

du Nord). La dépression est une pathologie multifactorielle, associant des causes génétiques, neurobiologiques, mais aussi socioculturelles et environnementales.

Contre les troubles de l'humeur

Des recherches récentes suggèrent que l'alimentation joue un rôle dans certaines formes de dépression. Les enquêtes d'observation montrent que les patients dépressifs ont des concentrations d'oméga 3 inférieures à la moyenne dans le sang et le tissu adipeux, et que les symptômes sont d'autant plus graves que la concentration en DHA est faible. Pourtant, les études où l'on a administré des oméga 3 à des personnes dépressives n'ont pas donné de résultats concluants en raison de la variabilité des préparations d'oméga 3 utilisées, des doses et des durées de traitement, mais aussi de la disparité des sujets étudiés. En revanche, l'administration de DHA et d'EPA améliore l'humeur. Des malades dépressifs résistant aux traitements ont vu leur état s'améliorer notablement avec un gramme par jour d'EPA. Toutes ces données suggèrent qu'un apport insuffisant d'oméga 3 pourrait accroître la susceptibilité à l'état dépressif.

Quel pourrait être le lien entre un déficit en oméga 3 et la dépression ? Nous l'avons souligné, le DHA intervient dans la régulation de nombreux neurotransmetteurs, notamment de la sérotonine et de la dopamine (le système monoaminergique), neurotransmetteurs utilisés dans les traitements antidépresseurs. Ainsi, le déficit chronique en oméga 3 favoriserait l'apparition de troubles dépressifs en altérant le fonctionnement des systèmes de neurotransmission. Une autre hypothèse a été proposée pour expliquer le lien entre oméga 3 et dépression. Le métabolisme des acides gras polyinsaturés serait perturbé en raison d'une trop faible activité des enzymes impliquées dans la chaîne métabolique. Ce défaut serait d'origine génétique. À cela s'ajouterait un apport insuffisant d'oméga 3. Ces deux anomalies auraient pour conséquence une présence insuffisante de DHA dans les membranes des cellules cérébrales.

Chez la femme enceinte, la concentration sanguine en DHA et EPA est diminuée durant le troisième trimestre, car, comme nous l'avons évoqué, c'est la période correspondant à l'accumulation

maximale du DHA dans les membranes cellulaires cérébrales du fœtus. La concentration en DHA chez la mère se normaliserait au bout d'un an. Mais, quand la concentration en DHA reste trop faible, les risques d'une dépression *post-partum* seraient augmentés. Ces risques seraient plus grands chez les femmes ayant des grossesses rapprochées, les stocks maternels de DHA s'épuisant progressivement. Toutefois, les essais de supplémentation en DHA (avant ou après l'accouchement) se sont révélés inefficaces dans la prévention de la dépression *post-partum*.

Toutes ces études suggèrent qu'une altération du métabolisme des oméga 3 ou une insuffisance des apports alimentaires de leurs précurseurs augmenterait la vulnérabilité au stress et à long terme à la dépression. Inversement, le maintien d'un statut optimal des oméga 3, reposant sur une alimentation variée et équilibrée, favoriserait une bonne gestion comportementale du stress. D'un point de vue thérapeutique, ces données ouvrent d'intéressantes perspectives dans le traitement de la dépression avec l'utilisation de suppléments riches en oméga 3 et d'agents pharmacologiques augmentant la synthèse des phospholipides.

Des capsules d'oméga 3 ?

Les acides gras sont des constituants importants de notre alimentation, et ils jouent un rôle essentiel dans l'organisme. Diverses études ont confirmé que les oméga 3 réduisent les maladies coronariennes et améliorent l'état de certaines personnes dépressives. D'autres seront nécessaires pour mieux définir les indications. Quoi qu'il en soit, pour les personnes en bonne santé, il faut privilégier une alimentation variée, riche en huiles végétales (colza et noix, entre autres) et en poisson. Quant aux personnes dépressives, une alimentation « normale » ne permettra pas d'atteindre les apports conseillés pour obtenir des effets thérapeutiques : au moins 70 grammes de sardine ou 500 grammes de cabillaud par jour ! Dans ces conditions, la prescription de capsules d'« oméga 3 thérapeutique » s'impose. Enfin, l'avenir sera sans doute aux aliments qui seront enrichis en oméga 3 – par le lin ou les microalgues, par exemple –, et qui deviendront des substituts potentiels du poisson. ■

LES AUTEURS



Jean-Michel LECERF est professeur associé à l'Institut Pasteur de Lille, où il dirige le Service de nutrition. Il est également attaché consultant en premier au Centre hospitalier régional universitaire de Lille, dans le Service de médecine interne.

Sylvie VANCASSEL est chargée de recherche à l'INRA de Jouy-en-Josas dans l'Unité nutrition et régulation lipidique des fonctions cérébrales, NuReLiCe.

✓ BIBLIOGRAPHIE

M. Freeman et M. Rapoport, **Omega-3 fatty acids and depression : from cellular mechanisms to clinical care**, *J. Clin. Psychiatry*, vol. 72, pp. 258-259, 2011.

D. Kromhout *et al.*, **n-3 fatty acids and cardiovascular events after myocardial infarction**, *New England Journal of Medicine*, vol. 363(21), pp. 2 015 - 2 026, 2010.

J.-M. Lecerf, **Acides gras et risque cardio-vasculaire**, *Médecine et Nutrition*, vol. 45, n° 2, pp. 1-25, 2009.

R. Liperoti *et al.*, **Omega-3 polyunsaturated fatty acids and depression : a review of the evidence**, *Current Pharmaceutical Design*, vol. 15, pp. 4165-4172, 2009.

F. Kuperstein *et al.*, **Altered expression of key dopaminergic regulatory proteins in the postnatal brain following perinatal n-3 fatty acid dietary deficiency**, *J. Neurochem.*, vol. 106, pp. 662-671, 2008.

I. Fedorova et N. Salem, **Omega-3 fatty acids and rodent behavior, Prostaglandins Leukot Essent Fatty Acids**, vol. 75, pp. 271-289, 2006.

Avis de l'Agence française de sécurité sanitaire des aliments relatif à l'actualisation des apports nutritionnels conseillés pour les acides gras : <http://www.anses.fr/Documents/NUT2006sa0359.pdf>

Des octonions pour la théorie des cordes

John Baez et John Huerta

D'après la théorie des cordes, l'Univers serait doté d'un espace-temps de dimension 10 ou 11. Un système de nombres découvert au XIX^e siècle et quelque peu oublié depuis en fournit peut-être l'explication la plus simple.

Enfants, nous avons tous appris à manier des nombres. On commence par compter, puis viennent l'addition, la soustraction, la multiplication et enfin la division. Mais les mathématiciens savent que le système de nombres qu'on nous enseigne à l'école n'est qu'une possibilité parmi bien d'autres. D'autres types de nombres sont importants pour comprendre la géométrie et la physique. L'une des alternatives les plus étranges est celle des octonions. Largement négligés depuis leur découverte en 1843, ils ont au cours des dernières décennies pris une importance étonnante dans la théorie des cordes. Et de fait, si la théorie des cordes constitue une représentation correcte de l'Univers, les octonions pourraient expliquer pourquoi l'Univers a le nombre de dimensions que lui attribue cette théorie.

Les octonions ne seraient pas le premier élément de mathématiques pures à être utilisé pour mieux comprendre le monde. Ce ne serait pas non plus le premier système alternatif de nombres à se révéler utile. Afin de comprendre pourquoi, considérons d'abord le jeu de nombres le plus simple, celui des «nombres réels». L'ensemble de tous les nombres réels pouvant se représenter sous la forme

d'une droite (*voir l'encadré page 73*), on peut dire que l'ensemble des nombres réels est unidimensionnel. On peut noter de même que la droite est unidimensionnelle parce que, pour en spécifier un point, il suffit d'un seul nombre réel.

Des imaginaires utiles

Jusqu'au XVI^e siècle, seuls les nombres réels étaient en lice. Mais à la Renaissance, des mathématiciens ambitieux ont tenté de résoudre des équations de plus en plus compliquées, allant même jusqu'à organiser des compétitions pour résoudre les problèmes les plus coriaces. Gerolamo Cardano (ou Jérôme Cardan), un mathématicien, médecin, joueur et astrologue italien, introduisit une sorte d'arme secrète : la racine carrée de -1 . Là où d'autres auraient ergoté, il a osé utiliser ce nombre mystérieux dans le cadre de calculs plus longs dont les résultats étaient des nombres réels ordinaires.

Cardan ne savait pas exactement pourquoi cette astuce fonctionnait, mais elle lui donnait les bonnes réponses. Il publia ses idées en 1545, enclenchant une longue controverse : la racine carrée de -1 existe-t-elle vraiment, ou ne s'agit-il que

d'une astuce de calcul ? Près de 100 ans plus tard, le Français René Descartes rendit son verdict en qualifiant d'«imaginaire» cette entité, que l'on nota i .

Néanmoins, les mathématiciens ont suivi les pas de Cardan et ont commencé à travailler avec les nombres «complexes», c'est-à-dire les nombres de la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels. Vers 1806, le Genevois Jean-Robert Argand répandit l'idée que les nombres complexes représentent des points sur un plan. L'idée est simple : dans $a + bi$, le nombre a indique la position horizontale du point correspondant, tandis que le nombre b spécifie sa position verticale.

On peut ainsi se représenter n'importe quel nombre complexe comme un point du plan, mais Argand est allé un peu plus loin : il a montré que les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication et division) sur les nombres complexes peuvent être interprétées comme des manipulations géométriques dans le plan (*voir l'encadré page 73*).

Presque tout ce que l'on peut faire avec les nombres réels peut être fait avec les nombres complexes. En réalité, la plupart des méthodes et raisonnements mathématiques fonctionnent mieux avec les

nombres complexes qu'avec les nombres réels. Cardan s'en était en partie rendu compte: on sait résoudre d'avantage d'équations avec les nombres complexes qu'avec les nombres réels.

Si un système bidimensionnel de nombres, les nombres complexes, offre une puissance accrue, qu'en est-il des systèmes de dimensionnalité supérieure? Malheureusement, une simple extension se révèle impossible. Un mathématicien irlandais allait découvrir le secret des systèmes de nombres à dimension supérieure des décennies plus tard. Et c'est seulement maintenant, deux siècles après, que nous commençons à saisir l'étendue de leur puissance.

Hamilton et son ami Graves s'en mêlent

En 1835, à l'âge de 30 ans, le mathématicien et physicien William Rowan Hamilton découvrit comment traiter les nombres complexes comme des couples de nombres réels. À l'époque, les mathématiciens écrivaient généralement les nombres

complexes sous la forme $a + bi$ introduite par Argand, mais Hamilton remarqua que rien ne nous empêche de considérer le nombre $a + bi$ comme une façon particulière de noter le couple (a, b) formé par les deux nombres réels a et b .

Cette notation permet d'additionner et de soustraire facilement des nombres complexes. Il suffit en effet d'additionner ou de soustraire les nombres occupant la même position dans les couples de nombres réels: ainsi, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Hamilton a également mis au point des règles légèrement plus compliquées pour multiplier et diviser les nombres complexes de façon à ce qu'ils conservent la belle signification géométrique découverte par Argand.

Après avoir inventé ce système algébrique pour les nombres complexes, Hamilton essaya durant de nombreuses années d'inventer une algèbre plus vaste, mettant en œuvre des triplets qui joueraient un rôle similaire en géométrie tridimensionnelle. Cette recherche fut pour lui très frustrante. Il écrivit un jour à son fils: «Tous les matins [...], lorsque je descendais pour le petit

L'ESSENTIEL

- ✓ L'ensemble des nombres réels est de dimension 1, celui des nombres complexes est de dimension 2.
- ✓ On peut aussi construire des systèmes de nombres de dimension supérieure. Mais on ne peut définir de façon cohérente une addition, une multiplication et une division qu'en dimensions 4 (quaternions) et 8 (octonions).
- ✓ Les octonions pourraient jouer un rôle clef dans la théorie des cordes et dans les symétries qu'elle fait intervenir.

1. CES DÉVELOPPEMENTS portant sur les octonions, nombres de dimension 8, conduiront-ils à une meilleure formulation et compréhension de la théorie des cordes? Les auteurs le pensent.

LES AUTEURS



Physicien-mathématicien de l'Université de Californie à Riverside, John BAEZ est actuellement au Centre des technologies quantiques de Singapour. John HUERTA vient d'achever sa thèse de doctorat en mathématiques à l'Université de Californie à Riverside.

BIBLIOGRAPHIE

J. G. Huerta, *Division Algebras, Supersymmetry and Higher Gauge Theory*, thèse de doctorat, Université de Californie à Riverside, juin 2011 [<http://math.ucr.edu/home/baez/huerta.pdf>].

P. Girard, *Quaternions, algèbre de Clifford et physique relativiste*, Presses Polytechniques Romandes, 2004.

J. C. Baez, *The octonions*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 39, pp. 145-205, 2002 [<http://math.ucr.edu/home/baez/octonions>].

J. Conway et D. Smith, *On Quaternions and Octonions*, A K Peters, 2001.

S. Okubo, *Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics*, Cambridge University Press, 1995.

déjeuner, ton petit frère William Edwin et toi me demandiez : 'Alors, Papa, est-ce que tu arrives à multiplier les triplets ?' À quoi j'étais toujours obligé de répondre en secouant tristement la tête : 'Non, je peux seulement les additionner et les soustraire'. » Hamilton ne pouvait pas le savoir à l'époque, mais la tâche qu'il s'était fixée était mathématiquement impossible.

Quaternions de dimension quatre

Hamilton recherchait un système tridimensionnel de nombres où l'on peut ajouter, soustraire, multiplier et diviser. La division est la partie difficile : un système de nombres où l'on peut diviser (c'est-à-dire où tout élément non nul a un inverse pour la multiplication) est ce qu'on appelle une algèbre de division. Ce n'est qu'en 1958 que trois mathématiciens ont prouvé un fait remarquable soupçonné depuis des décennies : toute algèbre de division doit être de dimension 1 (l'algèbre des nombres réels), 2 (les nombres complexes), 4 ou 8. Pour parvenir à ses fins, Hamilton devait changer les règles du jeu.

Hamilton lui-même avait trouvé une solution le 16 octobre 1843. Il marchait à Dublin avec sa femme le long du Royal Canal, en route vers une réunion de l'Académie royale irlandaise, quand il eut une révélation soudaine. En dimension 3, on ne pouvait pas décrire les rotations et les dilatations à l'aide de trois nombres seulement. Il fallait un quatrième nombre, ce qui donnait lieu à un ensemble quadridimensionnel de nombres nommés quaternions et écrits sous la forme $a + bi + cj + dk$. Ici, les « nombres » i , j et k sont trois différentes racines carrées de -1 (c'est-à-dire vérifiant $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, voir l'encadré page 74).

Hamilton écrivit plus tard : « J'ai sur-le-champ senti se fermer le circuit galvanique de la pensée ; et les étincelles qui s'en sont échappées étaient les équations fondamentales entre i , j et k , exactement telles que je les ai utilisées depuis. » Et, remarquable geste de vandalisme mathématique, il grava ces équations dans la pierre du pont Brougham. Ces inscriptions ont maintenant disparu sous les graffitis, mais une plaque a été apposée pour commémorer la découverte.

Il peut sembler étrange que nous ayons besoin de points d'un espace quadridimensionnel pour décrire des changements

dans l'espace tridimensionnel, mais tel est bien le cas. Trois nombres servent à caractériser une rotation dans l'espace, ce que l'on peut aisément comprendre si l'on s'imaginer en train de piloter un avion. Pour orienter l'appareil, on peut modifier son assiette (l'angle que fait son axe longitudinal avec l'horizontale), modifier sa direction dans le plan horizontal (c'est-à-dire le faire tourner à droite ou à gauche) et, enfin, modifier l'angle des ailes de l'avion par rapport à l'horizontale. Le quatrième nombre dont on a besoin sert à décrire la dilatation (l'étirement ou le rétrécissement).

Hamilton passa le reste de sa vie obsédé par les quaternions, et il leur trouva de nombreuses utilisations. Aujourd'hui, dans beaucoup de ces applications, les quaternions ont été remplacés par des cousins plus simples : les vecteurs, que l'on peut considérer comme des quaternions particuliers, de la forme $bi + cj + dk$ (le premier nombre a vaut simplement zéro). Les quaternions conservent cependant leur niche : ils sont efficaces pour représenter les rotations tridimensionnelles sur ordinateur et interviennent à chaque fois que cela est nécessaire, des systèmes de contrôle d'attitude d'un vaisseau spatial au moteur de rendu d'un jeu vidéo.

Malgré ces applications, nous pourrions nous demander ce que sont exactement j et k étant donné que nous avons déjà défini i comme étant la racine carrée de -1 . Est-ce que ces racines carrées de -1 existent vraiment ? Pouvons-nous continuer à inventer autant de racines carrées de -1 qu'il nous plaît ?

Octonions de dimension huit

Ces questions ont été posées par un ami d'études de Hamilton, l'avocat John Graves, dont l'intérêt pour l'algèbre avait été à l'origine des réflexions de Hamilton sur les nombres complexes et les triplets. Le lendemain même de cette promenade décisive à l'automne 1843, Hamilton envoya à Graves une lettre décrivant sa percée. Graves répondit neuf jours plus tard et félicita Hamilton pour l'audace de son idée, mais il ajoutait : « Il y a quand même quelque chose dans le système qui me chagrine. Je ne saisis pas très bien dans quelle mesure nous sommes libres de créer arbitrairement des imaginaires et de les doter de propriétés surnaturelles. » Et il posait la question :

«Si avec ton alchimie tu peux faire trois livres d'or, pourquoi devrais-tu en rester là?»

Comme Cardan avant lui, Graves mit ses interrogations de côté suffisamment longtemps pour produire lui-même un peu d'or. Le 26 décembre, il écrivit de nouveau à Hamilton pour lui décrire un système de nombres à huit dimensions qu'il nommait octaves, et que l'on appelle maintenant les octonions. Mais Graves ne parvint pas à éveiller l'intérêt de Hamilton. Ce dernier promit de parler des octaves de Graves à la Société royale irlandaise, ce qui était à l'époque l'une des façons de rendre publics des résultats mathématiques. Mais Hamilton remettait sans cesse à plus tard sa communication, et en 1845 le jeune génie Arthur Cayley redécouvrit les octonions et coiffa Graves au poteau de la publication. C'est pourquoi les octonions portent parfois le nom de nombres de Cayley.

Une algèbre non associative

Pourquoi Hamilton n'aimait-il pas les octonions ? D'une part, il était obsédé par ses recherches sur sa propre découverte, les quaternions. D'autre part, il avait une raison purement mathématique : les octonions enfreignent certaines lois chères à l'arithmétique.

Les quaternions sont eux-mêmes déjà un peu étranges. Quand on multiplie des nombres réels, peu importe l'ordre dans lequel on le fait : 2×3 est égal à 3×2 , par exemple. La multiplication est «commutative». Il en va de même avec les nombres complexes. Mais ce n'est pas le cas de la multiplication des quaternions.

Les quaternions décrivent des rotations en trois dimensions, et l'on sait que le résultat de plusieurs rotations successives dépend de l'ordre dans lequel elles ont été effectuées. Chacun peut le vérifier (voir l'encadré page 75). Prenez un livre, retournez-le autour de son axe vertical (vous lisez maintenant la quatrième de couverture), et faites-lui faire un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre. Maintenant, effectuez ces deux opérations dans l'ordre inverse : faites d'abord un quart de tour, puis retournez. La position finale est alors l'image inversée de celle de la première procédure. Puisque le résultat dépend de l'ordre, la composition des rotations n'est pas commutative. De même, la multiplication des quaternions ne l'est pas.

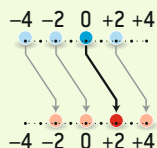
NOMBRES RÉELS ET NOMBRES COMPLEXES

À l'école, on apprend à relier les notions d'addition et de soustraction à des opérations concrètes : déplacer des nombres le long de la droite numérique. Ce lien entre l'algèbre et la géométrie se révèle très puissant. Grâce à lui, les mathématiciens peuvent utiliser l'algèbre des octonions pour résoudre des problèmes dans des mondes de dimension 8 difficiles à imaginer. Les tableaux ci-dessous montrent comment les opérations arithmétiques ou géométriques sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes, entités à deux dimensions.

NOMBRES RÉELS ($\mathbb{R}$)

Addition

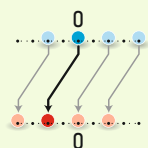
$$0 + 2 = 2$$



L'addition le long de la droite des réels est simple : on décale simplement chaque nombre vers la droite de la quantité à ajouter.

Soustraction

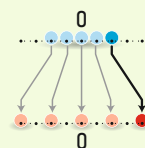
$$0 - 2 = -2$$



La soustraction fonctionne de la même façon, mais ici on déplace les nombres vers la gauche.

Multiplication

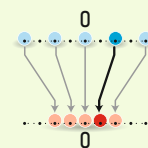
$$2 \times 2 = 4$$



Dans la multiplication par un nombre a , on étire la droite des nombres d'un facteur a .

Division

$$2 \div 2 = 1$$

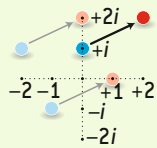


La division équivaut à resserrer les points sur la droite des nombres.

NOMBRES COMPLEXES ($\mathbb{C}$)

Addition

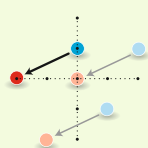
$$i + (2 + i) = 2 + 2i$$



Les nombres complexes ont deux composantes : la partie réelle, mesurée sur l'axe horizontal, et la partie imaginaire (que multiplie i), mesurée sur l'axe vertical. Pour ajouter deux nombres complexes a et b , on décale a vers la droite d'une quantité correspondant à la partie réelle de b , et vers le haut d'une quantité correspondant à la partie imaginaire de b .

Soustraction

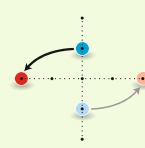
$$i - (2 + i) = -2 + 0i$$



De la même façon, quand on effectue la soustraction $a - b$ de deux nombres complexes, on décale a vers la gauche de la valeur de la partie réelle de b , et vers le bas de la valeur de la partie imaginaire de b .

Multiplication

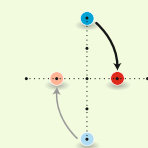
$$i \times (2i) = -2$$



Comme avec les nombres réels, la multiplication d'un nombre complexe a par un nombre réel étire le nombre a . Par ailleurs, la multiplication de a par i fait tourner a de 90 degrés dans le sens antihoraire.

Division

$$2i \div (2i) = 1$$



La division d'un nombre complexe a par un nombre réel k contracte le nombre a d'un facteur k , comme avec les nombres réels. La division de a par i fait tourner le nombre a de 90 degrés dans le sens horaire.

Les octonions sont bien plus étranges encore. Non seulement leur multiplication n'est pas commutative, mais ils contreviennent à une autre loi familière de l'arithmétique : l'associativité, c'est-à-dire l'égalité $(xy)z = x(yz)$ pour tous x, y et z (la soustraction n'est pas associative, mais elle peut être vue comme une addition de nombres négatifs, et l'addition est associative). Mais nous avons l'habitude que la multiplication soit associative et la plupart des mathématiciens ont toujours cette attente, même s'ils se sont accoutumés aux opérations non commutatives. Ainsi, la composition des rotations est associative, même si elle n'est pas commutative.

Pour quel usage ?

Le point le plus important était peut-être qu'il n'était pas clair à l'époque de Hamilton que les octonions puissent servir à quelque chose. Ils sont étroitement liés à la géométrie en dimensions 7 et 8, et on peut décrire les rotations dans ces espaces multidimensionnels à l'aide de multiplications d'octonions. Mais pendant plus d'un siècle, cela est resté un exercice purement intellectuel. Il a fallu attendre le développement de la physique des par-

ticules (et la théorie des cordes en particulier) pour voir à quoi pourraient servir les octonions dans le monde réel.

Dans les années 1970 et 1980, les physiciens théoriciens ont développé une jolie idée : la supersymétrie (dont on apprend par la suite qu'elle est nécessaire à la théorie des cordes). Selon cette idée, l'Univers présente aux niveaux les plus fondamentaux une symétrie entre la matière élémentaire et les interactions fondamentales. La matière est décrite par des particules (tels l'électron ou le proton) nommées fermions, tandis que les forces fondamentales sont décrites par des particules (tel le photon, vecteur de l'interaction électromagnétique) nommées bosons. La supersymétrie stipule qu'à chaque particule de matière (un fermion) est associé un boson, et qu'à chaque particule de force est associé un fermion.

La supersymétrie contient également l'idée que les lois de la physique resteraient les mêmes si nous échangeons toutes les particules de force et de matière. Imaginez que vous regardiez le monde à travers un miroir qui, au lieu d'échanger la droite et la gauche, remplaçait chaque particule de force par une particule de matière, et inversement. Si la supersymétrie décrit vraiment notre Univers, cet univers miroir

se comporterait comme le nôtre. Bien que les chercheurs n'en aient pas encore trouvé de preuve expérimentale, la supersymétrie est une idée tellement séduisante et qui a conduit à des mathématiques tellement intéressantes que de nombreux physiciens espèrent et croient qu'elle est vraie.

Nombres unificateurs

Il y a cependant une théorie qui est bien vérifiée : la mécanique quantique. Et d'après la mécanique quantique, les particules sont aussi des ondes. Dans la version standard à trois dimensions de la mécanique quantique que les physiciens utilisent tous les jours, un type de nombres (les spineurs) entre dans la description du comportement ondulatoire des particules de matière. Un autre type de nombres (les vecteurs) permet de décrire le comportement ondulatoire des particules de force. Pour comprendre les interactions entre particules, nous devons combiner les deux types de nombres à l'aide d'une multiplication bricolée de toutes pièces. Même si le système que nous utilisons actuellement semble fonctionner, il est inélégant.

Comme alternative, imaginez un univers étrange dépourvu de temps, où seul

Quaternions et octonions

LES QUATERNIONS ($\mathbb{H}$)

L'ensemble des quaternions, noté $\mathbb{H}$ en l'honneur de Hamilton, leur inventeur-découvreur, est l'ensemble de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme $a + bi + cj + dk$, où a, b, c et d sont des nombres réels. Par définition, les symboles i, j et k vérifient les égalités suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 ;$$

$$ij = -ji = k ; jk = -kj = i ; ki = -ik = j.$$

Cela peut être résumé par la table de multiplication ci-dessous.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	i	-i	-1

La multiplication de deux quaternions x et y n'est donc pas, en général, commutative : xy n'est pas égal à yx pour tous x et y .

L'addition de deux quaternions est définie de façon naturelle :

$$\text{si } x = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k \text{ et}$$

$$y = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k, \text{ alors :}$$

$$x + y = y + x = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

L'ensemble des quaternions peut être muni d'une norme (une sorte de longueur attribuée à chaque nombre). Le carré de la norme de $x = a + bi + cj + dk$ est ainsi le nombre positif ou nul $xx^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, où $x^* = a - bi - cj - dk$ est le « conjugué » de x .

Les rotations dans l'espace peuvent être représentées de façon efficace à l'aide de quaternions. Plus précisément, considérons la rotation d'angle 2α (dans le sens direct, et compris entre 0 et 2π radians) autour de l'axe dont le vecteur unité a pour composantes (u_x, u_y, u_z) . À tout vec-

teur de composantes x, y et z , on associe le quaternion $V = xi + yj + zk$. Appliquée au vecteur (ou quaternion) V , la rotation considérée conduit au quaternion (vecteur) V' donné par le produit :

$$V' = q_\alpha V q_\alpha^*, \text{ où } q_\alpha = \cos \alpha + \sin \alpha (u_x i + u_y j + u_z k).$$

LES OCTONIONS ($\mathbb{O}$)

L'ensemble des octonions, noté $\mathbb{O}$, est celui de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme :

$$x_0 + x_1i_1 + x_2i_2 + x_3i_3 + x_4i_4 + x_5i_5 + x_6i_6 + x_7i_7,$$

où $x_0, x_1, \dots, x_7$ sont des nombres réels et où les symboles $i_1, i_2, \dots, i_7$ vérifient la table de multiplication ci-dessous.

	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
1	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	i_1	-1	i_3	- i_2	i_5	i_4	- i_7	i_6
i_2	i_2	- i_3	-1	i_1	- i_6	i_7	i_4	- i_5
i_3	i_3	i_2	- i_1	-1	- i_7	- i_6	i_5	i_4
i_4	i_4	i_5	i_6	i_7	-1	- i_1	- i_2	- i_3
i_5	i_5	- i_4	- i_7	i_6	i_1	-1	- i_3	i_2
i_6	i_6	i_7	- i_4	- i_5	i_2	i_3	-1	- i_1
i_7	i_7	- i_6	i_5	- i_4	i_3	- i_2	i_1	-1

Par ailleurs, l'addition est définie comme pour les quaternions et a les propriétés habituelles.

On peut voir que cette multiplication n'est pas associative. Par exemple, $(i_1 i_4) i_6 = i_3$, alors que $i_1 (i_4 i_6) = -i_3$. Elle n'est bien sûr pas commutative non plus, et l'on a : $i_p i_q = -i_q i_p$. La table de multiplication peut être entièrement caractérisée par les égalités :

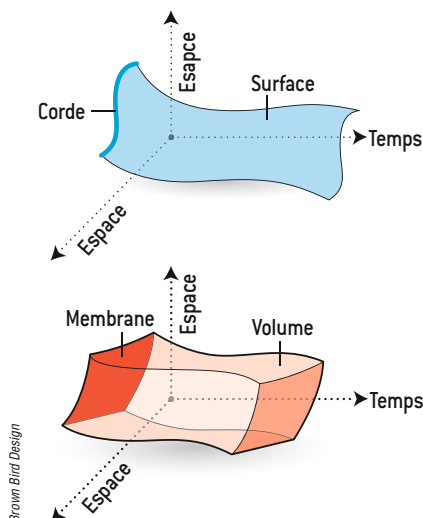
$$i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = ijk = jki = kij = -1, \text{ où l'on a noté } i, j, k \text{ et } l \text{ au lieu de } i_1, i_2, i_3 \text{ et } i_4.$$

existe l'espace. Si cet univers est de dimension 1, 2, 4 ou 8, les particules de matière comme de force seraient des ondes décrites par un seul type de nombres, à savoir des nombres d'une certaine algèbre de division, où l'addition, la soustraction, la multiplication et la division sont possibles. En d'autres termes, dans ces dimensions, les vecteurs et les spineurs coïncident : les uns comme les autres sont simplement des nombres réels, des nombres complexes, des quaternions ou des octonions, respectivement. La supersymétrie émerge naturellement et fournit ainsi une description unifiée de la matière et des forces. Une simple multiplication décrit les interactions, et toutes les particules (quel que soit leur type) sont décrites à l'aide du même système de nombres.

Mais cet univers-jouet ne peut pas être réel, puisque nous devons prendre le temps en considération. Dans la théorie des cordes, cette considération a un effet très curieux. À tout instant, une corde est un objet unidimensionnel, comme une courbe ou une droite. Mais à mesure que le temps s'écoule, la corde trace une surface bidimensionnelle. On montre que cette évolution modifie les dimensions dans lesquelles la supersymétrie apparaît naturellement, en en ajoutant deux : une pour la corde, et une pour le temps. Au lieu de supersymétrie en dimension 1, 2, 4 ou 8, on obtient une supersymétrie en dimension 3, 4, 6 ou 10.

Or, comme par hasard, les théoriciens des cordes nous disent depuis des années que seules les versions à dix dimensions de la théorie sont cohérentes. Les autres sont entachées de défauts nommés anomalies : quand on calcule certaines grandeurs de deux façons distinctes, on obtient des résultats différents. Il n'y a qu'en dimension 10 que la théorie des cordes pourrait être valide. Mais la théorie des cordes à dix dimensions est, comme nous venons de le voir, la version de la théorie qui utilise les octonions. Si la théorie des cordes est vraie, les octonions ne sont donc plus une curiosité inutile ; ils pourraient apporter un éclairage nouveau sur le fait que la théorie des cordes n'est cohérente qu'en dimension 10. À dix dimensions, les particules de matière et de force sont représentées par le même type de nombres, à savoir les octonions.

Toutefois, ce n'est pas le dernier mot de l'histoire. Récemment, les physiciens se sont mis à aller au-delà des cordes et à considérer les membranes. Par exemple, une membrane à deux dimensions, ou



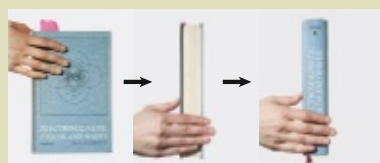
2. DANS LA THÉORIE DES CORDES, des cordes unidimensionnelles décrivent des surfaces bidimensionnelles au cours du temps. Dans la théorie M, des membranes bidimensionnelles décrivent des volumes tridimensionnels. L'ajout de ces dimensions aux huit dimensions des octonions fournit une piste pour expliquer pourquoi ces théories impliquent 10 ou 11 dimensions.

NON-COMMUTATIVITÉ

D'ordinaire, on peut multiplier les nombres dans n'importe quel ordre. Par exemple, 2×3 est égal à 3×2 . Ce n'est plus le cas dans les systèmes de dimensionnalité supérieure, tels ceux des quaternions et des octonions, qui sont non commutatifs. Les quaternions peuvent décrire les rotations en trois dimensions, qui sont aussi non commutatives : si on fait tourner successivement un objet tel qu'un livre autour d'axes différents, le résultat dépend de l'ordre des rotations. Sur la première ligne, on retourne d'abord le livre verticalement, puis on le fait tourner d'un quart de tour : la tranche apparaît. Sur la ligne du bas, on inverse les opérations, et c'est le dos qui apparaît.



Une rotation d'axe horizontal, suivie d'une rotation d'axe vertical.



Les deux rotations dans l'ordre inverse.

2-brane, ressemble à tout instant donné à une nappe. À mesure que le temps passe, elle décrit un volume tridimensionnel dans l'espace-temps.

Alors qu'en théorie des cordes, nous devons ajouter deux dimensions à la séquence classique 1, 2, 4 et 8, il nous faut maintenant en ajouter trois. Ainsi, quand nous avons affaire à des membranes, nous devrions nous attendre à ce que la supersymétrie émerge naturellement en dimensions 4, 5, 7 et 11. Et comme avec la théorie des cordes, une surprise nous attendait : les chercheurs affirment que la théorie M (où le « M » correspond entre autres à « membrane ») nécessite 11 dimensions, ce qui implique qu'elle fasse naturellement appel aux octonions. Hélas, personne ne comprend suffisamment bien la théorie M pour en écrire les équations fondamentales (le M signifie aussi bien « mystérieuse » !). Il est difficile de prédire la forme exacte qu'elle prendra.

Les octonions font-ils partie de la nature ?

À ce stade, insistons sur le fait que la théorie des cordes et la théorie M n'ont pas encore fait de prédictions que des expériences pourraient tester. Ce ne sont pour l'instant que de beaux rêves. Notre Univers ne nous semble pas avoir 10 ou 11 dimensions, et nous n'avons pas observé de symétrie entre particules de matière et particules d'interaction. David Gross, l'un des principaux spécialistes de la théorie des cordes, estime actuellement à 50 pour cent les chances de découvrir des preuves de supersymétrie au LHC, le grand collisionneur de hadrons du CERN. Les sceptiques pensent qu'elles sont beaucoup plus faibles que cela. L'avenir nous le dira.

Étant donné cette incertitude, nous sommes encore loin de savoir si les octonions ont une importance fondamentale pour la compréhension du monde qui nous entoure, ou s'ils ne sont que de la belle mathématique. Bien sûr, la beauté mathématique en soi est un objectif noble, mais cela serait encore plus merveilleux s'il s'avérait que les octonions font partie intégrante de la nature. Comme le prouvent l'histoire des nombres complexes et beaucoup d'autres développements mathématiques, cela ne serait pas la première fois que des inventions purement mathématiques apportent aux physiciens les outils dont ils auront ultérieurement besoin. ■

HISTOIRE DES SCIENCES

Du Trésor américain au projet Manhattan

En 1943, le Département américain de la Guerre a emprunté 13 000 tonnes d'argent au gouvernement pour mettre au point la première bombe atomique.

Cameron REED

Le projet Manhattan – nom de code du projet américain de construction d'une bombe atomique pendant la Seconde Guerre mondiale – présente tous les ingrédients d'une superproduction cinématographique : des personnalités hors du commun, plus de 100 000 seconds rôles, une science d'avant-garde, de l'espionnage et des intrigues diplomatiques, le tout sur fond d'un conflit mondial et de la grave menace que l'Allemagne nazie soit la première à produire l'arme la plus puissante au monde. Des milliards de dollars ont été investis dans la construction d'énormes installations secrètes visant à produire des matériaux pour une arme dévastatrice dont rien ne garantissait qu'elle fonctionnerait.

Comme tout scénario bien ficelé, le projet Manhattan comprend aussi des intrigues secondaires, qui ont suscité moins d'analyses historiques que les principales implications scientifiques, techniques, éthiques et géopolitiques du développement des armes nucléaires. C'est le cas du programme *Silver*. Ce dernier, qui nécessita d'emprunter 13 000 tonnes d'argent au Trésor américain dans le plus grand secret, a pourtant joué un rôle essentiel dans la course à la production des dizaines de kilogrammes d'uranium enrichi nécessaires à la fabrication de l'arme de destruction massive.

En 1942, le projet secret du gouvernement américain de construire « la bombe » est transmis au Département de la Guerre. Le principal problème du nouveau quartier militaire dédié à ce projet, le MED (*Manhattan Engineer District*), est de trouver les moyens de produire suffisamment d'ura-

nium enrichi en uranium 235 – l'isotope fissionable de l'uranium – pour réaliser une bombe atomique. Début 1942, seules des quantités de l'ordre du milligramme d'uranium 235 ont été isolées, et l'on ignore si les méthodes de laboratoire utilisées pourront être transposées à l'échelle industrielle.

L'une d'elles, la spectrométrie de masse, semble particulièrement prometteuse : elle consiste à séparer les deux isotopes (uranium 235 et 238) contenus dans l'uranium naturel en fonction de leur masse grâce à un champ électromagnétique. Toutefois, James Marshall et Kenneth Nichols, les deux ingénieurs militaires à la tête du projet, s'aperçoivent vite que la production du champ électromagnétique nécessitera un grand nombre d'aimants, et donc des quantités considérables de cuivre pour construire leurs bobinages. Or le cuivre, utilisé dans les douilles d'obus, est une matière première prioritaire pendant la guerre. Les deux hommes ont alors l'idée d'utiliser l'argent comme substitut. Le Congrès a autorisé l'utilisation de 78 000 tonnes d'argent du ministère des Finances à des fins militaires ; en outre, en employer une partie pour la bombe éviterait de détourner de grandes quantités de cuivre – deux énormes atouts pour préserver le secret autour du projet.

Nichols rencontre le sous-secrétaire d'État aux finances le 3 août 1942, pour se renseigner sur la possibilité d'emprunter 5 000 tonnes d'argent aux caves du Trésor. Le projet est lancé. Une des premières démarches du colonel Leslie Groves, nommé directeur militaire du MED en septembre 1942, est d'acquiescer un vaste terrain isolé dans l'Est du Tennessee qui répond aux critères pour y

implanter des installations d'enrichissement. L'armée expulse un millier de familles pour prendre possession d'une zone de près de 250 kilomètres carrés, à une trentaine de kilomètres de Knoxville, pour y établir le site, nommé Clinton Engineer Works, puis Oak Ridge après la guerre. C'est là que doit être construite l'usine de séparation électromagnétique des isotopes. Son nom de code : Y-12. L'entreprise est colossale : la construction de Y-12 nécessite 67 millions d'heures de travail, effectuées par près de 20 000 employés. Le complexe compte plus de 200 bâtiments et emploie 5 000 personnes pour l'exploitation et la maintenance. La plupart n'auront aucune idée du projet auquel ils contribuent jusqu'à l'annonce par le président Truman qu'une bombe a été larguée sur Hiroshima.

Des cyclotrons et des calutrons

Le besoin d'une telle quantité d'argent à Y-12 est une conséquence de la physique qui sous-tend la spectrométrie de masse. En optique, la spectrométrie consiste à séparer les différentes longueurs d'onde qui constituent la lumière à l'aide d'un prisme. De même, la spectrométrie de masse sépare les atomes ou molécules ionisés en fonction de leur masse, et c'est un champ magnétique qui joue le rôle de prisme. Les spectromètres de masse utilisés à Oak Ridge – les calutrons – sont dérivés du cyclotron, inventé en 1931 par le physicien américain Ernest Lawrence et pour lequel il reçut le prix Nobel.

Le dispositif original de Lawrence n'avait aucun rapport avec l'enrichissement de l'uranium. Il l'avait inventé en réponse à une crise