

qu'un être tout-puissant explorant les sous-ensembles infinis de l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$, réussisse à savoir s'il en existe d'un cardinal intermédiaire entre $\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers) et $\mathbb{R}$? En d'autres termes : est-ce qu'on peut envisager qu'un être tout-puissant résolve « expérimentalement » le problème de l'hypothèse du continu ?

Le fait qu'on puisse ajouter à la théorie des ensembles classiques (de Zermelo-Fraenkel) sans obtenir de contradiction (si elle est sans contradiction) que l'hypothèse du continu est vraie, ou qu'elle est fausse, doit être pris en compte, et cela rend difficile une réponse.

Cependant, les travaux menés aujourd'hui en théorie des ensembles, en particulier par Hugh Woodin, et qui envisagent des logiques infinies dans le but de traiter l'hypothèse du continu peuvent être considérés comme l'étude de nouvelles formes d'êtres surpuissants en quête de cette solution. On est tenté de se dire que la théologie, aujourd'hui, est l'affaire des mathématiciens et qu'une forme de haute spiritualité se trouve à l'œuvre dans cette exploration de l'infini et de la surpuissance qui les occupe.

L'omnipotence est peut-être une idée trop vague et susceptible d'un trop grand nombre de définitions différentes. En plus des difficultés logiques que posent les idées de saint Augustin, Thomas d'Aquin ou Descartes, les formes nouvelles de la surpuissance que les mathématiques associent à l'infini constituent des domaines trop différents pour que soit donnée une bonne définition de l'omnipotence et que l'on puisse apprécier sa possibilité. Abordons donc maintenant la question plus facile de l'omniscience.

Un être omnipotent est omniscient : celui qui peut tout faire peut savoir tout ce qu'il y a à savoir. Pourtant, la chose est loin d'être aussi simple et en théorie des jeux, par exemple, le fait d'être omniscient constitue parfois un handicap grave qui interdit de gagner... et donc empêche l'omnipotence (voir la figure 2).

Indépendamment de ces questions, dont on peut se libérer en imaginant qu'un

être omniscient ne joue pas, l'existence d'êtres omniscients dépend de ce qu'on considère comme objets possibles de savoir.

Si toutes les propositions, y compris autoréférentes, doivent être objet du savoir d'un être omniscient, alors Patrick Grim a montré qu'il n'existe aucun être omniscient. De même, le paradoxe de Newcomb (voir la figure 3) établit que connaître parfaitement le futur est une impossibilité.

Envisageons l'omniscience sans la capacité de prévoir l'avenir et en interdisant les phrases autoréférentes. Malheureusement, même ainsi, divers paradoxes récents créent encore de fatales difficultés qui nous empêchent d'imaginer un être omniscient.

L'omniscience, idée indéfendable

Le paradoxe de Frederic Fitch (voir la figure 5) établit que si « tout ce qui est vrai est connaissable », alors « tout ce qui est vrai est connu » (par un être omniscient, mais aussi par vous et par moi). C'est absurde, à moins de considérer que tout n'est pas connaissable et donc, en particulier, qu'il n'existe pas d'êtres omniscients.

Une autre difficulté soulevée par P. Grim concerne la possibilité d'un être omniscient même si celui-ci ne s'intéresse qu'aux mathématiques. P. Grim emploie un procédé analogue à celui utilisé pour démontrer qu'il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles dans la théorie classique des ensembles (voir la figure 4).

Finalement, même si certains tentent des réponses aux divers paradoxes ici évoqués de l'omniscience, il semble bien que l'idée, sur un plan strictement logique et mathématique, ne puisse pas résister, tant elle engendre de contradictions et d'incohérences de toutes sortes. Comme c'est le cas aussi à propos de l'omnipotence, cela ne trouble guère les mathématiciens et les logiciens qui, au contraire, se réjouissent de la richesse des idées et théories qui naissent de ces questions théologiques quand on les transpose en mathématiques. Peut-être est-ce la preuve d'ailleurs que ces dernières ne sont qu'une forme extrême et abstraite de théologie ? ■



Jean-Paul DELAHAYE
est professeur à l'Université
de Lille et chercheur
au Laboratoire d'informatique
fondamentale de Lille (LIFL).

✓ BIBLIOGRAPHIE

J. Salerno, *New Essays on the Knowability Paradox*, Oxford University Press, 2009.

S. Bruns, *Superior Beings. If they exist, how would we know ?*, Springer [2^e éd.], 2007.

J. Kvanvig, *The Knowability Paradox*, Oxford University Press, 2006.

J. Sobel, *Logic and Theism, Arguments for and against Beliefs in God*, Cambridge University Press, 2005.

M. Peterson et R. VanArragon (éd.) *Contemporary Debates in Philosophy of Religion*, Blackwell Publishing, 2004.

T. Zamir, *The omnipotence paradox as a problem of infinite regress*, *Sophia*, vol. 38(1), pp. 1-14, 1999.

P. Grim, *The Incomplete Universe*, MIT Press, 1991.

E. Wierenga, *The Nature of God*, Cornell University Press, 1989.

F. Fitch, *A logical analysis of some value concepts*, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 28, pp. 135-142, 1963.

Thomas d'Aquin, *Somme théologique*, 1273
(<http://docteurangelique.free.fr/livresformatweb/sommes/OSommecomplete.htm>)

ART & SCIENCE

La résurrection de nos ancêtres

À partir du crâne et parfois d'un squelette, la paléo-artiste Elisabeth Daynes redonne un visage et un corps aux hommes préhistoriques. Ces reconstitutions artistiques et scientifiques sont riches d'enseignements pour les paléontologues.

Loïc MANGIN

À la fin des années 1980, on mit au jour une quarantaine de sépultures sur le site des « Reaudins », à Balloy, en Seine-et-Marne. Elles sont datées du début du Néolithique moyen, vers 4500 avant notre ère. Le Musée départemental de Préhistoire d'Île-de-France, à Nemours, a décidé de redonner vie à l'un des squelettes, particulièrement bien conservé (voir la figure a), en demandant à la paléo-artiste Elisabeth Daynes de reconstituer cet ancêtre. Ce travail est l'occasion de la première rétrospective de E. Daynes qui s'est illustrée par les reconstructions anatomiques de l'australopithèque *Lucy*, de *Toumai*, de Toutânkhamon... La sculpture qui en résulte est l'*Homme du Cerny* (voir la figure c), du nom d'un site de cette période situé dans l'Essonne. Comment s'y est-elle prise ?

La première étape, à la réception du crâne, est d'en effectuer un moulage précis. Celui-ci a été ensuite confié à Jean-Noël Vignal, paléopathologiste et anthropologue médico-légal. Expert en enquêtes criminelles quand il s'agit de rendre un visage à des restes humains pas trop détériorés, il a mis au point un logiciel qui fournit, pour le crâne, l'épaisseur des tissus mous (muscles et peau). Cet outil est fondé sur de nombreuses études anthropométriques d'individus des deux sexes, de tout âge et d'origines ethniques diverses. Les valeurs obtenues sont matérialisées sur le moulage par des petits marqueurs qui guideront la reconstitution (voir la figure b). Pour la forme du nez, une projection, d'une part, de l'épine nasale et, d'autre part, du sommet de l'ori-

fice renseigne sur la longueur de l'appendice. La largeur des fosses nasales borne celle des narines.

Cette méthode est issue d'une longue tradition. Le premier à s'être intéressé aux liens entre la forme du crâne et l'apparence du visage est Paul Broca (1824-1880). Toutefois, les premières reconstitutions sont allemandes. À la fin du XX^e siècle, Hermann Welcker redonne un visage à Kant et à Raphaël, tandis que celui de Jean-Sébastien Bach renaît sous les doigts de Wilhelm His ! L'anatomiste déterminait déjà l'épais-

Les reconstitutions stimulent l'imagination des paléontologues.

seur des tissus mous à l'aide d'aiguilles enfoncées dans les chairs. Plus tard, Kollmann et Buchly ont poursuivi les travaux de His et entrepris une reconstitution d'un crâne néolithique découvert sur les rives du lac de Neuchâtel, en Suisse.

Le squelette, entier, de l'*Homme du Cerny*, mort à l'âge de 40-45 ans, sans pathologie ni carence apparente, donnait aussi une idée de sa stature : il était robuste. Étonnamment, alors qu'il ne mesurait pas plus de 1,60 mètre, son avant-bras correspond à celui d'un individu plus grand d'environ 20 centimètres. Selon le paléontologue Yves Coppens, qui a souvent recours aux services d'E. Daynes, ce caractère, pas nécessairement avantageux, se serait fixé dans le

groupe auquel appartenait l'homme. Ce phénomène est fréquent dans les petites populations isolées, par exemple sur des îles et dans des villages reculés, où les possibilités d'alliance sont limitées. De fait, plusieurs squelettes de Balloy présentaient cet allongement de l'avant-bras.

L'étape suivante est la confection d'un écorché, c'est-à-dire le placement des muscles sur le moulage. Les indices, outre l'épaisseur des tissus mous, sont les zones d'insertion des tendons de ces muscles sur le crâne. Ces dernières se traduisent par des arêtes plus ou moins proéminentes selon la taille du muscle. La face d'un *Homo sapiens* est constituée de 47 muscles – il y en a moins sur les espèces plus anciennes –, mais seuls les principaux (masséters, temporaux...) sont ici pris en compte. Précisons que les visages sont émaciés, car plus on s'éloigne de l'os, plus on laisse de place à l'interprétation.

Vient ensuite l'apposition des yeux, de la peau, en silicone, et de la pilosité. La couleur de ces éléments est en particulier déterminée par le climat à l'époque où l'individu reconstitué vivait. Ces informations sont déduites, par exemple, des restes de flore et de faune trouvés avec le squelette. Cette méthode est inspirée des études récentes de Nina Jablonsky, anthropologue à l'Université d'État de Pennsylvanie, aux États-Unis. Son équipe a établi des liens entre l'exposition aux ultraviolets (et donc au climat) et la teinte de la peau, des poils et des cheveux.

Reste à habiller la sculpture et, dans le cas de l'*Homme du Cerny*, à ajouter un bracelet semblable à celui retrouvé dans la

tombe, avec une griffe et une dent de canidé. Dans la reconstitution, l'homme est posé sur une hache, un outil de défrichage dont plusieurs exemplaires ont été retrouvés dans les sépultures de ces premiers éleveurs (de bovins) et cultivateurs.

Y. Coppens sollicite ce type de travaux, car « on a beau avoir de l'imagination, on n'en a pas assez pour comprendre à quoi ressemblaient nos ancêtres. Pour nous, c'est une révélation, une image inaccessible par ailleurs ». Plus encore, ces reconstitutions sont parfois des sources d'informations. Par exemple, le dimorphisme sexuel apparaît de façon plus évidente qu'avec les seuls osse-

ments. Or les différences de stature entre mâles et femelles renseignent sur leur environnement. Un dimorphisme peu prononcé traduit souvent un paysage couvert, forestier, où les agressions et les prédateurs étaient rares. En revanche, un dimorphisme accentué trahit un milieu ouvert, telle la savane, dont les dangers ont sélectionné des mâles qui protégeaient les femelles et les enfants de leur groupe. C'était le cas de *Lucy* et de *Lucien*, un gros mâle de la même espèce (*Australopithecus afarensis*) vivant il y a plus de trois millions d'années.

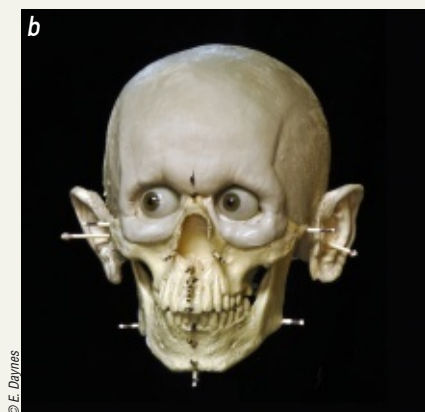
Enfin, ces reconstitutions ont éclairé la filiation des Australopithèques. En effet,

la taille de *Lucien*, sa corpulence, sa face, son allure font d'*A. afarensis* non pas l'ancêtre du genre *Homo*, mais plutôt celui de *Paranthropus*, les deux genres étant contemporains (entre 2,7 et 1 millions d'années). Ainsi, les reconstitutions des anciens hominidés renseignent sur leur apparence, leur milieu et leur devenir en tant qu'espèce. Et elles stimulent l'imagination des paléontologues. ■

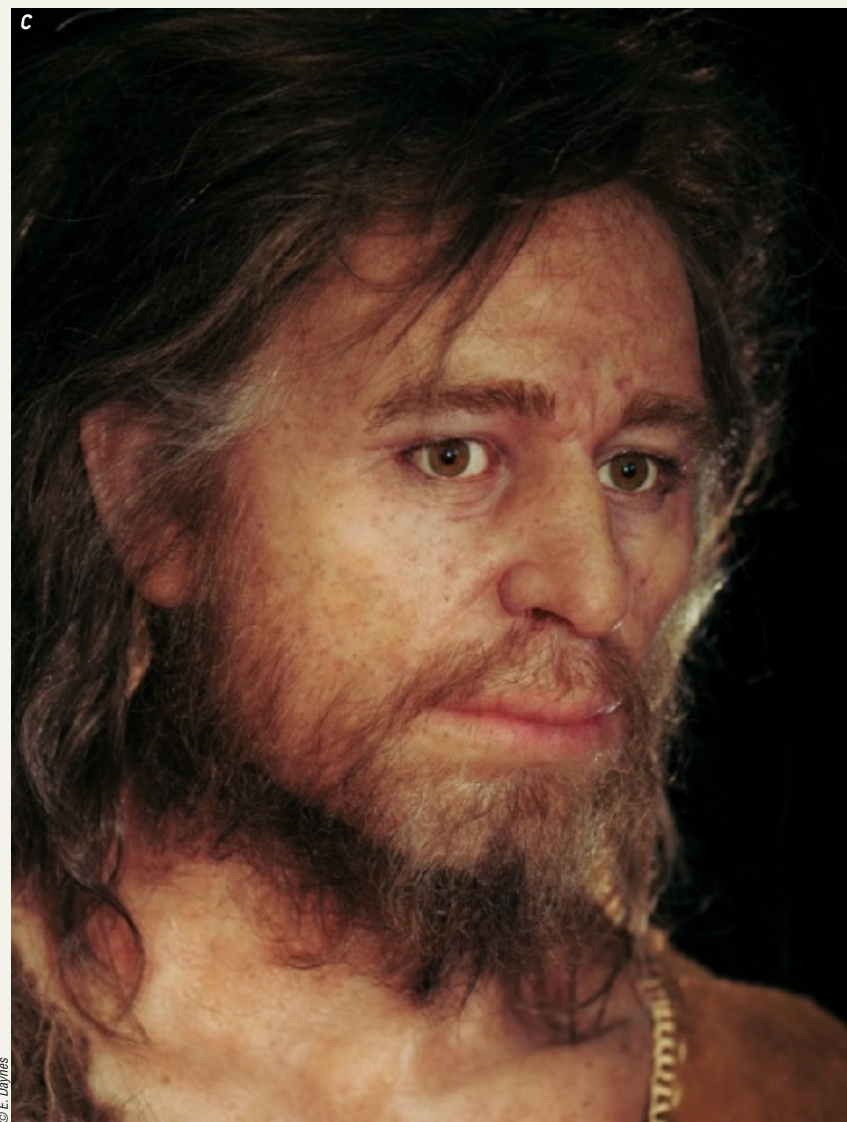
L'identité retrouvée, du 1^{er} octobre 2011 au 23 septembre 2012, Musée départemental de Préhistoire d'Île-de-France, à Nemours.



© D. Mordant



© E. Daynes



© E. Daynes

IDÉES DE PHYSIQUE

L'effet domino

On peut estimer la vitesse de propagation des chutes dans une file de dominos. Pour autant, le phénomène garde ses zones d'ombre.

Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK

L'effet domino ? L'expression a envahi de nombreux domaines, de la géopolitique à la finance. Elle fait référence aux chutes successives observées dans une file de dominos lorsqu'on a fait vaciller le premier élément : il fait tomber le domino voisin, qui se couche sur le suivant, et ainsi de suite. Lors de l'événement *Domino Day* de 2009, 4 491 863 dominos sont tombés sur les 4 800 000 placés, ce qui a établi un nouveau record du monde. Au-delà de la performance, les vidéos du spectacle intriguent : à quelle vitesse le « front de chute » se propage-t-il ? Y a-t-il un espacement optimal qui maximise cette vitesse ? Quelle pente les dominos peuvent-ils gravir ? Malgré l'apparente simplicité du système, des travaux récents montrent que tout n'est pas encore bien compris.

La vitesse par analyse dimensionnelle

Une analyse dite dimensionnelle permet d'estimer la vitesse de propagation de l'effondrement d'une ligne de dominos. Quels sont les paramètres physiques pertinents ? Il y a d'abord l'accélération g de la pesanteur, puisque c'est la gravité qui fait tomber les dominos. Ensuite, il y a la hauteur h d'un domino dressé et le rapport k

entre l'espacement entre dominos successifs et cette hauteur ; ces deux paramètres caractérisent entièrement la géométrie du problème — à condition de supposer que l'épaisseur du domino est suffisamment faible par rapport aux deux autres longueurs pour n'introduire que de petites corrections au cas idéal du domino infiniment mince. Cette épaisseur est néanmoins utile pour qu'un domino puisse tenir debout...

La masse d'un domino n'intervient pas : en effet, dans les problèmes où la gravité

est la force motrice, et tant que l'on ne considère pas de forces dissipatives, la masse n'apparaît jamais dans le résultat final, car elle est en facteur à la fois dans le poids, qui provoque le mouvement, et dans l'inertie, qui s'oppose aux changements de vitesse. C'est ainsi que la période d'oscillation d'un pendule ne dépend pas de sa masse ou que la vitesse des vagues, encore nommées ondes de gravité, ne fait pas intervenir la densité de l'eau.

Avec les trois paramètres g , h et k ainsi identifiés, il n'est possible d'obtenir une vitesse que d'une seule façon : en multipliant $\sqrt{gh}$ (qui a la dimension d'une vitesse) par une fonction inconnue de k (qui est sans dimension). En général, dans de telles analyses dimensionnelles, les coefficients de proportionnalité sont de l'ordre de 1 (c'est un acte de foi du physicien !) ; il en résulte que pour des dominos hauts de quatre centimètres, la vitesse sera de l'ordre de 60 centimètres par seconde. Une expérience chez soi ou le visionnage d'une vidéo nous convainc que l'estimation donne le bon ordre de grandeur.

Comment aller plus loin ? Une première approche est de considérer qu'un domino déséquilibré bascule sans rester en contact avec le domino précédent jusqu'à venir frapper le suivant. Avec cette hypothèse, la propagation se fait par une succession de chocs et basculements indépendants.



Dessins de Bruno Vaara

1. LA VITESSE DE L'ONDE DE CHUTE dans une file de dominos peut être estimée en ordre de grandeur à l'aide d'une analyse dimensionnelle. Cette dernière consiste à combiner les paramètres physiques pertinents du problème (ici l'accélération de la pesanteur, la hauteur d'un domino, l'espacement entre dominos successifs) de façon à former une grandeur ayant la dimension d'une vitesse. On obtient ainsi une vitesse de l'ordre de 60 centimètres par seconde pour des dominos hauts de quatre centimètres, valeur du même ordre de grandeur que celles constatées.