

Voici quelques observations sur les résultats obtenus :

– Pour les séquences prises en exemple au début de l'article, tout se passe bien. La séquence 0000000 est plus probable que 0001000, qui elle-même est plus probable que 1001101. Les complexités déduites des probabilités pour ces trois séquences sont conformes à ce que l'intuition exigeait.

– Chaque suite ayant une longueur comprise entre 1 et 8 est produite au moins une fois et le calcul approché avec les machines de Turing à quatre états lui attribue une probabilité non nulle, donc une complexité finie.

– Pour les 128 séquences déjà classées par les machines à trois états, le classement obtenu avec les machines à quatre états reste le même, sauf dans 17 cas. En général, les déplacements opérés entre les deux classements conduisent à des positions plus conformes à l'intuition. En considérant des machines à quatre états, on améliore ce qu'on avait obtenu avec les machines à trois états : c'est une validation de la méthode.

– Les séquences produites les plus longues ont pour longueur 16. En voici une : 1101010101010101. Bien sûr, ce sont des suites assez peu complexes, car les suites de longueur 16 les plus complexes ne sont pas produites par une machine de Turing à quatre états.

– En général, plus une séquence est longue, plus sa complexité est grande, mais ce n'est pas une règle absolue : par exemple, la séquence 0000000000 (dix fois le 0) est évaluée moins complexe que la séquence de neuf bits 000011100.

– De petites imperfections persistent. En passant de trois à quatre états, on a notablement progressé, mais pour avoir un classement parfait incluant par exemple toutes les séquences de longueur allant jusqu'à dix, il faudrait maintenant mener un calcul complet avec les machines à cinq états, à la limite de ce qu'on peut envisager aujourd'hui. On espère l'entreprendre prochainement. Bien sûr, il ne correspondra qu'à une marche de plus dans une quête infinie.

Pour disposer d'une méthode pratique qui attribue une complexité à toute séquence finie, il faut accepter d'associer plusieurs idées. Trois idées semblent suffire :

(a) Pour les séquences courtes (jusqu'à huit ou dix bits, peut-être un peu plus), la méthode des machines de Turing ;

(b) Pour les séquences de longueur moyenne (de dix bits à quelques centaines de bits) un découpage en tranches ramenant au cas précédent ;

(c) Pour les séquences plus longues, une méthode à base d'algorithmes de compression.

Recollement délicat

Le travail est délicat et on tombera sur des cas où l'évaluation sera peu satisfaisante. Mais le principe général semble acquis et tout n'est plus qu'une question de perfectionnement et d'efforts : prises en compte de machines de Turing ayant plus d'états ; utilisation simultanée d'une multitude d'algorithmes de compression, etc. Ces efforts n'auront jamais de fin, mais nous disposons maintenant de moyens pour le calcul de la complexité de Kolmogorov des séquences binaires de toutes les longueurs, moyens qu'on adaptera aux séquences plus générales de chiffres décimaux, de lettres, de nombres entiers, etc.

Aujourd'hui, une grande variété de méthodes spécifiques, fondées sur des principes particuliers et bien souvent *ad hoc* sont utilisées pour calculer et comparer des complexités d'objets discrets (voir deux exemples sur la figure 4). C'est le cas en informatique dans le domaine des algorithmes pour suites pseudo-aléatoires, en traitement d'images, en génétique, en linguistique, en psychologie, etc. Les avancées du programme de recherche décrit ici mettront à disposition de tous une méthode générale de calcul de la complexité de Kolmogorov qui, en plus d'être homogène (car l'unité de mesure est toujours le bit d'information), sera fondée sur ce qui est reconnu comme la théorie universelle de l'information. Cette théorie longtemps considérée comme inutilisable (du fait de l'existence de nombreux énoncés indécidables concernant $K(s)$) se révèle au fur et à mesure des années praticable et utile. Il est certain pourtant qu'on est loin d'en avoir tiré toutes les applications possibles. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

✓ BIBLIOGRAPHIE

H. Zenil, **Pages Internet donnant accès aux articles cités ci-dessous** : <http://www.mathrix.org/zenil/>

H. Zenil et J.-P. Delahaye, **An algorithmic information theoretic approach to the behaviour of financial markets**, themed issue on « Nonlinearity, Complexity and Randomness », *Journal of Economic Surveys*, 2011.

H. Zenil, **Compression-based investigation of the dynamical properties of cellular automata and other systems**, *Journal of Complex Systems*, vol. 19(1), 2010 : <http://arxiv.org/abs/0910.4042>

J.-P. Delahaye et H. Zenil, **A glance into the structure of algorithmic complexity : Numerical evaluation of the complexity of short strings by small Turing machines**, 2011 : <http://arxiv.org/pdf/1101.4795>

J.-P. Delahaye et H. Zenil, **On the algorithmic nature of the world**, dans G. Dodig-Crnkovic et M. Burgin (éds.), *Information and Computation*, World Scientific, 2010.

J.-P. Delahaye et H. Zenil, **On the Kolmogorov-Chaitin complexity for short sequences**, *Randomness and Complexity : From Leibniz to Chaitin* (C.S. Calude, éd.), World Scientific, pp. 123-130, 2007.

J.-P. Delahaye, **Classer musiques, images, textes et génomes**, *Pour la Science*, pp.90-95, mars 2004.

 ART & SCIENCE

Le ciel se couvre chez Murillo

Sur plusieurs tableaux peints entre le XVI^e et le XVIII^e siècle, le bleu est devenu gris. Dans le pigment utilisé – du smalt –, l'environnement des ions cobalt a été modifié par la fuite des ions potassium.

Loïc MANGIN

Le peintre baroque Bartolomé Esteban Murillo (1617-1682) est, avec Diego Velazquez, Francisco de Zurbarán et José de Ribera, l'un des plus célèbres représentants du Siècle d'or espagnol. Il fut le chef de file de l'école de Séville, second centre artistique de l'Espagne au XVII^e siècle après Madrid où domine Velazquez. Murillo doit sa renommée à plusieurs œuvres religieuses telle *La Vierge du Rosaire*, mais surtout à ses représentations de la vie quotidienne, notamment des portraits de femmes, de pauvres et de mendiants.

De tels sujets ne sont pas propices à une débauche de couleurs vives et, de fait, dans plusieurs tableaux de Murillo, la diversité des couleurs est minimale. Toutefois, certaines toiles n'étaient peut-être pas aussi sombres qu'elles ne l'apparaissent aujourd'hui. Ainsi en est-il de l'œuvre *Deux Trinités*, conservée à la *National Gallery*, à Londres (voir la figure c, page ci-contre). En effet, le ciel gris, au centre, était au départ plus clément, c'est-à-dire bleu. Comment expliquer un tel changement ?

Entre le XVI^e et le XVIII^e siècle, un pigment bleu souvent utilisé était le smalt. Or celui-ci est instable et se décolore en quelques années. Le phénomène était connu dès le XVII^e siècle et était mentionné dans les traités de peinture, mais son mécanisme a longtemps résisté aux explications. Une équipe internationale associant la plateforme européenne de recherche sur les matériaux anciens (IPANEMA), la *National*

Gallery et le C2RMF (CNRS/ministère de la Culture) vient de résoudre l'énigme.

Le smalt était obtenu à partir d'un minerai contenant du cobalt qui était mélangé à de la silice et à de la potasse pour former un verre coloré bleu. Celui-ci était ensuite broyé en une poudre d'un bleu d'autant plus intense que les grains étaient fins.

Depuis le Moyen Âge, la principale source du cobalt utilisé dans la préparation

**La coordination
tétraédrique
des ions cobalt
n'est plus assurée ;
elle devient octaédrique,
et le bleu vire au gris.**

du smalt européen était la smaltite, une variété de skutterudite. Il s'agit d'une famille de minéraux cristallins constitués d'atomes de cobalt, de nickel et d'arsenic, dont un gisement important se trouvait près de la ville de Skutterud, en Norvège. À partir du XVI^e siècle, d'autres minerais de cobalt auraient été ajoutés, tels l'érythrite et la cobaltite. Que se passe-t-il dans le smalt une fois qu'il est appliqué sur la toile ?

Plusieurs hypothèses ont été proposées pour expliquer la décoloration, par exemple une migration des cations cobalt. Cependant, l'analyse de microéchantillons

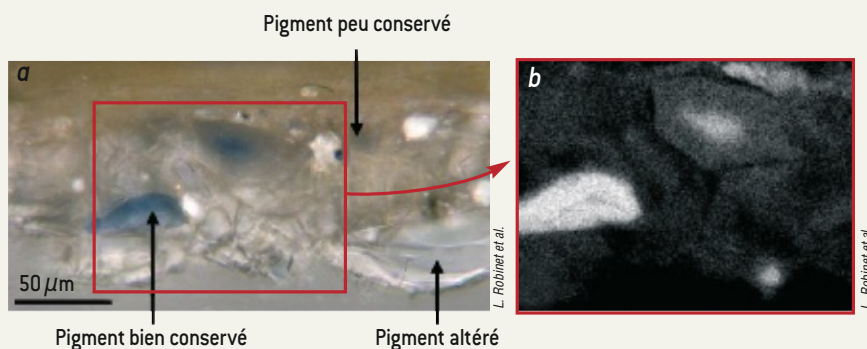
(voir la figure a, où l'on distingue des grains plus ou moins préservés) par spectroscopie d'absorption X sur la station expérimentale LUCIA du synchrotron SOLEIL (CNRS/CEA) a montré que la décoloration résulte d'un changement d'environnement des ions cobalt. Notons que les investigations ont concerné, outre le Murillo, d'autres tableaux : deux de Paolo Veronese (*Les Dieux de l'Olympe* et *La Consécration de Saint-Nicolas*), un de François Lemoyne (*Hercule tuant Cacus*) et enfin, un de Paolo Fiammingo (*Paysage avec l'expulsion des Harpies*). Voyons en détail le mécanisme.

D'abord, la décoloration du smalt est corrélée à une perte de potassium, celui-ci représentant de 12 à 16 pour cent des échantillons bien préservés contre 1 à 2 pour cent dans les plus altérés. Cet appauvrissement en potassium se traduit par un blanchiment des grains lorsqu'ils sont observés par spectroscopie X (voir la figure b). Une telle fuite est connue dans les verres où les ions potassium, mobiles, sont facilement « lessivés » : ils sont remplacés par d'autres types d'ions. Dans la peinture, les ions potassium migraient et s'associaient avec les acides gras de l'huile pour former des savons qui diffusent ensuite vers la surface.

Dans le smalt, les ions cobalt Co^{2+} (les ions Co^{3+} ne sont pas stables à la température requise pour fondre le verre), forment des complexes avec quatre ligands.

La couleur bleue du cobalt dans le smalt est précisément due à cette coordination

Des microéchantillons de peinture (a) observés en lumière visible montrent que certains grains de smalt sont bien conservés tandis que d'autres sont devenus gris. On trouve également des états intermédiaires. La spectroscopie révèle que cette décoloration est liée au potassium (b, plus un grain est blanc, plus il contient de potassium).



tétraédrique, quand le cation Co^{2+} est complexé avec quatre atomes d'oxygène. La stabilité de cette configuration requiert des charges positives supplémentaires qui compensent les charges négatives de l'oxygène. Dans les grains de smalt, ce rôle est dévolu aux ions potassium K^+ .

Le lessivage des ions potassium dans le verre diminue la quantité de cations qui assurent la stabilité de la structure. Les ions qui remplacent le potassium forment des liaisons covalentes fortes avec l'oxygène. L'ensemble de l'édifice est perturbé et la coordination tétraédrique des ions Co^{2+} , responsable de la couleur bleue, n'est pas entretenue ; la distance entre les ions cobalt et les ligands oxygène augmente ; le nombre de ces ligands oxygène passe de quatre à six. Le cobalt est alors dans une coordination octaédrique. Ce changement de coordination se traduit par des modifications des propriétés optiques : le bleu vire au gris !

Malgré cette désagréable tendance à se décolorer, que l'on sait désormais expliquer, le smalt fut très en vogue de Séville jusqu'au Nord de l'Europe : Rembrandt, Vermeer, Holbein l'ont utilisé. Il a néanmoins été concurrencé au XIX^e siècle par les nouveaux bleus de synthèse, de qualité supérieure et, surtout, stables avec le temps.



L. Robinet *et al.*, Investigation of the discoloration of smalt pigment in historic paintings by Co K-edge micro X-ray absorption spectroscopy, *Analytical Chemistry*, à paraître, 2011.

IDÉES DE PHYSIQUE

Scintillations estivales

Zébrures lumineuses dans les piscines, scintillement des étoiles, interruptions des signaux du système GPS: le mécanisme sous-jacent est le même.

Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK

Par une belle nuit d'été, regardons attentivement une étoile proche de l'horizon. Nous la voyons scintiller, c'est-à-dire clignoter légèrement. Ce scintillement est-il dû à une limitation physiologique de notre œil qui fixe une source lumineuse très faible ? Pas du tout ; c'est un phénomène physique bien réel, qui a son origine dans les fluctuations de densité de l'atmosphère. Pour le comprendre, plongeons tout d'abord dans la piscine ou la mer et observons les zébrures lumineuses qui animent le fond. Nous nous enlancerons ensuite dans l'espace et verrons pourquoi le signal provenant d'un satellite s'éteint parfois.

Des caustiques au fond de l'eau

Avant qu'il ne fasse nuit, profitons du soleil et de la chaleur pour nous baigner dans la piscine. Nous pourrions remarquer les figures changeantes qui apparaissent au fond de l'eau (voir la figure 1). Ces lignes lumineuses assez nettes et mouvantes s'atténuent lorsque l'eau devient éteale. Elles ont donc pour origine les petites vagues à la surface de la piscine, et la lumière du Soleil bien sûr.

Quel est l'effet de cette non-planéité ? Tout rayon lumineux qui arrive de biais sur une interface air-eau est dévié : il est « réfracté ». Comme l'indice optique de l'eau est supérieur à celui de l'air, l'angle que fait le rayon réfracté avec la perpendiculaire à la surface est inférieur à l'angle d'incidence. Si la surface de l'eau est ondulée, des rayons parallèles, tels ceux

qui nous parviennent du Soleil, sont déviés différemment selon le point d'incidence sur l'interface air-eau.

Prenons le cas d'un Soleil situé au zénith (voir la figure 2). En haut d'une vague, là où la surface de l'eau est convexe, l'effet de la réfraction est de concentrer les rayons, comme le fait une loupe ou une lentille convergente. À la verticale du sommet de cette vague, lorsqu'on descend en profondeur, l'intensité lumineuse augmente. Pour des vagues espacées de 50 centimètres et dont l'amplitude est de 1 centimètre, le rayon de courbure de la surface est d'une soixantaine de centimètres ; les rayons lumineux se focalisent alors à une profondeur de l'ordre de 2,5 mètres. En revanche, dans un creux, là où l'interface air-eau est concave, l'effet est inverse : les rayons lumineux sont divergents et l'intensité lumineuse diminue.

L'analogie avec une lentille suggère que l'image du Soleil ne devrait être nette qu'à une seule profondeur. Tel n'est cependant pas le cas. On voit des structures lumineuses

assez nettes à toutes les profondeurs, dès que ces dernières dépassent les longueurs focales en jeu. En fait, la surface de l'eau n'est pas une lentille parfaite. Au lieu d'avoir une focalisation parfaite en un ou plusieurs points et une divergence des rayons au-delà, la lumière se concentre sur une région de l'espace plus ou moins étendue et aux contours assez marqués, dont la forme dépend de la situation géométrique.

Une telle région de concentration lumineuse est appelée caustique. Son intersection avec une surface fait apparaître des figures plus ou moins intéressantes. Les zébrures changeantes que l'on voit sur le fond de la piscine en constituent un bon exemple. Une autre caustique remarquable est la courbe lumineuse en forme de cœur que l'on aperçoit parfois dans une tasse de café ou dans un verre de boisson (voir la figure 1) : elle est formée par la réflexion des rayons lumineux sur la paroi interne (et circulaire) du récipient.

Quel est le lien avec le scintillement des étoiles ? De même que la surface d'une piscine n'est pas plane, l'atmosphère n'est pas un milieu uniforme. La température y varie d'un point à un autre et d'un instant à l'autre, la variation étant d'environ 0,1 à 1 °C sur une échelle de l'ordre du mètre. Il en découle des variations de densité de l'air, donc de l'indice optique, certes faibles (de l'ordre du milliardième), mais qui se manifestent sur toute l'épaisseur de l'atmosphère. Tout se passe comme si l'atmosphère était constituée, à chaque instant, d'une superposition de lentilles de tailles et de longueurs focales variées.



1. SELON LES SURFACES RENCONTRÉES et les milieux traversés, la lumière du Soleil peut se concentrer dans certaines régions, nommées caustiques. Les zébrures lumineuses au fond d'une piscine et la courbe brillante en forme de cœur dans un récipient circulaire en sont des exemples.