

...abonnez-vous !

56 € seulement !

Vos avantages abonné :

- ✓ 25% d'économie
- ✓ la garantie de ne manquer aucune parution
- ✓ l'accès gratuit à vos numéros en version numérique sur www.pourlascience.fr

BULLETIN D'ABONNEMENT **SCIENCE** ■ POUR LA

à retourner accompagné de votre règlement à : Service Abonnements • Pour la Science • 8, rue Férou • 75278 Paris cedex 06

à retourner accompagné de votre règlement à: Service Abonnements • Pour la Science • 8, rue Férou • 75278 Paris cedex 06

* Offre valable en France métropolitaine. Participation aux frais de port à ajouter au prix de l'abonnement : France d'Outre-Mer et Europe 12€ - autres pays 25€

** Abonnement valable uniquement en France métropolitaine, renouvelable à échéance par tacite reconduction et dénonçable à tout moment avec un préavis de 3 mois.

Nom : _____ Prénom : _____

Code postal : | | | | | Ville : _____ Pays : _____ Tél. (facultatif) : _____

[illegible]

☐ J'accepte de recevoir également les informations des partenaires de *Pour la Science*.

Je choisis mon mode de règlement :

☐ Je règle mon abonnement en une seule fois **56 €** (+ frais de port en sus pour l'étranger)☐ par chèque à l'ordre de Pour la Science☐ par carte bancaire

Nº: |

Signature obligatoire :

Expire fin :

Clé (les 3 chiffres au dos de votre CB) :

☐ Je préfère le règlement en douceur **14€/trimestre + en cadeau le Dossier Pour la Science n°68**. Je remplis la grille d'autorisation de prélèvement ci-dessous en joignant impérativement 1 RIB.

Autorisation de prélèvement automatique

Autorisation de prélèvement automatique (France métropolitaine uniquement). J'autorise l'établissement teneur de mon compte à prélever le montant des avis de prélèvement trimestriel présentés par *Pour la Science*. Je vous demande de faire apparaître mes prélèvements sur mes relevés de compte habituels. Je m'adresserai directement à *Pour la Science* pour tout ce qui concerne le fonctionnement de mon abonnement.

Titulaire du compte à débiter

Nom, Prénom : _____

N° : _____ Rue : _____

Code postal : | | | | | Ville :

Compte à débiter

Établissement	Code guichet	N° de compte	Clé RIB
---------------	--------------	--------------	---------

[illegible]

Établissement teneur du compte à débiter

Établissement :

Nº : _____ Rue : _____

Code postal : | | | | | Ville :

Date et signature (obligatoire)

Organisme créancier

Pour la Science

8 rue Férou - 75006 Paris

N° national d'émetteur : 426900



Pour réagir aux articles : courrier@pouirlascience.fr
ou directement sur les pages correspondantes du site www.pouirlascience.fr

✓ BANANIER PLIÉ

Selon l'article *Le bananier, un enjeu mondial* (*Pour la Science* n°400, février 2011, http://bit.ly/pls_400_bananier), le faux-tronc du bananier ne contient pas de lignine. Dès lors, comment est assurée sa rigidité ? Un bananier privé d'eau et fané devient-il mou ?
Joël Mathez

→ RÉPONSE DE ANDRÉ LASSOUDIÈRE

Le faux-tronc du bananier est tout à fait comparable à celui d'autres monocotylédones, comme le blé. Il ne contient pas de lignine. La rigidité est exclusivement assurée par la turgescence des tissus des gaines foliaires qui contiennent 97 pour cent d'eau. En cas de sécheresse, en effet, le faux-tronc se plie, devient mou, et se dégrade rapidement. Il est presque obligatoire de tuteurer ce faux-tronc peu de temps après l'émission de l'inflorescence pour éviter

le pliage à mi-hauteur. Le faux-tronc est très fragile et ne peut résister à des vents de plus de 50-60 kilomètres par heure. Même si les racines sont robustes, les cyclones sont ainsi très dévastateurs pour les bananeraies.

✓ LE NUAGE ET L'ÉTOILE

L'article *Étoiles : une naissance obscure* (*Pour la Science* n°401, mars 2011, http://bit.ly/pls401_etoiles) ne précise pas l'origine de la poussière dans les nuages interstellaires. Par ailleurs, ces nuages sont formés par la mort des étoiles, mais ils sont aussi nécessaires à la formation de celles-ci. N'y a-t-il pas un paradoxe ?
Christine Roche

→ RÉPONSE DE NICOLAS PERETTO

Les grains de poussière sont au cœur de l'équilibre thermique du milieu interstellaire. Leur

mode de formation est encore très débattu. On sait cependant qu'ils sont créés dans les phases finales de l'évolution stellaire, lorsque les étoiles éjectent leurs couches externes ou explosent en supernova. Les éléments lourds formés par la fusion nucléaire et les molécules et petits grains de poussière formés en périphérie de l'étoile sont alors dispersés dans le milieu interstellaire dense et froid, où ils peuvent s'agglomérer pour former des grains de poussière de taille variée.

Les poussières sont des catalyseurs efficaces pour la formation d'hydrogène moléculaire, qui contribue à refroidir le gaz des nuages interstellaires en contraction. Mais elles ne sont pas indispensables. Sans poussière, le gaz refroidit plus difficilement, mais des étoiles peuvent néanmoins se former, bien que cela nécessite une masse initiale plus élevée. Les étoiles résultantes sont alors plus massives.

Mardi 24 mai 2011 à 18h30
au Palais de la Découverte
Avenue F.-D. Roosevelt • 75008 Paris

Raconte-moi un chercheur

Pour la Science, en partenariat avec le Palais de la Découverte, vous convie, chaque mois, à passer une heure avec un scientifique.

Comment est-il devenu chercheur ? Quelles sont les différentes facettes de son métier ? En quoi consiste son travail au quotidien ?

En vous faisant partager leur expérience et en rendant leur métier plus concret, ces chercheurs ont une ambition : vous communiquer leur passion pour la science !

Invitée

Valérie Masson-Delmotte

Valérie Masson-Delmotte, climatologue, est directrice de recherches au Laboratoire des sciences du climat et de l'environnement (LSCE), unité mixte du CEA, du CNRS et de l'Université de Versailles-Saint-Quentin, à Gif-sur-Yvette. Ses recherches portent sur l'évolution du climat, en particulier sur la reconstruction des climats passés.

Palais de la Découverte **SCIENCE**

DOSSIER POUR LA SCIENCE

- L'Univers avant le Big Bang
- Où est passée l'antimatière ?
- Matière noire et énergie sombre
- Comment finira l'Univers ?

N° 71 Avril-Juin 2011

Le magazine thématique de l'actualité scientifique

La face cachée de l'Univers

Comment explorer
les âges sombres
et le contenu manquant ?

120 pages - prix de vente : 6,95 €

À découvrir en kiosque
et sur www.pourlascience.fr

TURBULENCES sur les équations des fluides

L'un des problèmes mathématiques les plus en vue porte sur les écoulements des liquides ou des gaz. Les équations dites de Navier-Stokes utilisées pour les décrire et les prévoir sont-elles valides ?

Thomas Sonar

À l'occasion du passage au nouveau millénaire, en l'an 2000, le *Clay Mathematical Institute*, une fondation américaine privée, a proposé une liste de sept problèmes dont la résolution sera récompensée d'un prix de un million de dollars pour chacun. La plupart de ces défis sont d'une grande abstraction et peuvent sembler éloignés de toute réalité physique. Par contraste, au sein de cette liste, le problème des équations de Navier-Stokes apparaît bien concret : ces équations sont censées décrire les écoulements des fluides (liquides ou gaz) ordinaires.

Afin de déterminer comment un fluide se comporte dans une situation donnée, on peut réaliser des expériences. Mais en pratique, c'est souvent trop difficile ou trop coûteux. Dans ce cas, il est possible de s'appuyer sur des simulations numériques, par ordinateur, des équations qui régissent les écoulements. C'est ainsi que les ingénieurs-architectes calculent le comportement des grandes structures, tels



1. LA TURBULENCE DES FLUIDES est un phénomène mal compris. Cette incompréhension reflète les difficultés que posent les équations de Navier-Stokes, tant sur le plan de leur analyse mathématique que sur celui de leur simulation numérique.

les ponts ou les gratte-ciel, sous l'action du vent. La simulation numérique permet aussi de déterminer les caractéristiques aérodynamiques d'une automobile, d'un train à grande vitesse ou d'un avion, sans avoir à construire au préalable des prototypes de ces appareils et à les tester dans une soufflerie.

La simulation numérique en mécanique des fluides est fondée sur une stratégie de résolution approchée des équations de Navier-Stokes. Ces équations, qui se révèlent donc cruciales pour les activités des constructeurs automobiles ou des bureaux d'ingénieurs, s'invitent même à Hollywood afin, par exemple, de simuler le tourbillon où s'enfonce le *Titanic* lors de son naufrage.

L'existence et l'unicité des solutions sont à prouver

La résolution des équations de Navier-Stokes joue donc un rôle important, qu'il s'agisse de science ou de technologie. Pourquoi ces équations figurent-elles sur la liste des « problèmes du millénaire » ? Des équations dont des programmes informatiques calculent des solutions approchées présentent-elles encore un réel intérêt pour les mathématiciens ou les physiciens ? Le problème, c'est que l'on n'est pas sûr que ce qui est calculé est réellement une solution approchée et si le résultat est fidèle à la réalité.

Une comparaison avec un exemple très classique éclairera ces questions. Afin de décrire les phénomènes naturels par des équations, Isaac Newton avait énoncé les lois régissant la mécanique d'un point matériel, par exemple la loi selon laquelle la force agissant sur une masse ponctuelle est égale au produit de sa masse par son accélération. Considérons un nombre fini de masses ponctuelles, par exemple les corps célestes du Système solaire, dont on connaît les positions et vitesses à un instant donné. Supposons en outre que ces masses ponctuelles soient soumises aux seules forces de la gravitation newtonienne.

Dans ces conditions, toute l'évolution du système est mathématiquement déterminée : connaissant les positions et vitesses des points matériels à un instant donné, les équations de la mécanique permettent en principe de déterminer les positions et vitesses à tout instant ultérieur. Les mathé-

matiques offrent dans ce cas une image déterministe de la nature : des conditions initiales identiques impliquent toujours une même évolution au cours du temps.

Or les équations de Navier-Stokes ne présentent malheureusement pas un tel déterminisme. Il n'a pas été possible à ce jour de prouver, pour ces équations, qu'il existe en toutes circonstances une solution complètement déterminée par les conditions initiales. La situation reste par conséquent confuse. Du reste, l'Institut Clay n'a pas fixé comme objectif la démonstration de l'existence de solutions pour les équations de Navier-Stokes et la démonstration que les solutions, si elles existent, sont uniques ; il a plus humblement proposé de récompenser des « progrès essentiels » sur le sujet.

Pourquoi cette classe d'équations soulève-t-elle autant de difficultés ? C'est ce que nous allons expliquer dans la suite de cet article. Une première réponse, incomplète, est qu'avec les équations de Navier-Stokes, on passe du discret au continu. Il s'agit d'« équations aux dérivées partielles », et non d'équations différentielles ordinaires comme en mécanique du point.

Qu'est-ce que cela signifie ? Pour un point mobile, la deuxième loi de Newton, selon laquelle la force est égale à la masse multipliée par l'accélération, équivaut à une équation différentielle, l'inconnue étant la position $x(t)$ du point et l'accélération étant la dérivée $dv(t)/dt$ de la vitesse $v(t)$ par rapport au temps, c'est-à-dire la dérivée seconde $d^2x(t)/dt^2$ de la position : dans les équations de la mécanique du point n'interviennent que des fonctions d'une seule variable, le temps t .

En revanche, la description d'un fluide repose sur des fonctions de deux variables au moins : la position (décrite par une, deux ou trois coordonnées) et le temps. La vitesse d'un fluide au point r et à l'instant t est ainsi notée $v(r, t)$. En plus des dérivées par rapport au temps qui proviennent, comme dans le cas classique, de la deuxième loi de Newton, on a des dérivées par rapport aux coordonnées de position, car l'état (la vitesse, la pression) d'un fluide en un point dépend de, et influe sur, l'état du fluide aux points voisins (on parle de dérivées partielles, car il s'agit de dérivées par rapport à l'un seulement des variables de la fonction).

Comme on introduit au moins une fonction pour chaque point de l'espace et que ces points sont en nombre infini (un infini

L'ESSENTIEL

✓ Les équations de Navier-Stokes sont censées décrire les écoulements des fluides.

✓ Elles modélisent un fluide comme un milieu continu, c'est-à-dire caractérisé par des grandeurs physiques définies en tout point de l'espace et à tout instant.

✓ À ce jour, la cohérence mathématique de ces équations n'a pas été prouvée.

✓ Le phénomène de turbulence est l'un des principaux obstacles à une telle démonstration.

continu, et non discret), alors que dans le cas habituel seul un nombre fini de fonctions du temps interviennent (les positions ou vitesses des points mobiles considérés), on devine que les équations aux dérivées partielles sont bien plus complexes que les équations différentielles ordinaires. Mais il ne s'agit là que d'une petite partie de l'explication de la difficulté.

Examinons de plus près ces équations de Navier-Stokes. Elles décrivent les comportements tant des liquides que des gaz. Dans notre expérience quotidienne, l'eau et l'air semblent se comporter très différemment, mais ce phénomène tient essentiellement à la différence de masse volumique, la densité de l'eau étant un millier de fois supérieure à celle de l'air. Dans les équations, la densité du fluide apparaît sous la forme d'un paramètre constant, qui ne change donc pas fondamentalement le comportement des solutions.

Une autre différence apparente entre un liquide et un gaz est la compressibilité. Avec une simple pompe à bicyclette, on peut aisément comprimer un volume d'air. L'eau, de son côté, est incompressible, ce que l'on peut ressentir douloureusement en sautant mal d'un plongeur. L'expérience de la pompe



2. UN ÉCOULEMENT dans une cavité carrée plane où, initialement, le fluide est au repos, est un système souvent utilisé pour tester des algorithmes de résolution numérique des équations de la mécanique des fluides. Ici, le fluide est entraîné de gauche à droite au niveau de la paroi supérieure. Les lignes de courant correspondant à une rotation horaire sont en bleu, celles correspondant à une rotation antihoraire sont dans des teintes rouges.

à vélo est cependant atypique : au sommet des gratte-ciel, pour les trains rapides ou les avions, l'air, à des vitesses de l'ordre de 300 kilomètres par heure, se comporte comme s'il était incompressible.

Si le fluide doit être considéré comme compressible, c'est-à-dire si sa densité peut notablement varier, la situation est plus complexe. Aussi, nous nous limiterons dans la suite de cet article au cas des fluides incompressibles.

250 ans d'histoire

D'où viennent les équations de Navier-Stokes ? Leur histoire remonte au XVIII^e siècle. En 1755, dans un mémoire intitulé *Principes généraux du mouvement des fluides*, le grand savant suisse Leonhard Euler donna corps à l'hydrodynamique classique ou, plus précisément, à la mécanique des fluides sans frottements.

En appliquant les lois de Newton à des volumes infinitésimaux de fluide, Euler aboutit à un système d'équations qui porte aujourd'hui son nom (voir l'encadré ci-dessous), et il donna la première définition rigoureuse de la pression p d'un fluide. Les équations d'Euler sont un système de trois

LES ÉQUATIONS D'EULER

Afin d'établir les équations qui régissent l'écoulement des fluides, notamment celles d'Euler et de Navier-Stokes, les physiciens considèrent un minuscule « volume test » de position fixée et cherchent à déterminer les forces agissant sur le fluide qu'il contient.

La gravité est en général une première force extérieure à considérer. Il faut ensuite prendre en compte la pression, qui varie *a priori* d'un point à l'autre de la surface du volume test. Les liquides et les gaz tendent en effet à s'écouler dans la direction où la pression est la plus faible. Il faut enfin faire le bilan des entrées et sorties de fluide dans le volume test.

Grâce à l'analyse infinitésimale, on peut ensuite passer à la limite où le volume test se réduit à un point. La différence entre l'état du fluide au bord droit du volume test et son état au bord gauche correspond alors à une dérivée partielle (une dérivée par rapport à

la coordonnée dont l'axe va de gauche à droite). On obtient ainsi des équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire des équations où figurent des dérivées (partielles) de fonctions inconnues de la position et du temps.

Notons u, v, w les composantes de la vitesse de l'écoulement selon les axes Ox, Oy, Oz respectivement et f, g, h les trois composantes d'une force extérieure donnée. L'écriture $\partial u / \partial t$ désigne la dérivée de la composante u de la vitesse par rapport au temps t , l'écriture $\partial p / \partial z$ désigne la dérivée de la pression par rapport à la coordonnée z , et ainsi de suite. Avec ces notations, les équations d'Euler s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= f \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} &= g \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= h \end{aligned}$$

Elles sont une traduction de la loi de Newton selon laquelle le produit de la masse par l'accélération est égal à la force appliquée.

L'accélération (dérivée de la vitesse) correspond aux quatre premiers termes de chaque équation du système (la dérivée partielle par rapport au temps est complétée par trois termes en raison du fait que la vitesse intervenant dans ces équations est celle caractérisant le fluide en un point donné de l'espace, et non la vitesse d'une particule fluide suivie dans son mouvement).

Le cinquième terme (par exemple $\partial p / \partial x$) est la force due à la pression, qui est une force interne au fluide. Par convention, on place les forces extérieures dans le membre de droite des équations.

Par ailleurs, dans ces équations où l'on suppose le fluide incompressible, la densité (ou la masse) du fluide ne figure pas explicitement ; pour simplifier l'écriture,

elle est intégrée dans les définitions de la pression et de la force extérieure.

Grâce aux notations de l'analyse vectorielle, on peut exprimer ces trois équations en une seule formule compacte et élégante. Notons $\mathbf{v} = (u, v, w)$ le vecteur vitesse et $\mathbf{f} = (f, g, h)$ le vecteur force extérieure. Avec l'opérateur « nabra » $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$, les équations d'Euler s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}$$

où $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

Cette expression (trois équations pour quatre fonctions inconnues) doit être complétée par une autre équation, qui exprime l'incompressibilité et la conservation de la masse et qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \text{c'est-à-dire} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

équations comportant quatre fonctions inconnues de la position et du temps : les trois composantes (u, v, w) de la vitesse du fluide (selon les axes Ox , Oy et Oz respectivement) et la pression p . Afin de déterminer un système unique de solutions, il est nécessaire d'introduire une équation supplémentaire, qui traduit localement la conservation de la masse du fluide.

Euler avait également énoncé ces équations dans le cas de fluides compressibles ; le cas incompressible s'en déduit en supposant que la densité du fluide est une constante, indépendante du temps et de la position.

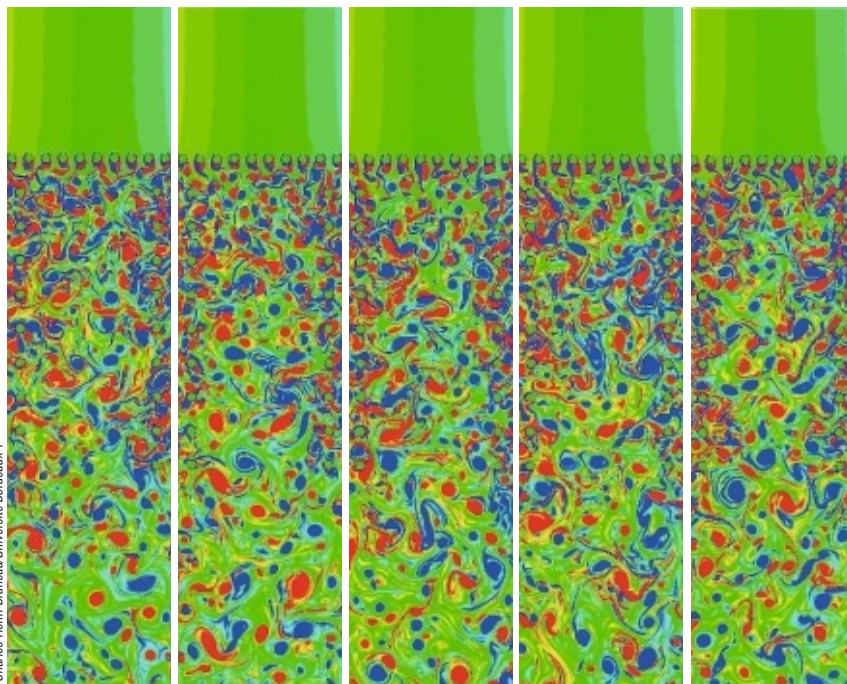
Il est facile de voir que les équations d'Euler sont un cas particulier des équations de Navier-Stokes : les secondes se ramènent aux premières en annulant le terme de viscosité, lié aux frottements.

Les équations d'Euler font apparaître une difficulté qu'elles partagent avec les équations de Navier-Stokes : elles sont non linéaires. La propriété de non-linéarité, qui peut se lire aisément sur une équation, signifie que la somme de deux solutions possibles de l'équation ne constitue pas, en général, une autre solution possible.

Cela implique des différences importantes par rapport aux équations linéaires. Par exemple, des ondes régies par des équations linéaires peuvent se maintenir et se superposer sans interagir et se perturber mutuellement. En outre, les solutions d'équations linéaires ne peuvent pas devenir beaucoup plus complexes que les conditions aux limites (la donnée des vitesses du fluide sur le bord de la région qu'il occupe) ou les conditions initiales (la donnée des vitesses initiales du fluide). En revanche, dans le cas d'une équation non linéaire, même une situation géométrique très simple peut donner lieu à une solution (un écoulement) d'une grande complexité.

La viscosité, facteur de régularité

Le frottement, qui entraîne une dissipation d'énergie, est un élément modérateur dans les écoulements. Cela explique que les équations d'Euler soient souvent plus « turbulentes » encore que celles de Navier-Stokes. Par exemple, les solutions des équations d'Euler peuvent décrire des écoulements où le fluide est cisailé et où, par conséquent, la vitesse du fluide n'est pas définie sur toute une surface. En fait, pour ces raisons, on sait qu'il n'est



3. SIMULATION NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT d'un film d'eau savonneuse, de haut en bas, à travers lequel sont installés des obstacles (dix petits cercles en amont, analogues à des piliers de pont sur une rivière, et une autre série de petits cercles disposés sur le bord gauche). Les cinq images montrent l'état du fluide à des instants successifs. Les parties en bleu correspondent à des tourbillons tournant dans un sens, les parties en rouge à des tourbillons tournant dans le sens contraire. Les obstacles sont responsables de la turbulence de l'écoulement en aval. Il s'agit là d'une turbulence à deux dimensions, que les mathématiciens et physiciens comprennent mieux qu'en trois dimensions. En fait, en deux dimensions, les équations de Navier-Stokes sont aussi mieux maîtrisées, et on a su prouver dans ce cas à la fois l'existence et l'unicité de solutions régulières.

pas possible d'obtenir un énoncé général d'unicité des solutions pour les équations d'Euler.

Dans la réalité cependant, les fluides ne souffrent pas de ces ambiguïtés et semblent avoir des vitesses bien définies partout. On en conclut qu'un élément crucial n'est pas pris en compte dans les équations d'Euler. Cela a conduit Grigori Tokaty, mécanicien des fluides d'origine russe disparu en 2003, à proposer la métaphore suivante : avec ses équations, le tailleur de génie Euler nous a confectionné un pantalon, certes magnifique, mais dépourvu de tout bouton. Ce qui empêche ce pantalon de glisser (ou les fluides de se décomposer), c'est l'omniprésence d'un frottement qui, dans le cas des fluides, est désigné par le terme de viscosité. Si ce phénomène est familier pour des liquides tels que le miel ou l'huile, il l'est moins pour les gaz ; les scientifiques ont d'ailleurs mis longtemps à appréhender le rôle crucial joué par la résistance de l'air et à élaborer une théorie des fluides visqueux.

L'AUTEUR



Thomas SONAR est professeur de mathématiques appliquées à l'Université technologique de Braunschweig, en Allemagne. Il y dirige le Département *Équations aux dérivées partielles* de l'Institut de mathématiques computationnelles.

Laure Saint-Raymond (Département de mathématiques de l'École normale supérieure, Paris), a aidé à l'adaptation de cet article en français. Elle sera par ailleurs l'invitée de « Raconte-moi un chercheur » le 26 avril à 18h30 au Palais de la découverte, à Paris.

✓ BIBLIOGRAPHIE

É. Guyon *et al.*, **Ce que disent les fluides**, 2^e édition, Belin-Pour la Science, 2011.

É. Guyon *et al.*, **Hydrodynamique physique**, 2^e édition, EDP Sciences-CNRS Éditions, 2011.

C. Sabbah *et al.* (éds.), **Facettes mathématiques de la mécanique des fluides**, Journées X-UPS 2010, École polytechnique/Ellipses, 2011.

V. Šverák, **PDE aspects of the Navier-Stokes equations**, colloque De Giorgi, 2007, téléchargeable sur : www.math.umn.edu/~sverak/publications/DeGiorgi.colloquium2007

L. Saint-Raymond, **Le comportement des gaz : d'une limite à l'autre**, *Pour la Science*, n° 324, pp. 52-59, octobre 2004.

P. G. Lemarié-Rieusset, **Recent Developments in the Navier-Stokes Problem**, Chapman & Hall/CRC, 2002.

Newton avait déjà formulé l'hypothèse selon laquelle, dans un fluide visqueux s'écoulant entre deux parois, apparaissent des forces de cisaillement proportionnelles à la vitesse du fluide. Cent cinquante ans plus tard, l'ingénieur polytechnicien français Claude-Louis Navier, avec son *Mémoire sur les lois du mouvement du fluide* de 1822, réalisait une percée dans la prise en compte de la viscosité.

Attiré par l'atomisme de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), Navier a inscrit ses travaux dans le cadre de la théorie moléculaire. Mais il s'est appuyé sur les méthodes de la mécanique des milieux continus et la théorie de l'élasticité, développées en particulier vers 1820 par le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy.

Pour expliquer la viscosité, Navier postula l'existence d'une force d'attraction entre deux molécules, l'intensité de cette force décroissant rapidement avec la distance, et il en déduisit de façon remarquable une équation utilisable à l'échelle macroscopique. Il énonça aussi qu'un fluide visqueux ne peut glisser parfaitement le long des parois d'un conduit ; au contraire, sa vitesse au niveau des parois doit être proche de zéro. C'est la « condition de non-glissement » du fluide le long des parois.

Certains désaccords entre la théorie de Navier et les observations, ainsi que le besoin de clarifier plusieurs points dans

les raisonnements, ont rendu Navier perplexe et les autres scientifiques ne furent pas convaincus. Mais les équations étaient en place.

Quelques années plus tard, toujours en France, Adhémar Barré de Saint-Venant parvenait à faire progresser la théorie des fluides visqueux sans utiliser d'hypothèses de nature moléculaire. Dans son *Mémoire sur la dynamique des fluides* présenté en 1834 à l'Académie des sciences, Barré de Saint-Venant se concentrait sur la modélisation de la vitesse relative des particules de fluide, le terme « particule » devant ici se comprendre au sens de la mécanique du continu, c'est-à-dire comme un volume infinitésimal de fluide. Si l'on considère deux particules de fluide adjacentes se déplaçant à des vitesses différentes, une force de cisaillement résulte du frottement entre les deux particules.

La viscosité modélisée

Contrairement à la pression hydrostatique, la force de cisaillement ne s'exerce pas perpendiculairement à l'interface des deux particules fluides, mais tangentielle. Barré de Saint-Venant adopta alors pour hypothèse que les forces de cisaillement apparaissent dans la direction de l'écoulement – plus précisément dans le sens du mouvement relatif des deux particules de fluide – et qu'elles sont proportionnelles à la vitesse relative des deux particules.

On montre qu'il résulte de ces forces de cisaillement, qui s'opposent à la vitesse relative de deux particules fluides en contact, une viscosité qui lisse les différences de vitesses entre un point du fluide et ses voisins. La force de viscosité correspond alors, dans les équations de Navier-Stokes, à un coefficient de viscosité, noté par la lettre grecque ν , multiplié par la somme des dérivées spatiales d'ordre deux de la vitesse (voir l'encadré ci-contre).

Ainsi, Barré de Saint-Venant avait franchi un pas significatif pour établir les équations de Navier-Stokes. Et pourtant, son nom ne leur est pas associé. Pourquoi ? En fait, les travaux de Barré de Saint-Venant n'ont été imprimés, et donc diffusés, qu'en 1843. Indépendamment, le physicien britannique George Gabriel Stokes publia en 1845 des résultats similaires dans sa thèse *On the theories of the internal friction of fluids in motion*. De façon un peu

LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Dans l'espace tridimensionnel, les équations de Navier-Stokes censées régir l'écoulement d'un fluide incompressible s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= f \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= g \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= h.\end{aligned}$$

Elles reviennent à ajouter aux équations d'Euler un terme correspondant à la force de viscosité. Le terme de viscosité se compose du coefficient de viscosité ν multiplié par une somme de dérivées secondes de la vitesse. Cette somme s'exprime de façon compacte à l'aide de l'opérateur « laplacien », noté par la majuscule grecque Δ (delta) et défini par :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Les équations de Navier-Stokes prennent alors l'expression vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} = \mathbf{f}.$$

La conservation de la masse est également vérifiée par les équations de Navier-Stokes, et s'exprime par la même équation que pour les équations d'Euler ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$).

injuste, sur les deux noms, seul celui de Stokes, en plus de celui de Navier, s'est imposé pour désigner les équations du mouvement d'un fluide.

Revenons aux difficultés associées aux équations de Navier-Stokes. L'une des principales concerne la turbulence, très souvent constatée dans les écoulements rapides. Le caractère fascinant et intrigant de ce phénomène peut être constaté sur une expérience très simple. Il suffit d'observer un lent écoulement d'eau dans un tube horizontal en verre auquel on ajoute une goutte colorée : la goutte s'étire en un fil qui, au bout d'une certaine distance, se met à tourbillonner et ainsi à se mélanger de façon chaotique avec l'eau. Le courant est devenu spontanément turbulent !

Un problème épineux : la turbulence

La turbulence est un phénomène auquel les physiciens et mathématiciens s'intéressent depuis longtemps, sans qu'ils soient parvenus à en proposer une explication et une description satisfaisantes. Cela n'empêche pas son exploitation par les ingénieurs. On sait par exemple qu'un sillage turbulent derrière un mobile entraîne une résistance, ou force de traînée, moins importante qu'un sillage laminaire (non turbulent). C'est pourquoi le profil des casques de moto modernes comporte des creux, qui rendent turbulent l'écoulement de l'air en aval du casque.

La turbulence est un phénomène qui met en jeu de multiples échelles de longueur, qui vont jusqu'à l'échelle microscopique. Or à cette échelle, la description d'un fluide en tant que milieu continu, qui est à la base des équations de Navier-Stokes, perd sa pertinence. Qui plus est, les méthodes numériques pour résoudre ces équations procèdent par discrétisation, un découpage de l'espace en petits volumes où l'écoulement est supposé uniforme – ce qui n'est pas une bonne approximation si l'écoulement est turbulent jusqu'à des échelles plus petites que celle de la discrétisation.

Il n'est donc pas du tout assuré que, dans des régimes turbulents, la résolution numérique des équations de Navier-Stokes fournisse des solutions qui ressemblent suffisamment au comportement réel du fluide. En fait, en simulation numérique, on s'appuie sur ce que l'on appelle des modèles de turbulence, où l'on intro-



4. UN VENT FORT RENCONTRANT UNE ÎLE subit des turbulences et forme un sillage de tourbillons alternés visibles dans la couverture nuageuse. Les modèles météorologiques et climatiques utilisent eux aussi les équations de Navier-Stokes pour décrire et prévoir la circulation atmosphérique. Une illustration supplémentaire de l'importance de bien comprendre ces équations.

duit de façon *ad hoc*, phénoménologique, des paramètres censés englober les détails inaccessibles de la turbulence. Ces modèles, dont il existe des familles entières, aboutissent à des résultats plus ou moins utiles selon les champs d'application. Mais ils ne sont qu'un pis-aller en l'absence d'une véritable compréhension de la turbulence.

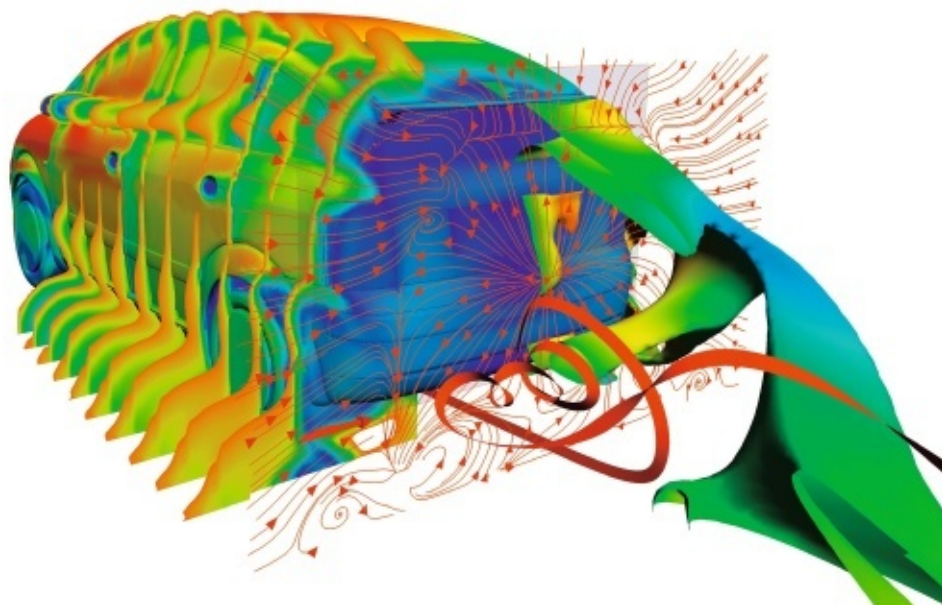
Il faut aussi souligner que les algorithmes numériques ne résolvent pas vraiment les équations de Navier-Stokes : ils visent des approximations des solutions de ces équations, en supposant que celles-ci existent. Par exemple, la discrétisation remplace les dérivées, mathématiquement définies par un passage à la limite, par de simples quotients de différences. Autrement dit, on remplace la question posée par une autre, plus simple et qui approche autant que possible la question originale, tout en espérant que la solution de ce nouveau problème sera elle aussi assez voisine de la solution de la question initiale. Cela doit cependant être prouvé au cas par cas.

Le modèle reflète-t-il la réalité ?

On croit souvent qu'une procédure fiable de vérification est de comparer les solutions numériques avec des données expérimentales. Mais il s'agit là d'une idée fausse. On peut certes ajuster progressivement un modèle de turbulence jusqu'à ce que la solution numérique approche les données expérimentales avec une grande précision, mais ce n'est pas ainsi que l'on améliore notre compréhension de la turbulence.

Par ailleurs, comme j'y ai fait allusion, les équations de Navier-Stokes ne constituent qu'un modèle mathématique de l'écoulement d'un fluide visqueux, et il n'est pas garanti que ce modèle soit toujours conforme à la réalité physique.

En premier lieu, le fait de manipuler une fonction dérivable $v(r, t)$ sous-entend qu'il existe un milieu uniforme où l'on peut en chaque point et à tout instant associer une vitesse. Or une situation plus conforme à la réalité est celle où de très nombreuses molécules se déplacent de façon désordonnée, échangeant entre elles quantité de mouvement et énergie. Au sens strict, la grandeur $v(r, t)$ représente en fait une moyenne sur toutes les molécules présentes dans un petit volume entourant le point r .



Martin Schütz, Science+Computing AG, Tübingen

5. L'ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT DE L'AIR ET DE LA FORCE DE TRAÎNÉE que cet écoulement engendre est importante pour la tenue de route des véhicules. La modélisation de l'écoulement est surtout très complexe à l'arrière du véhicule, et une procédure dérivée de la théorie cinétique des gaz se révèle plus appropriée qu'une résolution approchée des équations de Navier-Stokes.

En effet, il est possible de s'appuyer sur une description de nature microscopique pour aboutir aux équations de Navier-Stokes, moyennant certaines approximations. On peut en particulier s'appuyer sur la théorie cinétique des gaz, élaborée par le physicien autrichien Ludwig Boltzmann (1844-1906), qui donne une description probabiliste et statistique de ce qui se passe à l'échelle moléculaire. Mais le passage de l'échelle moléculaire à des moyennes définies en tout point est délicat, et il n'est pas sûr que la viscosité d'un fluide autre qu'un gaz parfait soit correctement décrite par le terme correspondant dans les équations de Navier-Stokes. Peut-être faut-il aller au-delà des dérivées d'ordre deux et inclure des dérivées d'ordre supérieur pour une modélisation plus précise ?

Il y a quelques années, le mathématicien tchèque Jindřich Nečas (1929-2002) a proposé un modèle alternatif de la viscosité avec l'espoir de prouver l'existence de solutions pour les équations ainsi modifiées. Il n'y est cependant pas parvenu, et les équations de Navier-Stokes représentent toujours la meilleure modélisation dont nous disposons.

Comme un énoncé d'existence et d'unicité des solutions semble pour le moment hors de portée, les mathématiciens se concentrent sur des objectifs intermédiaires. Par exemple, existe-t-il une solution manifestement non physique des

équations de Navier-Stokes ? Si tel était le cas, il apparaîtrait clairement que ces équations ne constituent pas une description adéquate de la réalité. Si, au contraire, on réussissait à exclure qu'apparaissent certaines solutions non physiques, on s'approcherait un peu plus de la preuve recherchée.

Une solution non physique serait, par exemple, une solution pour laquelle les énergies cinétique et potentielle du système augmentent. En effet, puisque les frottements dissipent de l'énergie cinétique en chaleur, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle doit rester inférieure, ou au plus égale, à sa valeur initiale. Il est relativement facile de prouver que cela est le cas pour les équations de Navier-Stokes.

Des solutions qui explosent...

Une autre situation non physique correspondrait à une concentration de l'énergie du système au voisinage d'un seul point, la densité d'énergie tendant ainsi vers l'infini en ce point. Les spécialistes nomment *blow-up* (explosion) ce cas de figure.

Pour mieux comprendre ce problème, faisons l'expérience de pensée suivante : avec une grande cuillère, on imprime un mouvement de rotation à l'eau dont un seau est rempli. Une fois la rotation lancée, nous définissons à un certain instant

l'écoulement rotatif obtenu comme étant les conditions initiales des équations de Navier-Stokes. En un point quelconque du seau, la vitesse du fluide peut-elle augmenter sans limite et ainsi donner lieu à un *blow-up* ? Un tel comportement n'a, bien entendu, jamais été observé. Mais y a-t-il pour autant, dans les équations, une propriété qui empêcherait le développement d'un tel *blow-up* ?

Les mathématiciens connaissent en effet d'autres équations différentielles non linéaires qui présentent des phénomènes non physiques de *blow-up*. C'est d'ailleurs le cas des équations d'Euler : par exemple, il en existe des solutions qui correspondent à une évolution explosive du fluide, alors que ce dernier est initialement partout immobile !

Sauf dans quelques rares situations extrêmement simples, on ne sait pas trouver de solutions mathématiquement explicites (c'est-à-dire non numériques) aux équations de Navier-Stokes. Aussi, pour rechercher des solutions ou pour les caractériser même sans les avoir trouvées, les mathématiciens sont obligés de recourir à des voies indirectes.

Par exemple, ils considèrent qu'*a priori* une solution des équations est une certaine fonction appartenant à un espace fonctionnel approprié, c'est-à-dire un espace abstrait de dimension généralement infinie dont les points sont des fonctions ayant des propriétés pas trop restrictives. En se déplaçant continûment dans cet espace, on passe continûment d'une fonction à une autre. Et pour que l'on puisse comparer des fonctions et considérer des suites de fonctions, l'espace fonctionnel doit être muni d'une notion de distance et de limite.

Dans un premier temps, les mathématiciens ont choisi des espaces fonctionnels dont les éléments sont des fonctions suffisamment régulières (ce qui signifie par exemple des fonctions dérivables plusieurs fois). Mais cela s'est révélé insuffisant et il a fallu se placer dans des espaces plus vastes, contenant aussi des fonctions discontinues ou non différentiables.

En considérant non pas ces fonctions au sens strict, mais les intégrales de leur produit avec une « fonction test » (une fonction en partie arbitraire, ayant toutefois des propriétés telles que l'intégrale considérée a toujours une valeur bien définie), on parvient à une notion de « solution faible » des équations de Navier-Stokes,

l'ensemble des solutions faibles englobant celui des solutions régulières.

En 1933 et 1934, le mathématicien français Jean Leray a pu prouver l'existence de telles solutions faibles. Il a aussi démontré l'existence et l'unicité de solutions régulières, mais seulement pour des temps finis, c'est-à-dire sans pouvoir garantir que ces solutions ne deviennent pas singulières au bout d'un temps suffisamment long.

Trente ans plus tard, en 1964, les Japonais Hiroshi Fujita et Tosio Kato ont étendu le résultat de Leray avec une méthode beaucoup plus robuste, que nombre de mathématiciens ont adoptée. Les deux chercheurs ont ainsi prouvé l'existence et l'unicité de solutions régulières globalement en temps, mais pour des données petites (fluide proche de l'immobilité).

Un autre résultat important a été obtenu avec une méthode similaire à celle de H. Fujita et T. Kato : vers 1993, Marco Cannone et Yves Meyer, de l'Université de Paris-Dauphine, avec Fabrice Planchon, de l'École polytechnique, ont prouvé

qu'il existe des solutions régulières globalement en temps, pour des données fortement oscillantes.

Plus récemment encore, vers 2010, Jean-Yves Chemin, à l'Université Pierre et Marie Curie, et Isabelle Gallagher, de l'Université Paris-Diderot, ont présenté des classes de données, ni forcément petites ni forcément oscillantes, pour lesquelles les équations de Navier-Stokes ont une solution régulière globalement, dans tout l'espace.

Malgré des progrès, le problème résiste

Malgré ces avancées et d'autres, on ne dispose pas encore d'un énoncé général d'existence et d'unicité de solutions régulières. Les tentatives ont jusqu'ici échoué, car en essayant de passer de solutions faibles à des solutions régulières, des singularités apparaissent, comme celle évoquée à propos du seau d'eau.

Certaines études se sont donc concentrées sur l'évaluation de la quantité de

points où des singularités peuvent se développer. En 1982, l'Argentin Luis Caffarelli, l'Américain Robert Kohn et le Canadien Louis Nirenberg ont montré que l'ensemble de ces points est au plus de mesure nulle (cela signifie qu'il y en a éventuellement une infinité, mais qu'ils sont infiniment plus rares que les points où la solution est régulière).

Ce résultat a été sensiblement amélioré vers 2003 par l'Espagnol Luis Escauriaza et les Russes Gregory Seregin et Vladimir Šverák, qui ont étudié la régularité locale des solutions faibles de Leray et établi un critère permettant d'affirmer qu'une solution conduise à un *blow-up*.

Pour résumer, deux solutions sont envisageables au problème proposé par l'Institut Clay. Soit on montre que, sous des hypothèses réalistes, une solution régulière des équations de Navier-Stokes existe pour tous les temps, soit, au contraire, que des singularités apparaissent en général. Dans tous les cas, le résultat représentera un progrès considérable dans l'étude de ces équations aux dérivées partielles. ■



le collège
universcience
universcience.fr

Conférences
Le mardi à 18 h 30
Cité des sciences et de l'industrie

Des chimistes dans la société

À l'occasion de l'année internationale de la chimie, des chercheurs présentent une chimie au service de l'Homme.

10 mai
Comment parler de la chimie ? Ni en bien, ni en mal !
Pierre Laszlo, professeur de chimie honoraire à l'école polytechnique et à l'université de Liège.

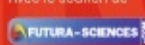
17 mai
D'où vient la peur de la chimie ?
Bernadette Bensaude-Vincent, professeure d'histoire et de philosophie des sciences à l'université de Paris-I Panthéon-Sorbonne.

24 mai
La chimie, pour percer le secret des œuvres d'art
Philippe Walter, directeur de recherche au CNRS, codirecteur du laboratoire du Centre de recherche et de restauration des musées de France.

31 mai
Les bioraffineries du futur
Franck Dumeignil, professeur des universités, membre de l'Institut universitaire de France, unité de catalyse et de chimie du solide, université de Lille.

Auditorium, entrée libre dans la limite des places disponibles
Programme complet : universcience.fr

Avec le soutien de



Le mégaséisme

Pierre Henry

Les sismologues n'avaient prévu ni le mégaséisme qui a secoué la grande île de Honshu au Japon, ni le raz de marée de 20 mètres de haut qui a suivi. Des mécanismes inédits jusqu'à présent sont en cause.

Le 11 mars 2011, une demi-heure après un mégaséisme, un raz de marée frappe la côte Nord-Est de la grande île nipponne de Honshu. Il atteint 20 mètres de haut face à certains endroits encaissés et 10 mètres à Sendai, la plus grande ville de la région. Ces amplitudes expliquent la terrible dévastation due à la vague, mais elles sont relativement modestes si l'on considère la violence inouïe du séisme qui l'a formée : sa magnitude est de 9, ce qui en fait le quatrième plus grand séisme jamais enregistré.

Pareille magnitude est une très mauvaise surprise : personne ne s'attendait à un séisme de cette ampleur à cet endroit. Comment cette possibilité a-t-elle pu échapper à la vigilance des sismologues, notamment de ceux qui furent consultés lors de l'implantation des centrales nucléaires de la région, dans les années 1970 ? Nous expliquons ici les origines de cette erreur d'appréciation et les implications de la nouvelle vision sismologique de la région qui émerge aujourd'hui.

Les Japonais nomment le tremblement de terre du 11 mars 2011 séisme du Tohoku. Ce terme, qui signifie Nord-Est en japonais, désigne la partie Nord de la grande île de Honshu secouée par le séisme. Bien connue pour sa constante activité sismique, la zone dont il provient – la fosse du Japon – se trouve au Nord du point triple du Japon, lieu où se rencontrent les plaques eurasiennne, philippine et pacifique (voir la figure 2). La subduction (plongement d'une plaque sous une autre) qui s'y produit depuis des millénaires engendre de nombreux séismes, parfois accompagnés d'importants tsunamis. Ainsi,



1. LE TSUNAMI DU 11 MARS 2011, consécutif à un mégaséisme, a emporté de nombreuses maisons de la ville japonaise de Natori, qui comptait plus de 72 000 habitants. Ces derniers n'ont eu que 30 minutes pour se mettre en sécurité après que le quatrième plus puissant séisme jamais enregistré a secoué leur ville.