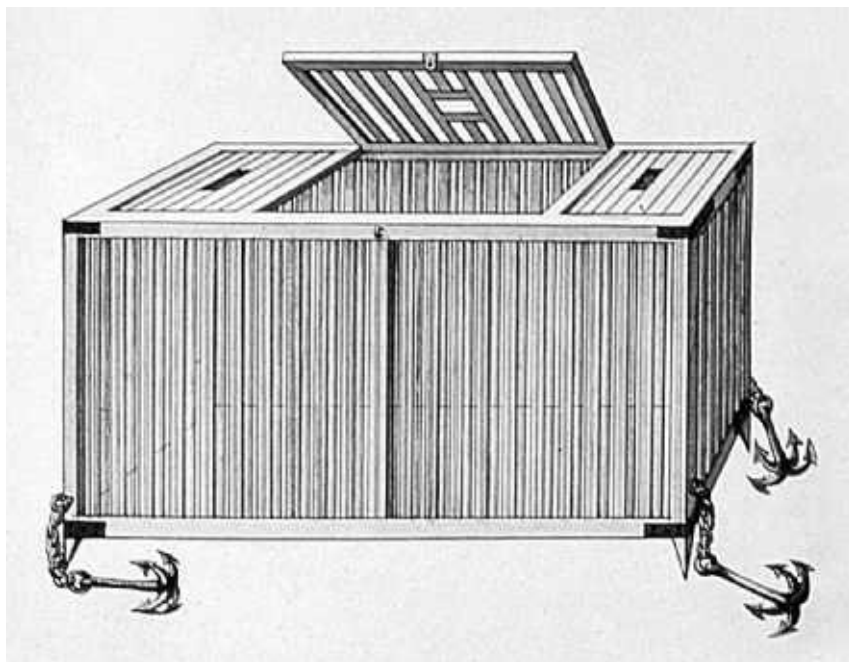




© Bibliothèque centrale M.N.H.N. Paris

3. LA « CAGE À LA POWER », aquarium en bois muni d'ancres que Jeanne Villepreux-Power conçut pour étudier l'argonaute dans son milieu naturel : posée sur le sol marin à une profondeur laissant la partie supérieure émergée, elle permettait à la naturaliste de maintenir ses spécimens dans de bonnes conditions physiologiques tout en les gardant à portée de main.

✓ BIBLIOGRAPHIE

Jeannette Power, *Guida per la Sicilia*, (réimpr. sous la dir. de Michela D'Angelo), Istituto di studi storici Gaetano Salvemini, 2008 [1842].

Claude Arnal, *Jeanne Villepreux-Power 1794-1871. Le destin exceptionnel d'une naturaliste oubliée*, Musée du Cloître de Tulle, 2007.

Nadine Lefebure, *Femmes océanes. Les grandes pionnières maritimes*, Glénat, 1995.

Claude Duneton, *La Dame de l'argonaute* [roman], Denoël, 2009.

La deuxième série de la collection de Jeanne Villepreux-Power est constituée d'œufs d'*Argonauta argo* à différents stades de développement. Cette série montre l'absence de coquille à ces stades. La présentation d'un tel résultat peut sembler paradoxale puisqu'elle sert l'hypothèse du parasitisme, mais il s'agit là de valider le sérieux et la crédibilité du témoignage de la naturaliste.

Enfin, une troisième série comprend six coquilles témoins de l'expérimentation de Jeanne Villepreux-Power. Un fragment a été retiré à chacune d'elles du vivant de l'argonaute. La coquille a ensuite été séparée de son occupant entre dix minutes et deux mois après la fracture. Ces coquilles représentent donc la séquence de réparation de la coquille par l'argonaute. On observe tout d'abord une fine membrane transparente à l'endroit du prélèvement ; puis, un dépôt calcaire se forme peu à peu sur cette membrane, prolongeant une partie intacte de la coquille. Si la réparation est d'abord bien visible, la différence s'atténue avec le temps. L'expérience invalide ainsi les doutes de Rang qui, lors de la même expérience, trouvait que la structure de la réparation différait trop de celle de la coquille intacte.

Owen pose cette importante collection comme suffisante pour affirmer ou infirmer les positions de Jeanne Villepreux-Power. Elle lui permet de s'opposer directement aux six premières observations de de Blainville. Il ne lui reste alors qu'à infirmer ses deux derniers postulats. Pour Owen, l'absence de perturbation du mollusque lors des expériences de séparation de la coquille prouve qu'il n'a pas un besoin instinctif de voler une coquille comme chez les parasites, bernard-hermite en tête. En outre, les observations de Villepreux-Power et de Rang indiquent que l'argonaute finit par succomber à la séparation. Enfin, contre l'ultime argument de de Blainville selon lequel un individu sans coquille constituerait le représentant d'une nouvelle espèce, Owen souligne que la définition qui en a été donnée demeure si vague qu'elle peut être appliquée à tous les *Octopus* et que, ainsi tirée dans le sens du parasitisme, elle en est d'autant moins crédible.

Estimée, puis oubliée

Le talent de Jeanne Villepreux-Power a été d'imaginer et de construire un système expérimental, de maintenir les argonautes en vie dans ses aquariums et de conserver correctement les spécimens pour amener la preuve jusque dans les institutions et l'y défendre. En effet, plus que par l'expérience et l'observation *in situ*, c'est en déplaçant une collection d'échantillons impeccable que cette « accomplished lady » a pu convaincre de ses thèses scientifiques, tant en Sicile qu'à Londres.

Affiliée à une quinzaine d'académies des sciences en Europe, Jeannette Power est élue membre correspondant de la *Zoological Society* en 1839. Au début des années 1840, le couple quitte l'île pour Paris et Londres, où elle tente de compléter ses travaux malgré la disparition de ses collections lors du naufrage du *Bramley*. À la fin des années 1850, elle publie des travaux de ses années messinoises, en partie pour faire valoir son antériorité dans une époque férue de biologie marine et d'aquariums. Après une ultime publication originale sur les corps météoriques, elle s'éteint à 77 ans dans son village natal et sombre peu à peu dans l'oubli. ■



www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

metro

images
DOC

bayard

OKAPI

POUR LA
SCIENCE

NRJ
HIT MUSIC ONLY !

fête de la SCIENCE

21 au 24 octobre 2010

www.fetedelascience.fr

LOGIQUE & CALCUL

Les nombres premiers insolites

Repérer les nombres premiers dotés des plus étranges propriétés est un passe-temps qui demande imagination, persévérance et savoir-faire arithmétique.

Jean-Paul DELAHAYE

L' amour des mathématiques conduit les esprits sérieux à s'attaquer à des problèmes reconnus difficiles, dont la résolution nécessite abnégation, abstraction et aptitudes hors du commun. Pour les esprits simplement amoureux des nombres et des structures combinatoires, un travail mathématique d'une autre nature et plus facile à partager avec autrui demande uniquement imagination et patience.

Les Américains Chris Caldwell et Garland Honaker viennent de publier un livre, *Prime Curios ! The Dictionary of Prime Number Trivia* (Curiosités premières. Le dictionnaire des nombres premiers futiles). Cet ouvrage est le meilleur exemple de mathématiques sans prétention, intéressantes, pratiquées pour le plaisir et l'amusement. Dans cette rubrique, en mai 2009, nous parlions des dictionnaires de nombres de toutes sortes. Ici, il s'agit d'un dictionnaire très spécialisé et purement ludique. Nous allons voir cependant

que son élaboration a exigé une créativité et une passion hors du commun.

Un nombre premier pour la nitroglycérine

Le jeu consiste à rechercher parmi les nombres premiers – ou parfois les nombres entiers ayant un rapport avec les nombres premiers – ceux qui ont un intérêt inattendu. Cet intérêt sera dû à une ou plusieurs propriétés surprenantes et simples, ou pas trop

1. Le nombre premier 313 est spécialement intéressant

Tous les nombres premiers assez petits possèdent bien sûr des propriétés particulières. Mais parmi les nombres premiers de trois chiffres, le nombre 313 est particulièrement intéressant. Voici quelques-unes de ses propriétés remarquables.

- 313 est un nombre premier palindrome (on peut le lire de droite à gauche ou de gauche à droite).
- 313 écrit en base 2 est encore un nombre palindrome : 100111001. Plus étonnant, le nombre dont l'écriture en base 10 est 100111001 est encore un nombre premier palindrome.
- $10^{313} + 313$ est encore un nombre premier.
- 313 est la somme de deux carrés consécutifs : $313 = 12^2 + 13^2$.
- Si 313 personnes sont choisies au hasard, la probabilité pour que cinq d'entre elles aient le même jour anniversaire dépasse 50 %, et 313 est le plus petit nombre ayant cette propriété.



- 313 est le plus petit nombre « faiblement premier » en base 5 : écrit en base 5, si vous changez un seul de ses chiffres, vous obtenez toujours un nombre composé.
- 313 est le numéro de la plaque d'immatriculation de Donald depuis 1938 quand il apparaît dans les dessins de Walt Disney.
- En intervertissant les 1 et les 3 dans 313, ce qui donne 131, on obtient un autre nombre premier palindrome.
- L'équation $313(x^3 + y^3) = z^3$ est une équation remarquable, car ses plus petites solutions en nombres entiers comportent plus de 1 000 chiffres.
- 313 est le septième nombre premier dont la somme des chiffres est 7.
- $1/313$ donne une suite de chiffres décimaux qui ne se répète que lorsque l'on arrive à la 313^e décimale.
- D'autres propriétés sur : <http://primes.utm.edu/curios/page.php?short=313>

compliquées, qui montrent à l'évidence que le nombre sélectionné mérite d'être connu et mis en valeur... du moins pour tous ceux qui ont le goût de l'étrangeté mathématique. Voici d'abord six exemples.

- 987 654 103 mérite une attention particulière, car c'est le plus grand nombre premier dont tous les chiffres sont différents.
- 3 539 est un premier remarquable, car $C_3H_5N_3O_9$ est la formule de la nitroglycérine.
- 21 322 319 est le plus petit nombre premier autodescriptif : quand on en compte les chiffres, cela le reconstitue, car il comporte deux « 1 », trois « 2 », deux « 3 » et un « 9 ».
- 85 837 vérifie l'égalité :
 $85837 = 8! + 5! + 8! + 3! + 7! + (8 + 5 + 8 + 3 + 7)$;
 c'est le seul nombre premier possédant cette propriété.
- 43 252 003 274 489 855 999 est le nombre de configurations dérangées du cube de Rubik et c'est le nombre premier préféré de G. Honaker. Avec la position rangée du cube, cela fait 43 252 003 274 489 856 000 configurations possibles au total.
- 905 est un entier intéressant. En effet, la plupart des nombres impairs s'écrivent comme la somme d'un nombre premier et

d'une puissance de 2 : $3 = 2 + 1$, $5 = 3 + 2$,
 $7 = 3 + 4$, $9 = 7 + 2$, $11 = 7 + 4$, $13 = 5 + 8$,
 $15 = 7 + 8$, $17 = 13 + 4$, $19 = 3 + 16$, $21 = 5 + 16$,
 etc. Les exceptions, dénommées parfois *nombres obstinés*, sont en nombre infini, mais ont une faible densité. L'entier 905 est le plus petit nombre obstiné composé.

Le fruit d'un travail collaboratif

Le dictionnaire n'est pas le résultat du travail de deux auteurs seulement et se fonde sur les richesses patiemment accumulées du site Internet *Prime Curios* : <http://primes.utm.edu/curios/>

Toute une communauté d'amateurs depuis des années enrichit la collection de ce site auquel tout le monde peut contribuer. Le dictionnaire qui vient d'être publié est composé d'une sélection opérée en 2009 des meilleures trouvailles du site. Il est destiné à être emmené avec soi, en métro, dans la salle d'attente de votre médecin, sur la plage ou pour faire la queue à la poste. Un paragraphe à la fois, vous en dégusterez au hasard les meilleures définitions. Sur votre lieu de travail... vous pourrez discrè-

tement poursuivre l'exploration en vous connectant au site Internet où vous utiliserez la fonction *random* de la page principale qui vous fera découvrir les nombres et définitions qui enrichissent chaque jour la base de données *Prime Curios*.

Peut-être voudrez-vous être l'un des collaborateurs du site et voir votre premier personnel donner naissance à une nouvelle page où votre nom apparaîtra. Pour cela, il faut imaginer une définition nouvelle qui n'exige pas plus de 100 caractères, à laquelle correspondra un nombre en rapport avec les nombres premiers. Il faut bien sûr que personne n'ait proposé la même curiosité avant vous.

Chaque responsable du site (et auteurs du livre) a son propre rôle. G. Honaker est l'éditeur de contenu et c'est lui qui est à l'origine de cette collection commencée il y a quinze années. Il décide de l'acceptation d'une proposition nouvelle et rédige les pages avec les définitions. Ch. Caldwell joue le rôle d'éditeur technique. Il gère les aspects informatiques du site et en particulier la mise en page des données, les programmes qui engendrent les index et les sauvegardes.

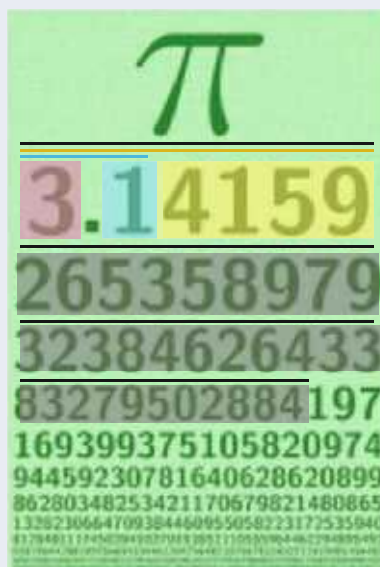
2. Quelques différents types de nombres premiers

A. Les **bons nombres premiers** : par définition, ils doivent être strictement supérieurs à la moyenne géométrique du nombre premier qui les précède et du nombre premier qui les suit : $(p_n)^2 > p_{n-1} p_{n+1}$. Voici la liste : 5, 11, 17, 29, 37, 41, 53, 59, 67, 71, 97, 101, 127, 149, 179, 191, 223, 227, 251, 257, 269, 307, 311, 331, 347, 419, 431, 541, 557, 563, 569, 587, 593, 599, 641, 727, ...

B. Les nombres premiers de Fibonacci
sont bien sûr les nombres de la suite de Fibonacci ($F(0) = 1$, $F(1) = 1$, $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$ pour $n > 1$) qui sont, en outre, premiers.

2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28657, 514229,
433494437, 2971215073, 99194853094755497,
1066340417491710595814572169,
19134702400093278081449423917...

C. Les π -nombres premiers qui sont les nombres premiers qu'on trouve quand on considère les n premières décimales du nombre



$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\dots$
On en connaît aujourd'hui sept (**nous donnons les premiers**) correspondant à $n = 1$ (3), 2 (31), 6 (314159), 38, 16208, 47577, 78073. Celui correspondant à 78073 a été trouvé en 2006.

D. Les **nombre premiers factoriels** : ce sont ceux de la forme $n! + 1$ ou $n! - 1$.

Ceux de la forme $n! - 1$ correspondent aux valeurs de n suivantes : 3, 4, 6, 7, 12, 14, 30, 32, 33, 38, 94, 166, 324, 379, 469, 546, 974, 1963, 3507, 3610, 6917, 21480, 34790.

Ceux de la forme $n! + 1$ correspondent aux valeurs de n suivantes : 0, 1, 2, 3, 11, 27, 37, 41, 73, 77, 116, 154, 320, 340, 399, 427, 872, 1 477, 6 380, 26 951. On n'en connaît pas d'autres, car la fonction factorielle croît très vite et il devient difficile, voire impossible, de tester la primalité des nombres engendrés par les expressions $n! - 1$ et $n! + 1$.

3. Quelques nombres premiers curieux

1 025 327

Le plus petit *reimerp* (nombre aussi premier quand on inverse l'ordre de ses chiffres), qui ne contient que des chiffres premiers et les contient tous.

37 330 116 097

En partant de 37 330 116 097 et en additionnant les deux nombres premiers qui suivent (ce qui fait une somme de trois nombres premiers), on obtient un nouveau nombre premier 111 990 348 347.

En partant de ce nombre et en additionnant les quatre nombres premiers qui suivent (ce qui en fait cinq consécutifs), on obtient un nouveau nombre premier.

En poursuivant de la même façon, on obtient toujours des nombres premiers, jusqu'à une somme de 19 nombres premiers.

122 334 444 555 553

Le plus petit nombre premier contenant un « 1 », deux « 2 », trois « 3 », quatre « 4 », cinq « 5 ».

7 469 789

Le premier nombre d'une paire de nombres premiers consécutifs qui sont tous les deux faiblement premiers (un nombre est faiblement premier si, en changeant l'un de ses chiffres par un autre, on tombe toujours sur un nombre composé).

7 284 717 174 827

Ce nombre premier palindrome (il peut se lire de droite à gauche ou de gauche à droite) donne encore

un nombre palindrome si on l'écrit en base 2 : 11010100000000110101111010110000000101011. De plus, sa longueur en base 10, qui est 13, et la longueur de son écriture en base 2, qui est 43, sont tous les deux des nombres premiers.

14 444 999 999 999

Nombre premier qui est la mise bout à bout des chiffres qui sont des carrés non nuls (1, 4, 9) répétés autant de fois que leur valeur.

1 311 753 223 571 113

Ce nombre premier est obtenu comme la concaténation des nombres premiers de 13 à 2 par ordre décroissant, suivie de la concaténation des mêmes nombres par ordre croissant 13, 11, 7, 5, 3, 2, 2, 3, 5, 7, 11, 13. Ce qui donne une sorte de palindrome.

37 104 124

Ce n'est pas un nombre premier, mais il est très intéressant, car 37 104 124 est égal à la somme de $3! \times 7! \times 1! \times 0! \times 4! \times 1! \times 2! \times 4!$ et du nombre de nombres premiers plus petits que 37 104 124. C'est le seul nombre connu ayant cette propriété.

172 909 271

Le plus petit nombre premier palindrome qui contienne le célèbre nombre de Ramanujan 1 729 (le plus petit nombre représentable de deux façons comme somme de deux cubes $1\,729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$).

15 618 090

Égal à $2 \times 3 \times 5 \times 487 \times 1\,069$, il n'est pas premier, mais c'est le plus petit entier dont la décomposition en facteurs premiers utilise chacun des dix chiffres une fois et une seule.

1 873

C'est en 1873 que Charles Hermite démontra que le nombre *e* était un nombre transcendant.

3 778 888 999

Le plus petit nombre premier ayant une persistance multiplicative de 10. La persistance multiplicative d'un nombre est le nombre d'étapes avant stabilisation qu'il faut faire quand on le remplace par le produit de ses chiffres.

Ainsi $721 \rightarrow 14 \rightarrow 4 \rightarrow 4$, donc 721 a une persistance multiplicative de 3.

16 719

Le 16719^e siècle sera le premier siècle n'ayant aucune année égale à un nombre premier.

619 737 131 179

Le plus grand nombre tel que deux chiffres consécutifs donnent toujours un nombre premier et tel que tous les nombres premiers ainsi obtenus soient différents.

1000...00081918000...0001

(1001 chiffres en tout). Le plus petit nombre premier palindromique de plus de 1 000 chiffres.

Sans Internet qui permet un travail collaboratif remarquable, cette collection n'aurait pas acquis sa richesse actuelle. L'informatique et l'existence des réseaux conduisent au développement de nouvelles formes d'activités et de savoirs mathématiques. Le 29 juin 2010, il y avait 10 277 curiosités singularisant 7 193 nombres différents (des curiosités différentes donnent parfois le même nombre). Comme le disent les auteurs, cela laisse une place infinie à vos propres découvertes.

Bien sûr, la fameuse astuce du paradoxe de Bechembach s'applique au site : tout nombre mérite d'être présent dans la base de *Prime Curios*, le plus petit nombre qui n'y est pas étant intéressant parce qu'il pos-

sède la propriété de ne pas y être... et donc doit y être. Mais c'est une boutade et puisque ce plus petit nombre qui n'y est pas change au cours du temps, Ch. Caldwell et G. Honaker ont simplement choisi de considérer qu'il ne s'agit pas d'un nombre curieux et de ne pas l'y mettre : le paradoxe est contourné.

Plus de 7 000 nombres premiers différents

L'avantage du site est qu'on y trouve aussi un algorithme qui teste la primalité : <http://primes.utm.edu/curios/includes/primetest.php>. Pour la factorisation des nombres entiers, nous vous recommandons <http://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM>, qui

est remarquablement efficace et rapide. Cet algorithme vous permettra de tester vos idées et vous aidera à mener vos recherches dans le but de proposer un nombre premier intéressant. Le dictionnaire ou le site Internet seront utiles aux amateurs de programmation et aux enseignants à la recherche d'exercices informatiques nouveaux et parfois non triviaux.

Voici trois exemples d'exercices de programmation directement tirés du dictionnaire.

- Faire un programme qui trouve le plus petit nombre premier *p* tel que *p* et le nombre premier *p'* qui le suit soient composés uniquement de chiffres qui sont des cubes {0, 1, 8}. La réponse est 100 801, qui est suivi par le nombre premier 100 811.

- Trouver le nombre premier p_1 qui commence une suite de six nombres premiers consécutifs $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, chacun d'eux ayant pour somme de ses chiffres le même entier qui doit être un nombre premier.

La réponse est 354 963 229, dont la somme des chiffres est 43, et qui est suivi par les cinq nombres premiers : 354 963 283, 354 963 319, 354 963 337, 354 963 373, 354 963 391, dont la somme des chiffres est à chaque fois 43.

- Trouver le plus petit nombre entier ne se terminant pas par des zéros et qui peut s'écrire comme la somme du carré de deux nombres premiers distincts de quatre façons différentes.

La réponse est 39 338, qui s'écrit :
 $39\,338 = 23^2 + 197^2 = 97^2 + 173^2 = 107^2 + 167^2 = 113^2 + 163^2$.

Démonstration automatique

Si on y réfléchit un peu, on est amené à conclure que le dictionnaire doit être considéré comme une immense collection de théorèmes mathématiques donnés sans démonstration. Dans la plupart des cas, un ordinateur et un programme sont nécessaires pour contrôler la justesse des affirmations proposées, car une démonstration directe avec un papier et un crayon est impossible ou demanderait bien trop de temps et de patience.

Le dictionnaire et le site Internet peuvent donc être vus aussi comme des collections d'énoncés arithmétiques non démontrables par le mathématicien seul, qui est contraint de s'adjoindre une machine pour explorer ce type de vérités mathématiques. Il s'agit d'une base de résultats mathématiques démontrés par ordinateur et non démontrables humainement.

L'informatique est donc utile pour ce dictionnaire pas uniquement pour coordonner le travail entre amateurs et organiser la base de données des résultats ; elle joue aussi un rôle central dans la recherche, la preuve et le contrôle de chacune des milliers de propriétés sélectionnées. Les rapports entre mathématiques et informatique

sont de plus en plus resserrés et c'est aussi vrai dans le domaine des mathématiques récréatives.

Le tableau d'honneur des plus prolifiques producteurs de nombres premiers curieux indique la liste de neuf noms d'amateurs ayant proposé chacun plus de 200 entrées. Le contributeur classé premier est Shyam Sunder Gupta, qui est à l'origine de 606 entrées du dictionnaire. Il est suivi de Jonathan Vos Post, à qui l'on doit 519 entrées. Il faut admirer la quantité de travail de programmation, la patience et l'inventivité extrême exigées pour arriver à de tels résultats.

Exécutable et illégal ?

Parmi les curiosités les plus troublantes, il y a celle des *nombres premiers exécutables*. Un nombre premier peut toujours être écrit en base 2, auquel cas il représentera parfois un programme informatique pour un type particulier de machines.

Les microprocesseurs les plus courants ayant des instructions d'un octet (8 bits) sont ceux de la série x86. La plus petite instruction est alors celle associée au nombre 195 qui exécute l'instruction RET (*return*). Cet octet peut être écrit dans un fichier de type .com et constituera alors un programme exécutable pour les machines DOS (*Windows*). Malheureusement, 195 n'est pas un nombre premier.

Selon Phil Carmody, qui a étudié le problème de près, les trois plus petits nombres premiers exécutables sont :
 $38 \times 256 + 195 = 9\,923$, $46 \times 256 + 195 = 11\,971$, $47 \times 256 + 195 = 12\,227$, qui ne font rien de très intéressant, mais sont d'authentiques programmes !

Le premier nombre premier exécutable réalisant quelque chose d'intéressant (avec les mêmes règles du jeu que précédemment) est un nombre de 1 811 chiffres décimaux qui commence par : 4 931 083 597 028 501 900 27 577 767 239 076 495 728 49 077 721 502 0 (voir http://primes.utm.edu/curios/page.php?number_id=1214 pour la liste complète des chiffres).

Ce nombre traduit en binaire est équivalent à un petit programme écrit par Charles Hannum qui implémente DecSS, un

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

Ch. Caldwell, *The Prime Pages* (records, listes diverses, etc.), <http://primes.utm.edu/>

Ch. Caldwell et G. L. Honaker, *Prime Curios !* : <http://primes.utm.edu/curios/>

Chr. Caldwell et G. L. Honaker, *Prime Curios ! The Dictionary of Prime Number Trivia*, BookSurge, 2009.

J.-P. Delahaye, *Mille collections de nombres, Pour la Science*, n°379, pp. 88-93, mai 2009.

J.-P. Delahaye, *Merveilleux nombres premiers*, Pour la Science/Belin, 2010.

J. Moyer, *Some Prime Numbers* (page pour obtenir des listes de nombres premiers et des programmes pour les calculer) : <http://www.rsok.com/ffjrm/printprimes.html>

Wikipedia, *List of prime numbers* (des catégories particulières de nombres premiers) : http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_prime_numbers

Wikipedia, *Primality test* (informations et liens sur les tests de primalité) : http://en.wikipedia.org/wiki/Primality_test

© Pour la Science - n° 396 - Octobre 2010