

LISA Pathfinder, la science de l'immobilité

Les masses d'épreuve du détecteur LISA ne doivent subir aucune autre accélération que celle induite par les ondes gravitationnelles. Pour ce faire, il faut éliminer toutes les perturbations autres que gravitationnelles. L'objectif est d'obtenir une « immobilité » telle que si deux des masses aux extrémités d'un bras étaient arrêtées l'une par rapport à l'autre à un moment donné, elles se déplaceraient de moins d'un milliardième de mètre en deux heures.

Des données expérimentales indiquent qu'il est possible d'atteindre

une telle immobilité. Toutefois, en apporter la preuve en laboratoire est impossible en raison de la gravité terrestre. Ce point est si critique que l'ESA a mis sur pied une mission spatiale, LISA Pathfinder, pour le vérifier.

Il s'agit en quelque sorte d'une version réduite de LISA : deux masses d'épreuve seront mises en orbite, non pas à cinq millions de kilomètres l'une de l'autre, mais à moins d'un mètre, à l'intérieur d'un satellite semblable à ceux de LISA (*ci-contre*). Un interféromètre laser mesurera leur vitesse relative.

Des chocs avec les rares molécules de gaz présentes jusqu'aux variations de la gravité dues au satellite lui-même, plusieurs facteurs contribuent à accélérer les masses. Ces perturbations ont été modélisées, et l'un des objectifs de la mission est de vérifier si ces modèles sont corrects et si des perturbations susceptibles de compromettre le succès de la mission principale n'ont pas été négligées.

Quelques composants restent à mettre au point, après quoi LISA Pathfinder sera prêt à être lancé et à tracer la voie à la mission LISA.



LES AUTEURS



Bernard SCHUTZ est directeur de l'Institut Albert Einstein à Potsdam, en Allemagne, et cofondateur du projet LISA.

Stefano VITALE est professeur de physique à l'Université de Trente, en Italie, et rapporteur principal de la mission LISA Pathfinder.

✓ BIBLIOGRAPHIE

C. Hogan, *Les sons de l'espace-temps*, *Pour la Science*, n° 357, juillet 2007.

É. Gourgoulhon, *Des ondes gravitationnelles pour scruter le cosmos*, *Pour la Science*, n° 326, décembre 2004.

Mission LISA Pathfinder sur le site de l'ESA : <http://www.rssd.esa.int/index.php?project=LISAPATHFINDER>

Site de la mission LISA à la NASA : <http://lisa.nasa.gov/>

plus grande par le biais de la gravitation entraînera sans doute des découvertes inattendues et devrait livrer des informations sur la formation de la Voie lactée.

Ces sources étant très nombreuses, la plupart ne pourront pas être distinguées les unes des autres ; l'ensemble créera un fond diffus d'ondes gravitationnelles, le « murmure » de la Voie lactée. Mais LISA pourrait détecter un autre fond diffus gravitationnel, à l'origine bien plus lointaine.

Le bruit de fond diffus

La découverte et l'étude du fond cosmique de rayonnement micro-ondes ont révolutionné notre compréhension de l'Univers. Il s'agit du fossile de la première lumière, libérée environ 380 000 ans après le Big Bang, lorsque les atomes neutres se sont formés et que le contenu de l'Univers est devenu transparent aux ondes électromagnétiques. C'est une frontière indépassable pour l'observation du cosmos par le biais de la lumière.

En revanche, l'Univers a toujours été transparent aux ondes gravitationnelles. Elles offrent ainsi un moyen de remonter bien plus loin vers le Big Bang. Certains modèles cosmologiques, fondés sur la théorie des cordes (une théorie qui tente d'unifier les interactions fondamentales), prédisent par exemple l'existence d'objets appelés supercordes cosmiques. Les supercordes, créées dans l'Univers primordial et « étirées » par l'expansion cosmique, pourraient émettre un spectre caractéristique d'ondes gravitationnelles de basse fréquence. Plus tôt encore, quelques fractions de seconde après le Big

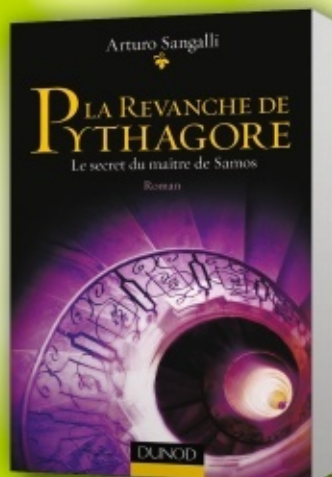
Bang, les fluctuations quantiques ont pu engendrer des ondes gravitationnelles de très basse fréquence.

LISA, dans sa version initiale, pourra observer des ondes de fréquences aussi basses que 10^{-4} hertz. Cela correspond à des ondes émises environ 10^{-18} seconde après le Big Bang, quand l'Univers observable mesurait à peine un millimètre et que sa température était de 10^{15} degrés. Nous ignorons si le bruit de fond gravitationnel primordial est suffisamment intense pour être décelé, mais s'il était mis en évidence, il s'agirait d'une révolution dans la physique des interactions fondamentales.

Enfin, même plus près de nous, la gravité n'est pas silencieuse. Les variations de gravité dues aux oscillations internes du Soleil pourraient être révélées par LISA, et offriraient ainsi un nouvel outil pour explorer l'anatomie de notre étoile. Les astéroïdes passant à proximité du détecteur produiront également des signaux observables.

La mission préliminaire de l'ESA, nommée LISA Pathfinder, démontrera bientôt que les composants fondamentaux de LISA sont opérationnels (*voir l'encadré ci-dessus*). Si le retrait de la NASA devait finalement se confirmer, le projet LISA serait revu à la baisse par l'ESA. Une version réduite, avec des satellites séparés par une distance plus courte et moins de faisceaux laser, a été étudiée. La sensibilité et la résolution seraient inférieures, mais même dans cette configuration, LISA détecterait des milliers de systèmes binaires dans la galaxie et des dizaines de fusions de trous noirs supermassifs. Les astronomes seront alors aux premières loges pour écouter le concert de l'Univers. ■

VARIEZ LES SAVOIRS AVEC DUNOD



A. SANGALLI

9782100565498 • 240 pages • **16,90 €**

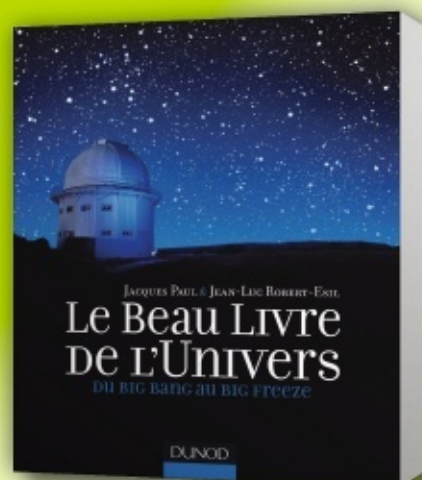
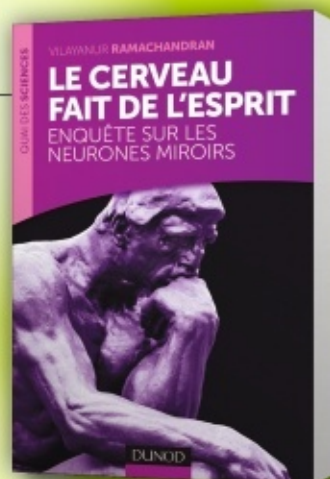
**On affirme que Pythagore n'a laissé aucun écrit.
Et si c'était faux ?**

**Rejoignez les deux héros de ce roman
et partez à la recherche du manuscrit perdu.**

V. RAMACHANDRAN

9782100543939 • 416 pages • **27,50 €**

**Découvrez comment l'un des plus
grands neurobiologistes envisage
ce qui fait le « propre de l'homme ».**



J. PAUL, J.-L. ROBERT-ESIL

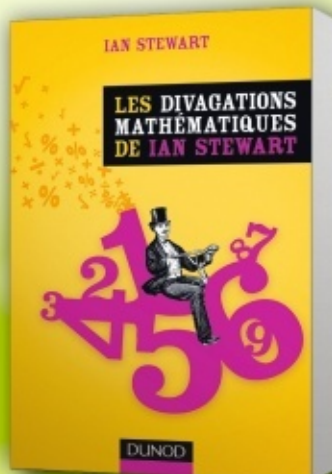
9782100567201 • 420 pages • **25,90 €**

**En 200 étapes magnifiquement
illustrées, déplacez-vous
le long de l'échelle du temps
et admirez les images du ciel
les plus étonnantes.**

DUNOD / LA RECHERCHE

9782100562992 • 176 pages • **16 €**

**Programmer des robots,
modéliser la chevelure humaine...
découvrez 32 situations
où « mathématiques »
rime avec « efficacité ».**



I. STEWART

9782100557967 • 272 pages • **18 €**

**Ian Stewart nous présente,
dans son style inimitable,
20 explorations mathématiques
passionnantes.**

Tous nos ouvrages sont disponibles en librairie

Les vagues en équations

1. LES VAGUES SONT TRÈS DIFFICILES

à décrire et à prévoir de façon précise, malgré le fait que les équations de l'hydrodynamique soient connues depuis longtemps. Les phénomènes trop irréguliers, telles les vagues agitées et déferlantes créées par une tempête, échappent à l'analyse.



L'ESSENTIEL

- ✓ Des équations établies par Euler à la fin du XVIII^e siècle décrivent assez bien les vagues.
- ✓ Selon une analyse simplifiée de ces équations par Lagrange, la vitesse des vagues ne dépend pas de la longueur d'onde, contrairement à un résultat de Newton.
- ✓ Une analyse plus fine a montré que les résultats de Newton et de Lagrange sont tous deux valables, le premier en « eau profonde », le second en « eau peu profonde ».
- ✓ La dispersion des ondes et les effets non-linéaires sont un aspect important de la physique des vagues.

Quand on évoque la notion d'onde, le premier exemple qui vient à l'esprit est celui des vagues qui se propagent à la surface de l'eau. Ce n'est pourtant pas le plus simple. Les vagues relèvent en effet de l'hydrodynamique, dont les lois ne s'approprient pas facilement. Les vagues ont beau être décrites par des équations aujourd'hui bien connues, ces équations sont riches et, potentiellement, décrivent de nombreux phénomènes différents : les ronds dans l'eau créés par la chute d'un objet, la houle, le déferlement des vagues à l'approche de la côte, la propagation des raz-de-marée, les

il a fallu attendre près de trois quarts de siècle pour que le mathématicien suisse Leonhard Euler obtienne les équations hydrodynamiques qui portent aujourd'hui son nom et qui constituent une formulation infinitésimale de la deuxième loi de Newton (« La force est égale au produit de la masse par l'accélération ») appliquée aux particules d'un fluide.

À la fin du XVIII^e siècle, grâce à Euler, les équations des vagues étaient donc posées. Fin de l'histoire ? Non, car ce n'est pas parce que l'on est capable de mettre les vagues en équations que l'on peut en tirer quelque chose ! Revenons par

David Lannes

Les principales équations qui décrivent les vagues sont connues depuis la fin du XVIII^e siècle. Il a cependant fallu beaucoup de temps pour les analyser correctement et en tirer profit – une entreprise qui n'est pas achevée.

motifs des clapotis, la remontée spectaculaire des mascarets le long des fleuves, les vagues scélérates...

Il n'est ainsi pas étonnant que les scientifiques aient longtemps tâtonné avant de disposer d'une théorie satisfaisante susceptible d'englober tous ces phénomènes. Je décrirai ici quelques-unes des étapes franchies au cours des trois derniers siècles. Je mentionnerai ensuite brièvement certaines des nombreuses questions auxquelles les mathématiciens doivent encore répondre.

Le premier résultat relatif aux vagues à la surface de l'eau – que les physiciens nomment ondes de gravité, car la pesanteur y est un acteur essentiel – remonte probablement à Isaac Newton. Dans ses *Principiae Mathematicae* de 1687, le savant britannique énonce que pour des vagues se propageant le long d'un canal, « la vitesse des ondes est en raison sous-doublée de leur largeur » ; en d'autres termes, la vitesse de déplacement des vagues est proportionnelle à la racine carrée de la longueur d'onde.

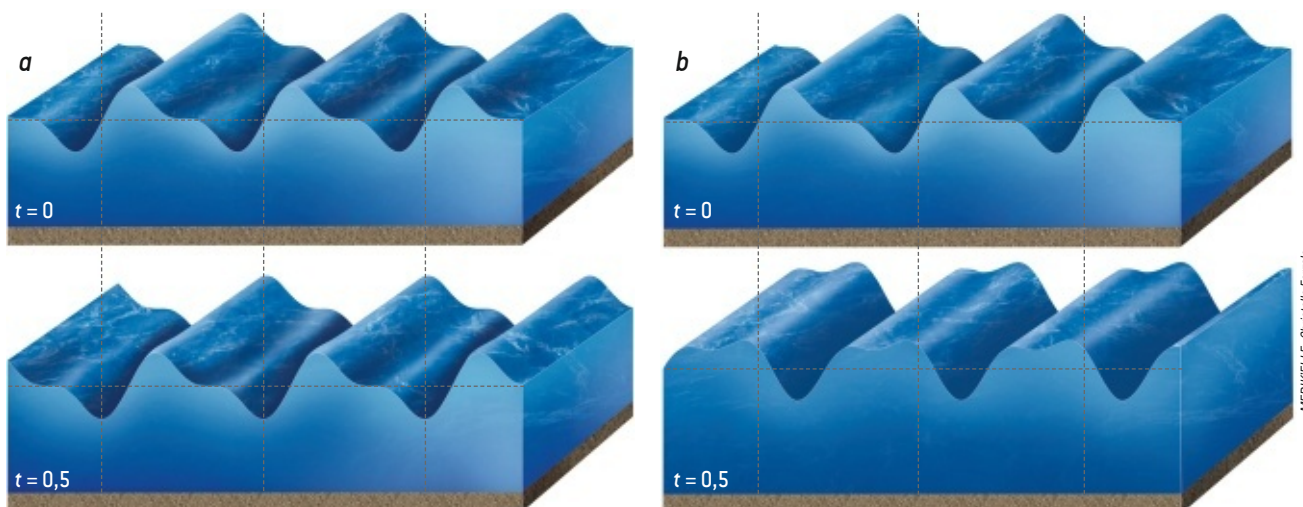
L'énoncé de Newton, qui se fonde sur une analogie assez obscure avec les oscillations d'un fluide contenu dans un tube en U, est, comme on le verra, partiellement vrai. C'était donc un véritable tour de force, puisque les équations de l'hydrodynamique étaient alors complètement inconnues :

exemple sur le résultat de Newton cité plus haut, « l'un des plus obscurs et les plus difficiles de l'Ouvrage de Newton », selon Joseph Lagrange, grand mathématicien français du XVIII^e siècle. Fort de la connaissance des équations des vagues, peut-on prouver ce résultat de manière rigoureuse ?

À quelle vitesse se propagent-elles ?

À la suite des travaux d'Euler, plusieurs mathématiciens se sont attelés à cette tâche. Lagrange en fit partie. Même si ce dernier estimait que « la résolution complète [des équations des vagues] sera peut-être toujours au-dessus des forces de l'Analyse », il se proposa de considérer de façon rigoureuse le cas « des mouvements infiniment petits ». En d'autres termes, c'est une « analyse asymptotique » des équations que Lagrange entreprit de faire.

Nous reviendrons sur cette notion d'analyse asymptotique qui est un point clef de l'étude des vagues. Pour l'instant, attardons-nous sur le résultat obtenu par Lagrange. Outre l'hypothèse que « les mouvements sont infiniment petits », Lagrange a supposé que la profondeur du canal est elle aussi petite. Cela lui permit de rechercher, pour les équations des



2. DES VAGUES NON SINUSOÏDALES ne se déforment pas en se propageant, selon l'analyse de Lagrange [a]. La configuration initiale des vagues est ici de la forme $\sin x + 0,5 \sin 2x$, ce qui correspond à la superposition de deux vagues sinusoïdales de longueurs d'onde différentes.

Selon le résultat de Newton, les deux composantes sinusoïdales ont une vitesse de propagation différente, ce qui entraîne une déformation des vagues au cours du temps [b]. (Les paramètres choisis ici pour calculer les profils des vagues sont $g = 10$ et $H = 0,1$, de sorte que $gH = 1$.)

vagues, des solutions approchées qui dépendent de façon polynomiale de la coordonnée verticale z . Cette structure polynomiale simplifie beaucoup les équations et, après quelques calculs, Lagrange put affirmer que « la vitesse de la propagation des ondes sera celle qu'un corps grave acquerrait en tombant de la moitié de la hauteur de l'eau dans le canal ». Autrement dit, le mathématicien français affirmait que la vitesse de propagation des vagues est égale à $\sqrt{gH}$, où g désigne l'accélération de la pesanteur et H la hauteur de l'eau au repos.

Remarquons tout de suite que la vitesse $c_L = \sqrt{gH}$ trouvée par Lagrange ne dépend pas de la longueur d'onde; le résultat de Lagrange contredit donc celui de Newton de façon flagrante ! Pourtant, Lagrange et Newton avaient tous deux raison (et tous deux un peu tort aussi) : comme nous le verrons, ces deux résultats constituent deux cas extrêmes d'une seule et même théorie. C'est surprenant, les deux résultats étant qualitativement très différents.

Pour bien s'en rendre compte, concentrons-nous sur le cas de vagues unidimensionnelles (c'est-à-dire qui ne varient pas selon l'une des deux directions horizontales). Prenons par exemple une vague qui, à l'instant initial, est une sinusoïde de longueur d'onde λ ; sa forme est donc décrite par le graphe d'une fonction de la forme $a_0(x) = A \cos kx$, où $k = 2\pi/\lambda$.

Selon Newton, elle devrait se déplacer à la vitesse $c_N = \sqrt{g/k}$. À l'instant t ,

son profil devrait donc correspondre au graphe de la fonction :

$$a(x, t) = A \cos k(x - c_N t).$$

Selon Lagrange, cette même vague est donnée au même instant par :

$$a(x, t) = A \cos k(x - c_L t).$$

Elle n'est donc pas au même endroit (sauf dans le cas particulier où $c_N = c_L$, c'est-à-dire où $Hk = 1$, soit $H = \lambda/2\pi$), même si sa forme spatiale est identique.

On peut mettre le doigt sur la différence majeure entre le résultat de Newton et celui de Lagrange en considérant une

Selon Newton, les vagues se déforment en se propageant. Ce n'est pas le cas selon l'analyse de Lagrange.

superposition de telles ondes simples. Prenons ainsi une perturbation initiale qui est la somme de deux oscillations de longueurs d'onde différentes. Pour Lagrange, ces deux composantes se déplacent à la même vitesse, et la vague n'est pas déformée. Pour Newton, en revanche, les deux composantes évoluent à des vitesses différentes, ce qui induit une déformation de la vague (voir la figure 2).

On peut pousser plus loin ce raisonnement. Grâce à la « transformation de Fou-

rier », opération mathématique issue des travaux de Joseph Fourier, au XIX^e siècle, on peut assimiler toute perturbation localisée de la surface du fluide à une somme infinie d'ondes sinusoïdales de longueurs d'onde différentes. Le même raisonnement que ci-dessus montre alors que, selon la théorie de Lagrange, cette perturbation localisée se propage sans se déformer. Avec la théorie de Newton, on a de nouveau une configuration différente; non seulement la vague se déforme, mais on peut aussi montrer qu'elle s'aplatit avec une amplitude maximale qui décroît comme $1/\sqrt{t}$. L'incompatibilité des deux approches n'en est que plus frappante.

Cette petite analyse souligne ainsi l'une des conséquences frappantes de l'interdépendance de la vitesse de propagation et de la longueur d'onde. Cette interdépendance constitue un phénomène très général, nommé dispersion. Newton n'avait d'ailleurs certainement pas été trop surpris de le voir apparaître. En effet, il avait déjà mis en évidence le phénomène de dispersion dans un tout autre contexte avec ses célèbres expériences sur les prismes : c'est précisément parce que la vitesse d'une onde lumineuse dans le verre dépend de sa longueur d'onde que la lumière blanche se décompose à la traversée d'un prisme (voir la figure 3).

Avant d'entrer davantage dans les détails et d'expliquer les raisons des différences entre les approches de Newton et de Lagrange, examinons quelques phé-

nomènes naturels et essayons de voir s'ils sont de nature dispersive (Newton) ou non dispersive (Lagrange).

On constate par exemple que les tsunamis sont de nature non dispersive. En effet, de telles vagues, créées au large par un tremblement de terre, se déforment très peu en pleine mer; elles se propagent donc à la vitesse $c_L = \sqrt{gH}$ (soit un peu plus de 700 kilomètres par heure pour un océan profond de 4 000 mètres). Et tout comme les tsunamis, le comportement des vagues lorsqu'elles s'approchent de la côte est décrit par la théorie de Lagrange plutôt que par celle de Newton.

La théorie de Newton s'applique cependant à de nombreuses situations. Prenons-en une particulièrement intéressante, puisqu'elle fait écho aux expériences de Newton sur la décomposition de la lumière blanche. Lorsqu'une tempête crée des vagues au milieu de l'océan, celles-ci sont complètement chaotiques; pourtant, lorsque la houle qui en résulte s'approche du rivage, elle est bien régulière. C'est la dispersion qui est responsable de cette transformation. Voyons pourquoi.

Les vagues longues sont plus rapides

Les vagues chaotiques créées par la tempête sont comme la lumière blanche, elles contiennent des ondes de longueurs d'onde très variées, qui traversent l'océan à des vitesses différentes. L'océan joue donc le même rôle qu'un prisme pour les ondes lumineuses: il sépare les différentes longueurs d'onde. En arrivant sur une lointaine côte, les vagues de plus grandes longueurs d'onde, les plus rapides, précèdent ainsi de plusieurs heures les ondes de petite longueur d'onde. Pour les ondes lumineuses, la lumière blanche se décompose en différentes composantes colorées. Pour les vagues, le caractère « monochromatique » de la houle après avoir traversé l'océan se traduit par leur grande régularité, qui contraste avec le chaos créé par la tempête.

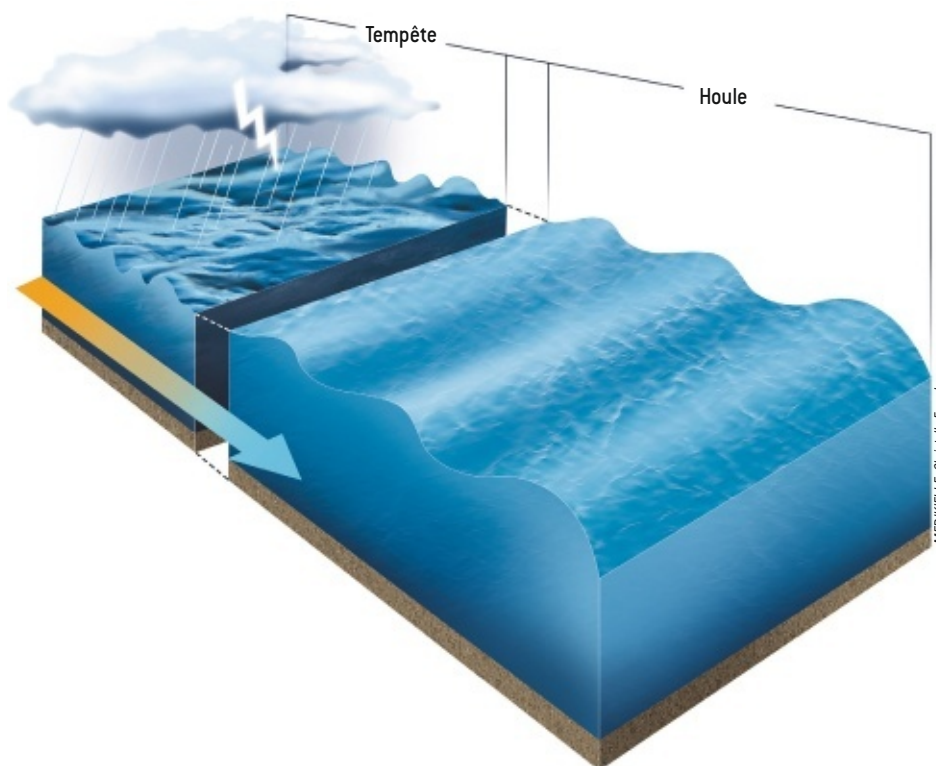
Tâchons maintenant de comprendre pourquoi les approches de Newton et Lagrange sont deux cas extrêmes d'une même théorie. Cette théorie repose sur l'équation d'Euler de l'hydrodynamique (voir l'encadré page 95), qui décrit les mouvements d'un fluide incompressible et de viscosité négligeable. Moyennant quelques transformations et certaines approxi-

mations (on suppose notamment que l'amplitude des vagues est faible), on aboutit à un système d'équations qui a une solution sinusoïdale $a(x, t) = A \cos k(x - ct)$ à condition que la vitesse c soit donnée par la relation $c^2 = g \tanh(Hk)/k$, où $\tanh$ est la fonction tangente hyperbolique définie par $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$.

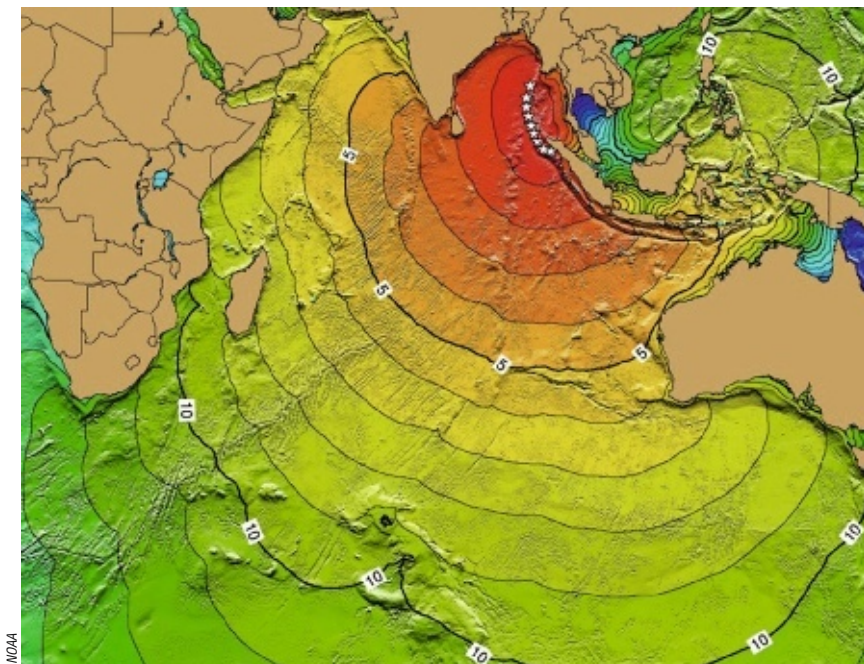
Lorsque la profondeur H est petite, $\tanh(Hk)$ est à peu près égal à Hk et on obtient donc $c \approx \sqrt{gH}$, qui est la formule de Lagrange; si, au contraire, la profondeur H est très grande, alors $\tanh(Hk) \approx 1$ et l'on a $c \approx \sqrt{g/k}$. Le résultat de Newton est donc valable en « eau profonde », et celui de Lagrange en « eau peu profonde ». Mais l'exemple des tsunamis montre qu'il faut être très prudent avec cette terminologie, d'où l'emploi des guillemets. Comme on l'a vu, un tsunami qui se propage à la surface d'un océan de 4 000 mètres de profondeur relève en effet de la théorie des vagues en eau *peu* profonde. Le paradoxe n'est qu'apparent. En effet, ce n'est pas H qui doit être petit pour que l'approximation $\tanh(Hk) \approx Hk$ soit valable,

mais Hk , égal à $H2\pi/\lambda$ où l'on rappelle que λ est la longueur d'onde du tsunami. Or cette longueur d'onde est gigantesque, typiquement une centaine de kilomètres, si bien que $Hk \approx 0,25$, valeur qui est effectivement « petite »...

L'analyse que l'on vient de décrire permet de faire le pont entre le résultat de Newton et celui de Lagrange. Elle n'en reste pas moins très rudimentaire. Une première limitation évidente est qu'elle utilise des approximations linéaires, qui conduisent à une expression de la vitesse des vagues indépendante de leur taille. Or il est facile de se convaincre que cela n'est généralement pas le cas: avec une telle propriété,



3. L'AGITATION CRÉÉE PAR UNE TEMPÊTE engendre des vagues de nombreuses longueurs d'onde différentes. Chacune de ces composantes se propageant à une vitesse différente, elles se séparent au bout d'une distance assez grande. Ainsi, loin de la tempête, la mer n'est perturbée localement dans l'espace et le temps que par des vagues d'une seule longueur d'onde: c'est la houle. Cette séparation spatiale en différentes longueurs d'onde est analogue à la dispersion par un prisme des couleurs qui composent la lumière blanche (en haut à droite). La dispersion des couleurs est également due au fait que les ondes lumineuses de longueurs d'onde différentes ont des vitesses distinctes.



4. LE TSUNAMI DE SUMATRA, le 26 décembre 2004, a été destructeur et a fait plus de 200 000 victimes. Cette carte montre sa propagation, heure par heure. La vitesse d'un tsunami est de l'ordre de 700 kilomètres par heure là où la profondeur de l'océan est de 4 000 mètres. Cela correspond toutefois à un régime de propagation en « eau peu profonde », car les longueurs d'onde en jeu sont très grandes, de l'ordre de la centaine de kilomètres.

on ne peut pas expliquer le déferlement des vagues. Et même sans aller jusque-là, on peut aisément observer que les vagues les plus hautes sont les plus rapides.

En 1834, l'ingénieur naval écossais Scott Russell, qui s'intéressait à la résistance opposée par l'eau à l'avancement des bateaux, fit une observation qui poussa les mathématiciens à aller au-delà de la théorie linéaire. « J'étais en train d'observer le mouvement d'un bateau tiré rapidement le long d'un canal étroit par deux chevaux lorsque celui-ci s'arrêta brusquement – mais non la masse d'eau du canal qui avait été mise en mouvement ; elle s'accumula autour de la proue du navire dans un état d'agitation violente, puis soudainement, laissant le bateau derrière elle, roula au-devant à grande vitesse, prenant la forme d'une grande élévation solitaire ; cette masse d'eau, ronde, lisse et bien définie, continua sa course le long du canal sans changer de forme ou ralentir apparemment. »

De telles grandes « ondes solitaires », ou « solitons », qui se propagent le long d'un canal sans se déformer, devinrent une obsession pour Russell. Il mesura en particulier leur vitesse c et proposa la valeur $\sqrt{gH'}$ avec $H' = H + a_M$, où a_M est l'élévation maximale de la vague par rapport au niveau de l'eau au repos. Cepen-

dant, les plus grands mathématiciens de l'époque ne crurent pas à ses observations.

Pour expliquer l'influence de la taille des vagues sur leur vitesse, le Britannique George Airy proposa en 1841 une généralisation non linéaire de la théorie de Lagrange. Considérant que le potentiel des vitesses (voir l'encadré page ci-contre) varie très peu suivant la verticale en eau peu profonde, et que la pression est donnée au premier ordre d'approximation par la pression hydrostatique, Airy obtint une équation non linéaire (où certains termes mettent en jeu des puissances de la fonction inconnue). Quelques années plus tard, le Français Adhémar Barré de Saint-Venant généralisa son approche en proposant un système d'équations qui porte aujourd'hui son nom et qui fait encore référence en hydraulique.

Conjuguer la non-linéarité...

Il s'agissait bien d'une généralisation de la théorie de Lagrange. En effet, si l'on néglige les termes non linéaires de l'équation d'Airy, on trouve (en dimension 1) que le profil $a(x, t)$ des vagues doit résoudre l'équation :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = 0,$$

qui est l'« équation des ondes » se propageant à vitesse c_L , équation qui a exacte-

ment la même forme que celle régissant la propagation de la lumière dans le vide (l'écriture $\frac{\partial a}{\partial t}$ désigne la dérivée de $a(x, t)$ par rapport à t en considérant x constant, $\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}$ désigne la dérivée seconde de $a(x, t)$ par rapport à t , etc.).

De cette équation on déduit que toute perturbation de la surface se décompose en deux composantes, l'une se propageant vers la gauche de l'axe Ox , l'autre vers sa droite, toutes deux avec une vitesse $c_L = \sqrt{gH}$. La vague se dirigeant vers la droite, par exemple, obéit à l'« équation de transport » à vitesse c_L , qui s'écrit :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c_L \frac{\partial a}{\partial x} = 0.$$

On a ainsi retrouvé le résultat de Lagrange : la vague voyage à la vitesse $c_L = \sqrt{gH}$. Mais on peut maintenant poursuivre l'analyse en prenant en compte les non-linéarités des équations d'Airy ou de Saint-Venant. En ne retenant que la non-linéarité dominante, on montre que l'équation de transport devient :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c_L (1 + 3a/2H) \frac{\partial a}{\partial x} = 0.$$

Il s'agit donc d'une équation de transport non linéaire, où la vitesse $c_L (1 + 3a/2H)$ dépend de l'amplitude $a(x, t)$ de la vague. D'observations similaires, Airy avait tiré plusieurs conclusions. L'une d'elles était que la vitesse au sommet de la vague est donnée par $\sqrt{gH} (1 + 3a_M/2H)$, et non par $\sqrt{gH'}$ avec $H' = H + a_M$ comme l'avait suggéré Russell d'après ses mesures.

Une deuxième conclusion était qu'il ne peut y avoir de vague se propageant à vitesse constante sans se déformer, car cela impliquerait que la vitesse $c_L (1 + 3a/2H)$ prend en tout point de la vague la même valeur et donc que la vague est plate ($a = \text{constante}$).

Enfin, une troisième conclusion d'Airy était que toutes les vagues déferlent : comme le haut de la vague se déplace plus vite que le bas, il y aura nécessairement un moment où la partie supérieure passera par-dessus la base de la vague.

Les conclusions d'Airy étaient une grande avancée théorique et même pratique puisqu'elles lui ont permis d'expliquer le phénomène des mascarets, ces vagues liées à la marée qui remontent le cours de certains fleuves. L'onde de marée est très « plate » (sa période est de 12 heures et son amplitude de quelques mètres au plus), mais les non-linéarités la raidissent lorsqu'elle remonte un fleuve, créant ainsi ce phénomène spectaculaire.

Les travaux d'Airy n'ébranlèrent toutefois pas Russell outre mesure. Ce der-

nier maintint que ses « ondes solitaires » se propagent à la vitesse $\sqrt{gH}$, sans se déformer et sans déferler ! Il objecta de plus qu'elles avaient une forme déterminée pour une taille donnée, ce que la théorie d'Airy ne permet pas d'expliquer.

Malgré les efforts de scientifiques brillants, il fallut attendre 1871 pour que le mathématicien français Joseph Boussinesq propose une explication satisfaisante de ce phénomène. L'œuvre de Boussinesq, en particulier son monumental *Essai sur la théorie des eaux courantes*, impressionne par la pertinence et la modernité des idées qui y sont introduites. La prouesse de Boussinesq fut de comprendre que l'hypothèse de pression hydrostatique sous laquelle sont obtenues les équations de Saint-Venant n'est pas toujours satisfaite. Dans certaines conditions, des effets non hydrostatiques réintroduisent de la dispersion dans les équations – rappelons que nous sommes en eau peu profonde, où s'applique la théorie non dispersive de Lagrange (par opposition à la théorie dispersive de Newton).

D'où viennent les termes dispersifs négligés par Airy ? Comme on l'a vu plus haut, le caractère non dispersif de la propagation des vagues en eau peu profonde provient d'une approximation ($c \approx \sqrt{gH}$) de la formule $c^2 = g \tanh(Hk)/k$, trouvée pour la vitesse des ondes de faibles amplitudes. En utilisant une approximation plus précise, on obtient une vitesse c qui dépend de k (donc de la longueur d'onde), ce qui réintroduit l'effet de dispersion.

... et la dispersion

Compte tenu de cet effet de dispersion, on montre que l'équation de transport devient :

$$\partial a / \partial t + c_L (1 + 3a/2H) \partial a / \partial x + B \partial^3 a / \partial x^3 = 0, \text{ où } B = c_L H^2 / 6.$$

Cette équation aujourd'hui célèbre est l'équation de Korteweg-de Vries, du nom des deux savants hollandais qui l'ont redécouverte près de 20 ans après Boussinesq... Elle permet (enfin !) d'expliquer correctement les observations de Russell. Qualitativement, cela se comprend assez bien. On

a vu que la dispersion fait tendre l'amplitude des ondes vers zéro (puisque ses composantes se séparent en se déplaçant à des vitesses différentes) ; inversement, la non-linéarité tend à raidir les vagues et à les faire déferler. La présence simultanée de ces deux phénomènes contradictoires neutralise leurs effets et permet à la vague de se propager sans se déformer.

Plus précisément, on montre que l'équation de Korteweg-de Vries admet des solutions de la forme $a(x, t) = f(x - c_0 t)$, où f est une fonction d'une seule variable, qui représentent une onde se propageant sans déformation à une vitesse constante c_0 . Ces solutions, que l'on peut calculer explicitement, sont conformes aux observations de Russell : leur forme dépend de leur amplitude, et leur vitesse est donnée par $c_0 = \sqrt{gH} (1 + a_M/2H)$, qui est une très bonne approximation de la formule $\sqrt{gH'}$ (avec $H' = H + a_M$) conjecturée par Russell.

Cette longue description historique a permis d'introduire les concepts clefs de

LES ÉQUATIONS DES VAGUES

On choisit un axe vertical Oz de façon que $z = 0$ coïncide avec la surface du liquide au repos. On suppose le fond plat et situé à la profondeur $z = -H$, et l'on note $a(x, y, t)$ la hauteur à un instant t d'un point de la surface ayant pour coordonnées horizontales x et y .

On considère une particule de fluide de volume infinitésimal dV occupant la position $M(t)$ au temps t . Soit $\mathbf{u}(M(t), t)$ le vecteur vi-

tesse de cette particule au temps t , qui a pour composantes u_x, u_y et u_z . On montre que son accélération (la dérivée de la vitesse par rapport au temps) s'écrit :

$\mathbf{du}/dt = \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, équation vectorielle où ∇ est l'opérateur ayant pour composantes $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ et $\partial/\partial z$ (à une dimension, par exemple, $\mathbf{du}/dt = \partial \mathbf{u} / \partial t + u_x \partial \mathbf{u} / \partial x$).

Si ρ désigne la densité du fluide, la masse de la particule est

ρdV . D'après la deuxième loi de Newton, $\rho dV \mathbf{du}/dt$ doit être égal à la somme des forces extérieures appliquées à la particule, c'est-à-dire ici son poids $\rho dV \mathbf{g}$ (où $\mathbf{g}$ est le vecteur accélération de la pesanteur) et la force de pression (égale à $-\nabla P$, où P est le champ de pression) exercée par le fluide qui entoure la particule. On obtient ainsi l'« équation d'Euler » :

$$(1) \quad \rho [\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = \rho \mathbf{g} - \nabla P.$$

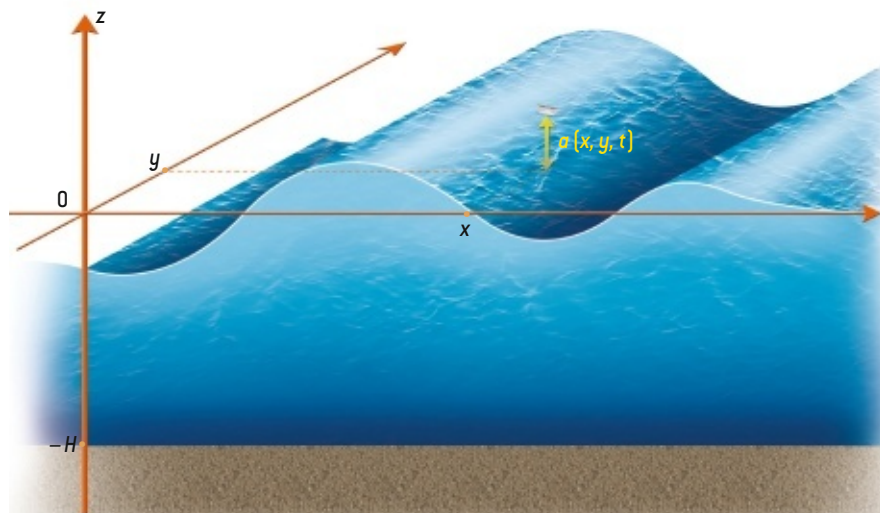
On suppose de plus que le fluide est incompressible et irrotationnel (pas de tourbillons) ; Euler avait déjà remarqué que ces hypothèses se traduisent élégamment par :

(2) $\mathbf{u} = -\nabla \phi$ et $\Delta \phi = 0$, où ϕ est une fonction appelée « potentiel des vitesses » et où $\Delta \phi = \partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2$. L'équation $\Delta \phi = 0$ est l'« équation de Laplace ».

Les équations (1) et (2) sont posées à l'intérieur du fluide. Il faut aussi préciser le comportement du fluide aux bords, en l'occurrence au fond, à l'infini en direction horizontale et à la surface. Ces conditions sont les suivantes :

(3) $u_z = 0$ en $z = -H$;
(4) $\mathbf{u}$ s'annule à l'infini ;
(5) À la surface, la pression P est constante et l'expression $\partial a / \partial t + [1 + (\partial a / \partial x)^2 + (\partial a / \partial y)^2]^{1/2} u_N$, où u_N est la vitesse perpendiculaire à la surface, est nulle (cette équation traduit le fait que les particules de fluide qui sont à la surface y restent).

L'ensemble des équations (1), (2), (3), (4) et (5) constitue les équations des vagues.





G. Casanova, tous droits réservés

5. UN MASCARET DANS LA BAIE DE TURNAGAIN, EN ALASKA. Derrière le front du mascaret, engendré par la marée, on voit de nombreuses vaguelettes secondaires, les « éteules ». La compréhension de ce phénomène, comme de beaucoup d'autres dans le domaine de la physique des vagues, est encore imparfaite.

L'AUTEUR



David LANNES, directeur de recherche au CNRS, travaille au Département mathématiques et applications de l'École normale supérieure, à Paris.

✓ BIBLIOGRAPHIE

B. Alvarez-Samaniego et D. Lannes, *Large time existence for 3D water-waves and asymptotics*, *Inventiones Mathematicae*, vol. 171(3), pp. 485-541, 2008.

A. D. D. Craik, *The origins of water wave theory*, *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 36, pp. 1-28, 2004.

O. Darrigol, *The spirited horse, the engineer, and the mathematician : Water waves in nineteenth-century hydrodynamics*, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 58, pp. 21-95, 2003.

la description mathématique des vagues : dispersion, non-linéarité, rôle de la pression, distinction eau profonde/peu profonde, etc. Quels sont les enjeux des recherches mathématiques poursuivies aujourd'hui sur ce domaine ?

L'une des principales objections aux différents modèles mathématiques présentés ici est que l'on est en droit de remettre en doute leurs hypothèses, par exemple la nature principalement hydrostatique de la pression. Le développement de nouveaux outils mathématiques a permis depuis la fin du XX^e siècle d'étudier les équations des vagues complètes, c'est-à-dire sans faire d'hypothèses simplificatrices sur la pression ou l'amplitude des vagues par exemple.

La première étape est de montrer que, sur un certain intervalle de temps au moins, les équations ont bien des solutions ! On doit pour cela trouver un cadre fonctionnel (un ensemble de fonctions vérifiant certaines propriétés) adapté. Par exemple, on peut imposer que la paramétrisation de la surface soit une fonction deux fois dérivable en temps et en espace. Le choix du cadre fonctionnel est beaucoup plus délicat pour le potentiel des vitesses : ce dernier est en effet défini dans un domaine fluide qui bouge au cours du temps, et qui est de plus la principale inconnue du problème. Il faut donc se ramener à un espace fonctionnel « fixe ». Les mathématiciens disposent pour ce faire de plusieurs techniques.

Une fois le cadre fonctionnel choisi, on peut l'utiliser pour construire une suite de solutions approchées que l'on veut faire converger vers une solution exacte des équations. La difficulté est alors de gérer tous les phénomènes pouvant faire sortir la solution du cadre fonctionnel choisi. Par exemple, si l'on prend un cadre fonctionnel défini par les fonctions deux fois dérivables, les opérations de dérivation font « sortir » du cadre fonctionnel : la dérivée d'une telle fonction n'est pas forcément deux fois dérivable. Pour montrer que l'on reste dans un même cadre fonctionnel, il faut donc prouver que tous les mécanismes qui, à l'instar de la dérivation, font sortir de ce cadre ont des effets qui se neutralisent mutuellement.

Une fois la solution construite, on s'intéresse à la description de ses propriétés. Par exemple, comment se comporte-t-elle en eau profonde, en eau peu profonde ? Pour cela, on remarque que la solution construite dépend de plusieurs paramètres (la profondeur par exemple), et on essaye de décrire la dépendance de la solution en ces paramètres : c'est « l'analyse asymptotique » de la solution.

Maintes questions restent à explorer

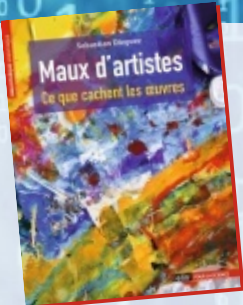
Cette analyse rigoureuse permet de retrouver les modèles décrits plus haut et, surtout, de bien déterminer leur domaine de validité. Elle permet aussi de trouver de nouveaux modèles décrivant précisément certains phénomènes plus compliqués que les ondes solitaires de Russell. Pour citer quelques problématiques actuelles : quel est le rôle de la dispersion sur l'amplitude maximale d'un tsunami ? Sur les éteules (vaguelettes secondaires) des mascarets ? Par quels mécanismes les courants naissent-ils en milieu côtier ? Comment prévoir avec précision les zones de déferlement des vagues ? Quelles sont les zones menacées en cas de vagues de grande amplitude (tempête) ?

Dictées par des préoccupations environnementales évidentes, ces questions soulèvent des difficultés mathématiques considérables. Pour plusieurs de ces phénomènes, nous sommes encore comme Russell devant ses « ondes solitaires », capables d'observations assez précises, mais impuissants à fournir une théorie susceptible de les expliquer et, surtout, de les prévoir correctement. ■

■ POUR LA

La librairie SCIENCE

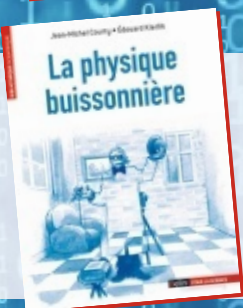
Le savoir scientifique au fil des pages...



Maux d'artistes ■ Sebastian Dieguez

Existe-t-il des liens cachés entre une œuvre d'art – une peinture, une sculpture, une composition musicale ou une œuvre littéraire – et une maladie de l'esprit que présentait son auteur ? Examinant divers chefs-d'œuvre avec un regard de neuropsychologue, Sebastian Dieguez analyse plus d'une vingtaine d'œuvres de Dostoïevski, Monet, De Chirico, Proust, Van Gogh, etc.

176 pages • 25 euros • ISBN 978-2-8424-5101-1



La physique buissonnière ■ Jean-Michel Courty, Édouard Kierlik

Une plante plus rapide qu'une mouche, un tuyau qui parle, une cape qui rend invisible, etc. La nature est pleine de surprises pour qui veut bien s'aventurer hors des sentiers battus. Passionnés de physique, les auteurs vous invitent à une promenade sur des chemins de traverse pour comprendre cette physique du quotidien.

160 pages • 22 euros • ISBN 978-2-8424-5105-9

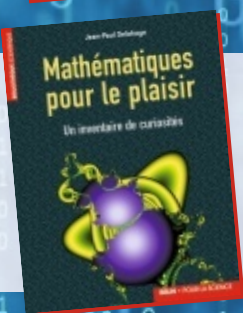


NOUVEAU

La couleur dans tous ses éclats ■ Bernard Valeur

Comment percevons-nous les couleurs ? Pourquoi la matière émet-elle des lumières colorées ? Qu'est-ce que le jaune de Naples, le bleu outremer ou le vert Milori ? La couleur n'a pas fini de nous étonner. Voilà l'occasion de parcourir ses mystères en cinquante sujets, chacun traité en une double page illustrée pour mieux dévoiler les beautés de la couleur.

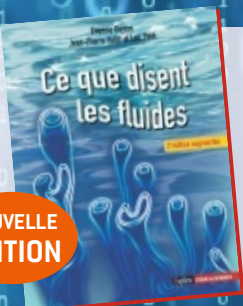
128 pages • 22,50 euros • ISBN 978-2-7011-5876-1



Mathématiques pour le plaisir ■ Jean-Paul Delahaye

Les mathématiques ne se réduisent pas – heureusement – à ce qu'on nous en apprend à l'école. Partout présentes, elles sont une source de joie et d'épanouissement pour celui qui sait y consacrer un peu d'attention et d'esprit ludique. Dans cet ouvrage, découvrez pourquoi les mathématiques sont faciles et comment s'y adonner est un plaisir.

208 pages • 25 euros • ISBN 978-2-8424-5104-2



NOUVELLE ÉDITION

Ce que disent les fluides ■ Étienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, Luc Petit

Ce livre invite le lecteur à découvrir la physique des fluides à travers tourbillons, houle, turbulences, avalanches, mascarets, écoulements sanguins, etc.

Cette deuxième édition incontournable pour tous les passionnés de science a été étoffée de plusieurs sujets inédits.

176 pages • 25 euros • 978-2-7011-5725-2

Des livres à découvrir en librairie et sur
www.pourlascience.fr/librairie