

erreur, les noyaux des assistants de preuve gagnent en fiabilité de jour en jour. Toutes les autres preuves reposent sur eux, et l'on atteint donc une certitude de correction quasi absolue.

Les assistants de preuve ne seraient-ils pas susceptibles de changer notre façon de faire des mathématiques ? C'est l'idée du manifeste QED dont le nom vient de l'expression latine *Quod Erat Demonstrandum* [Ce qu'il fallait démontrer]. Formulé en 1994 par des chercheurs qui ont souhaité rester anonymes, ce manifeste énonce l'objectif de mettre au point un assistant de preuve général pour toutes les mathématiques, de manière à garantir la totalité de tout ce qui se fait dans la discipline.

L'assistant de preuve envisagé serait à la fois puissant, fonctionnant avec un formalisme proche du langage qu'utilisent les mathématiciens, et évidemment serait aussi sûr que possible. Avec un tel assistant de preuve, on formaliserait toutes les mathématiques existantes et à chaque fois qu'un nouveau résultat serait proposé, le chercheur qui le soumettrait en donnerait une preuve formelle, ce qui dispenserait de le faire expertiser par d'autres chercheurs. La pratique de la recherche mathématique en serait transformée.

Aujourd'hui, cet assistant de preuve idéal n'existe pas. Les assistants de preuve actuels restent trop compliqués et les langages qu'ils utilisent souvent éloignés de celui pratiqué par les mathématiciens. Formaliser une preuve reste un énorme travail et il faut un ou plusieurs jours par page pour traduire une preuve classique d'un article mathématique en preuve formelle.

Tout cela fait que les chercheurs en mathématiques n'utilisent que très rarement les assistants de preuve disponibles et que la communication entre mathématiciens continue de fonctionner par échange de preuves informelles et sans processus de validation informatique. Le chemin menant à une nouvelle pratique des mathématiques n'est pas achevé et il n'est pas sûr qu'on atteindra l'idéal imaginé par le manifeste QED.

Toutefois, Henk Barendregt et Freek Wiedijk, deux spécialistes des preuves formelles, prédisent que le changement dans la

recherche mathématique se produira dans la prochaine décennie.

Mentionnons encore deux points. Il n'est pas question de laisser à la machine l'initiative de la recherche mathématique : sauf dans des cas exceptionnels ou à propos de problèmes se réduisant à du calcul, les méthodes de recherche automatique de preuves ne trouvent que des résultats faciles et ne peuvent donc pas se substituer au mathématicien humain, qui reste la clef des découvertes.

Les assistants de preuve permettent d'accroître la sûreté des démonstrations, mais la fonction d'une démonstration, en particulier dans l'enseignement, est aussi de faire comprendre ce qui se passe mathématiquement dans l'univers des objets abstraits. Or les preuves formelles, désagréables à lire, entravent la compréhension plus qu'elles ne l'aident. Même si les objectifs du manifeste QED sont un jour atteints, on continuera d'écrire des preuves informelles, car ce sont elles qui font passer les idées d'un cerveau de mathématicien à un autre.

Prouver ainsi tous les résultats ?

D'ici quelques années, les assistants de preuve seront probablement en mesure de prouver l'ensemble des résultats mathématiques classiques.

Aujourd'hui, des théorèmes très difficiles ont pu être validés par la méthode des preuves formelles. C'est le cas du théorème des nombres premiers de Jacques Hadamard et Charles de La Vallée Poussin (qui précise la densité asymptotique des nombres premiers), dont deux démonstrations différentes ont été formalisées et validées.

Il n'en est pas de même pour des résultats plus avancés comme le grand théorème de Fermat, qui reste trop complexe pour les outils actuels. Mais F. Wiedijk et d'autres chercheurs du domaine considèrent que ce n'est qu'une question de moyens, et que même les plus difficiles des grands théorèmes sont maintenant à portée de main. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

✓ BIBLIOGRAPHIE

F. Wiedijk, *Formalizing the « top 100 » of mathematical theorems*, 2011 : <http://www.cs.ru.nl/~freek/100/>

H. Geuvers, *Proof assistants : History, ideas and future*, *Sadhana*, vol. 34-1, pp. 3-25, février 2009 : <http://www.ias.ac.in/sadhana/Pdf2009Feb/3.pdf>

G. Gonthier, *The four-color theorem*, *Notices of the AMS*, vol. 55, n° 11, pp. 1382-1393, 2008.

Th. Hales, *A proof of the Kepler conjecture*, *Annals of Mathematics*, vol. 162, pp. 1065-1185, 2007.

F. Wiedijk, *Formal proof - Getting started*, *Notices of the AMS*, vol. 55, n° 11, pp. 1408-1414, 2008.

Th. Hales, *Formal proof*, *Notices of the AMS*, vol. 55, n° 11, pp. 1370-1380, 2008.

F. Wiedijk, *The QED manifesto revisited*, *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, vol. 10(23), pp. 121-133, 2007.

F. Wiedijk (éd.), *The Seventeen Provers of the World*, Springer, 2006.

□ ART & SCIENCE

Le fantôme de Louis XV

Dans un portrait allégorique, Charles-Amédée Van Loo dissimule le portrait de Louis XV dit le Bien-Aimé : il n'apparaît qu'avec une lentille polyédrique dont le fonctionnement « magique » est fondé sur les lois de la réfraction.

Loïc MANGIN

L'anamorphose est un jeu optique par lequel la perspective d'une image est distordue. L'image et sa signification n'apparaissent alors que sous un point de vue donné ou grâce à un « décodeur », tel un miroir. La plus ancienne connue serait due à Léonard de Vinci : il s'agit de l'anamorphose d'un œil d'enfant, que l'on trouve dans le *Codex Atlanticus*, daté de 1485. L'une des plus célèbres est celle figurant dans la partie inférieure du tableau *Les Ambassadeurs*, du peintre allemand Hans Holbein le Jeune [1498-1543]. Dans cette toile exposée à la *National Gallery* de Londres, la forme oblongue au pied des deux personnages devient, lorsqu'elle est observée en vue rasante, un crâne. Ces différents exemples sont des anamorphoses simples, ou directes. Mais on en distingue deux autres types.

Ainsi, les anamorphoses à miroir (on parle aussi d'anamorphoses catoptriques) nécessitent un cylindre ou un cône réfléchissant sur lequel l'image « normale » apparaît. L'image déformée est peinte sur une surface autour d'un emplacement prévu pour y placer le miroir. Aux XVII^e et XVIII^e siècles, cette technique d'anamorphoses a favorisé la diffusion de caricatures, de scènes érotiques...

Enfin, les anamorphoses dioptriques sont les plus spectaculaires. Un exemple est au château de Versailles et a été présenté lors d'une exposition consacrée aux liens entre sciences et cours royales : le Por-

trait allégorique de Louis XV (voir page ci-contre, figure b), peint par Charles-Amédée Van Loo, en 1742. Cette œuvre a été étudiée par Hélène Delalex, adjoint de conservation au château de Versailles. Qu'y voit-on ?

La Magnanimité, sous la forme d'un personnage féminin, a une main posée sur un grand bouclier blanc cerclé d'or et rehaussé de trois fleurs de lys dorées. Autour d'elle, sont représentées les allégories de la Justice (*en bas à droite*), de la Valeur mili-

**La Justice
fournit au visage
de Louis XV
une partie de l'œil,
car « rien n'échappe
aux regards
de la justice ».**

taire (*derrière la Magnanimité, avec ses lances et son drapeau*), de l'Intrépidité (*le soldat derrière la Valeur militaire*), de la Vertu héroïque (*guerrier sous les attributs d'Hercule tenant une massue et les trois pommes d'or*), de la Vertu invincible (*représentée par Minerve, un rameau à la main*) et de la Générosité (*la jeune fille à gauche*). Et Louis XV ?

Le peintre a donné la clef de l'œuvre à Barraly, son gérant, qui a transmis l'information à l'Académie de peinture de Mar-

seille : « Ces Vertus concourent à former la tête du Roy. » En effet, en regardant le tableau à travers une lentille polyédrique insérée dans un tube (de façon à faire une sorte de longue-vue), différentes parties des Vertus représentées sont réfractées par le dispositif et s'assemblent en un portrait du monarque au centre du bouclier (voir figure a, une reconstitution informatique réalisée par H. Delalex) : la Magnanimité prête au roi la joue, une partie de l'œil, une oreille et un sourcil ; la Justice donne une partie d'un œil ; la Valeur militaire cède le nez et la bouche ; la Vertu héroïque partage la petite joue, la bouche, le nez et les narines ; la Vertu invincible offre une partie d'un œil ; la Générosité participe aussi à un œil ainsi qu'à la tempe ; un lion se retrouve dans la tempe et le front ; enfin, le masque joue un rôle dans le front et un sourcil.

Rien n'est laissé au hasard ! Van Loo précise que la Justice fournit au visage de Louis XV une partie de l'œil, car « rien n'échappe aux regards de la Justice ». De même, la Valeur militaire prête sa bouche « pour le commandement ».

Ces anamorphoses dioptriques ont été théorisées par le père de l'ordre des Minimes Jean François Nicéron [1613-1646] dans le premier ouvrage qui a été consacré à ces effets d'optique, *La Perspective curieuse*, publié en 1638. On y trouve une des premières occurrences des travaux de Descartes sur la réfraction publiés l'année précédente dans *La Dioptrique* (un dioptr est la surface séparant deux milieux).

Rappelons que la réfraction consiste en une déviation de la lumière lorsqu'elle passe d'un milieu à un autre, par exemple de l'air à l'eau : un bâton plongé dans l'eau, mais dont une pointe est émergée, semble brisé. Ce phénomène avait été décrit par le mathématicien arabe Ibn Sahl à la fin du X^e siècle. Nicéron donne plusieurs exemples d'anamorphoses dioptriques, dont le portrait de Louis XIII obtenu à partir de fragments d'Ottomans (voir figure c).

De façon étonnante, le *Portrait de Louis XV* illustre le doute que Descartes a mis au centre de ses réflexions. Selon

le philosophe, nous devons douter de nos sens, car ils sont parfois trompeurs, les illusions d'optique l'attestent. L'image du bâton brisé dans l'eau le conduit même à s'interroger : nos sens ne nous trompent-ils pas tout le temps ? Louis XV ne s'embarrassa pas de telles considérations et fut « satisfait et très satisfait » de son portrait magique. ■

H. Delalex, « Le portrait caché de Louis XV », dans *Sciences et curiosités à la cour de Versailles*, catalogue de l'exposition, RMN et château de Versailles, 2010.



© Christian Millet



Château de Versailles



IDÉES DE PHYSIQUE

Sonner comme une cloche

*Les qualités musicales d'une cloche dépendent de sa forme.
Et le son produit dépend de l'endroit où le battant frappe.*

Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK

Un tintement dans le lointain qui marque l'heure, la joyeuse sonnerie qui accompagne les mariés à la sortie de l'église...

Les sons des cloches rythment nos vies profanes ou spirituelles, mais d'où vient la qualité musicale de ces instruments ? Qu'est-ce qui détermine les vibrations qui vont persister dans le matériau et, ainsi, seront audibles ? La réponse réside dans la forme de la cloche, dont la conception reste un secret jalousement gardé par les fondeurs.

Une harmonie qui ne va pas de soi

Dans le principe, il est difficile de faire plus simple qu'une cloche. Une pièce en métal homogène, en l'occurrence du bronze, est mise en vibration par le choc du battant. Et, tout comme la membrane d'un haut-parleur, la surface de la cloche met en mouvement l'air environnant et engendre les variations de pression que nous appelons ondes sonores.

La situation est bien plus simple que pour les instruments à vent, où intervient un subtil couplage entre l'embouchure et le tuyau résonnant ; bien plus simple aussi que pour les instruments à cordes, où les cordes, excitées de diverses façons, transfèrent de l'énergie à une paroi vibrante, seule à même d'émettre un son assez puissant.

Pourtant, obtenir une cloche musicale n'est pas immédiat. Lorsqu'on frappe un

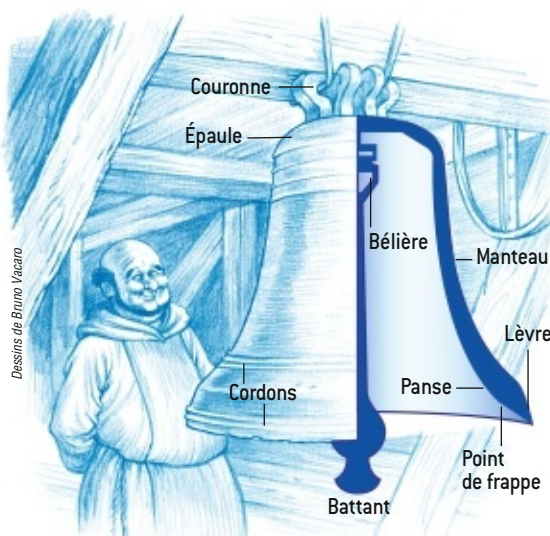
solide, il est rare d'obtenir un son harmonieux et durable. On obtient plutôt un bruit, c'est-à-dire une superposition d'ondes sonores sans ordre particulier.

Or les règles de l'harmonie occidentale requièrent des relations bien précises entre les fréquences émises simultanément. Ces relations sont satisfaites avec les cordes des pianos et des violons. On peut considérer les vibrations de chacune de ces cordes comme une superposition de vibrations sinusoïdales. La fréquence la plus basse, la « fréquence fondamentale », définit la note émise. Les fréquences supérieures, qui déterminent le timbre, sont des harmo-

niques, c'est-à-dire des multiples entiers de cette fréquence fondamentale ; c'est ce qui rend le son harmonieux à nos oreilles.

Prenons maintenant un solide dont la forme est proche de celle d'une cloche et dont on sait calculer exactement les modes de vibration : un cylindre long par rapport à son diamètre et creux, ouvert à ses deux extrémités, comme pour les carillons de porte d'entrée. Un tel tube a toujours une fréquence fondamentale, la plus basse, mais les fréquences suivantes n'en sont plus des multiples entiers [les rapports de fréquence valent 2,68, 7,59, 14,55, ...]. Le son obtenu sera un tintement au son métallique, auquel on peut associer une note, mais qui n'aura pas la rondeur et la musicalité d'un son de cloche.

L'art ancestral des fondeurs de cloches a consisté à trouver la forme la plus appropriée pour un son musicalement juste. Quelques millénaires ont conduit à la forme à symétrie axiale que nous connaissons, du moins en Europe (voir la figure 1). Des écarts régionaux existent et le détail des tracés est encore aujourd'hui rarement connu, les fondeurs ne révélant pas leurs secrets. Mais toutes les cloches ont des formes très proches et produisent, lorsqu'elles sonnent, un « arpège mineur » de cinq notes, dont les fréquences successives sont $0,5f_0$ (octave inférieure, do_2), f_0 (la note fondamentale, do_3), $1,2f_0$ (tierce mineure, mi_3), $1,5f_0$ (quinte, sol_3), $2f_0$ (octave supérieure, do_4). Ce mode mi-



1. LES CLOCHES SEMBLENT être des instruments de musique très simples. Cette apparence est trompeuse : leur forme doit être soigneusement conçue pour qu'elles produisent des sons harmonieux.