Ainsi a été conçue l'estampe *De plus en plus petit*. Conçue, pas créée, car Escher ne s'est jamais pris pour un créateur, mais plutôt pour un révélateur de l'ordre naturel et des lois de l'espace. Ainsi, il dit, dans *Openbaar kunstbezit*, en 1957 : « C'est une sensation que je ressens chaque fois que j'exécute un projet de remplissage périodique d'un plan. Il me semble que ce n'est pas "moi" qui décide des formes, mais que ces simples taches sur lesquelles je me penche ont leur propre volonté, que ce sont elles qui guident le mouvement de ma main. »

Alain NICOLAS est spécialiste de la géométrie d'Escher. Son livre, *Parcelles d'infini, Promenade au jardin d'Escher*, est en cours d'édition.

