

Les missions européennes

Si les résultats des missions martiennes de la NASA sont spectaculaires, l'Agence spatiale européenne (ESA) n'est pas en reste. Elle s'est engagée dans l'exploration martienne dès 2003 grâce au lancement du satellite *Mars Express*. Toujours en opération, ses instruments ont contribué à révolutionner notre compréhension de la planète rouge. *Mars Express* embarquait un petit atterrisseur anglais, *Beagle 2*, mais celui-ci a échoué à se poser en douceur à la surface.

Sur ces bases, afin d'apprendre à se poser et à se déplacer sur la surface de Mars, l'ESA a décidé de lancer son propre rover de 300 kilogrammes, nommé *Exomars*, avec pour objectifs de rechercher des traces de vie passée et de comprendre l'évo-

lution de l'habitabilité de Mars. Pour cela, le rover devait utiliser une foreuse guidée par sondage radar et capable d'atteindre un à deux mètres de profondeur, afin de prélever des échantillons non altérés par le rayonnement et les espèces chimiques de l'atmosphère présentes en surface. Ces échantillons auraient été analysés par des spectromètres et un microlaboratoire embarqués.

Prévu initialement pour un lancement en 2013, le projet a souffert des aléas de la programmation spatiale et des crises budgétaires. L'idée même d'un rover entièrement européen a finalement disparu en 2009 pour être remplacée par un projet commun NASA-ESA. Lancé en 2018, le nouveau rover mixte sera beaucoup plus gros que le projet eu-

ropéen d'origine. Il emportera les instruments scientifiques d'*Exomars*, ainsi qu'un ensemble d'outils fournis par la NASA et destinés à préparer des échantillons pour un retour sur Terre (assuré par une autre mission de récupération, après 2020).

Pour se poser sur Mars, le rover de 2018 bénéficiera du système « *sky crane* » (grue volante) utilisé pour *Mars Science Laboratory*. Afin de maîtriser malgré tout les technologies pour atterrir sur Mars, l'ESA développe de son côté un atterrisseur de démonstration plus modeste. Il sera emporté par l'autre composante du nouveau programme conjoint NASA-ESA : un nouveau satellite construit par l'ESA et lancé par la NASA en 2016, destiné à détecter et cartographier dans l'atmosphère

les traces de gaz marqueurs d'une activité géophysique, voire biologique. Le projet est ambitieux, mais fragile : en septembre 2011, la NASA a annoncé qu'elle n'aurait pas les ressources pour financer pleinement sa contribution. Pour pallier cette défection, les Européens se tournent à présent vers la Russie, qui pourrait être intéressée à fournir un lanceur en échange d'une place pour des instruments russes sur le satellite. Après la perte probable de sa sonde *Phobos-Grunt*, quel sera le choix de l'Agence spatiale russe ? Le programme *Exomars* va-t-il survivre ? Les décisions cruciales seront prises en février 2012...

François Forget

Institut Pierre Simon Laplace, CNRS, Paris

et la glace d'eau des calottes devient instable, se sublime et se reforme sur les volcans de haute altitude proches de l'équateur, donnant naissance à de vastes glaciers. À ce stade, les pôles deviennent tempérés. Peut-être le carbonate de calcium a-t-il été formé lors de ces périodes chaudes et humides ?

L'observation par le lidar de chutes de neige autour de la sonde, tôt le matin vers la fin de l'été martien, nous a conduit à imaginer comment un écosystème microbien pourrait fonctionner. La neige sublimée pourrait se lier à la surface des grains de poussière. L'eau ainsi adsorbée agit comme une très mince couche de liquide. Durant un épisode chaud, cette couche pourrait s'épaissir au point de percoler et former une interface liquide entre les grains de poussière, où des micro-organismes seraient totalement immergés. Les nutriments et oxydants détectés par *Phoenix* seraient alors disponibles pour alimenter ces microbes. Cela étant, il faudrait aussi que ces derniers soient capables d'hiberner pendant plusieurs millions d'années pour survivre aux épisodes froids et secs.

Le perchlorate a une autre propriété intéressante : à haute concentration, il peut abaisser le point de congélation de l'eau à -70°C . Cela signifie que des micro-organismes pourraient trouver une niche sur Mars même quand le climat se refroidit. Pour toutes ces raisons, la découverte de

perchlorate a fait sensation dans la communauté des exobiologistes.

La présence de perchlorate pourrait aussi résoudre un mystère vieux de 35 ans. En chauffant des échantillons de sol dans un minuscule four, la mission *Viking* a détecté l'émission de chlorométhano-gènes. Les scientifiques de la mission, incapables de comprendre comment de tels composés chimiques pouvaient avoir une origine martienne, les ont attribués à une contamination par un agent nettoyant utilisé avant le lancement.

Le pôle est-il habitable ?

Le perchlorate suggère une interprétation différente. Des chercheurs de l'Université nationale autonome du Mexique ont reproduit l'expérience avec des échantillons de sol semblables à ceux de Mars, prélevés dans l'Atacama, avec de petites quantités de perchlorate ou sans. Ils ont retrouvé le dégagement gazeux que *Viking* avait observé : le perchlorate libère son oxygène et brûle les composés organiques présents, émettant par ce processus des chlorométhano-gènes. Ainsi, si le sol martien analysé par *Viking* renfermait du perchlorate, il aurait pu contenir des quantités non négligeables de composés organiques, plus d'une partie par million, qui auraient échappé à la détection. L'observation par

l'instrument TEGA d'une libération de dioxyde de carbone par les échantillons chauffés à plus de 300°C , exactement ce qu'on attendrait si des substances organiques étaient oxydées par du perchlorate, renforce cette interprétation.

Somme toute, les chances de trouver des indices de vie sur Mars n'ont jamais paru aussi bonnes. Mais les données de *Phoenix* s'arrêtent là. C'est maintenant à *Mars Science Laboratory* et, plus tard, à la mission *Exomars* de chercher d'autres traces de vie. Les résultats de *Phoenix* ne nous donnent que des preuves indirectes, alors que l'instrument d'analyse de *Mars Science Laboratory* peut reconnaître des signatures organiques dans le sol sans chauffage.

Phoenix a rempli sa mission pendant cinq mois avant que l'obscurité et les températures frigorifiques de l'hiver polaire martien ne s'installent. Nous avons perdu son signal en novembre 2008. Quand le printemps est revenu au pôle Nord de Mars l'année suivante, nous avons espéré que l'atterrisseur reviendrait à la vie, mais ce ne fut pas le cas. La dernière image satellite montrait *Phoenix* couché sur la rive d'une longue fracture ressemblant à une rivière, ses panneaux solaires cassés, enfoui dans de la glace de dioxyde de carbone. L'avant-poste scientifique d'hier est devenu partie intégrante du paysage d'aujourd'hui. ■

ACTUELLEMENT EN KIOSQUE



Dossier Pour la Science

Découvrir la chimie qui régule les écosystèmes ou la vie autour des sources hydrothermales des abysses ; exploiter de façon raisonnée la richesse des fonds marins (microalgues, ressources minérales, méthane...) ; découvrir des médicaments nouveaux ; protéger les mers contre les marées noires ou les déchets plastiques... Aujourd'hui, la chimie est au centre d'une alliance durable entre les hommes et les océans.

Numéro 73, octobre-décembre 2011 – Prix : 6,95 €

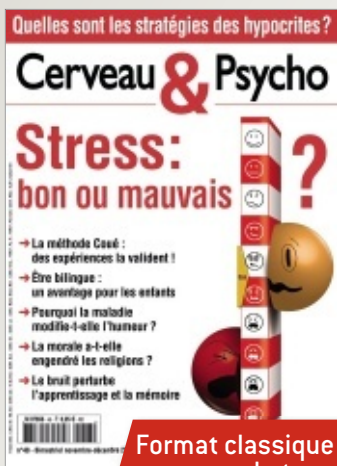
L'Essentiel Cerveau & Psycho

Aujourd'hui, d'innombrables résultats de recherche confirment que les enfants – mais aussi les adolescents et les adultes – soumis à la violence (images, jeux vidéo, etc.) sont eux-mêmes plus violents, moins sensibles aux violences faites à autrui. Sociologues, psychologues, psychiatres cherchent à identifier les causes de la violence pour mieux la combattre.

Numéro 8, novembre 2011-janvier 2012 – Prix : 6,95 €



Format classique
ou pocket



Format classique
ou pocket

Cerveau & Psycho

Nous nous nous sentons stressés par notre rythme de vie, notre travail, etc. Et si le stress n'était pas forcément mauvais ? Certains y trouvent un stimulant et, dans certaines conditions, il renforce la mémoire. Mais, comme en toute chose, il faut éviter l'excès ! À lire aussi : la méthode Coué validée par les psychologues, les enfants bilingues avantagés, les méfaits du bruit sur la concentration, etc.

Numéro 48, novembre-décembre 2011 – Prix : 6,95 €

■ POUR LA
SCIENCE

La géométrie

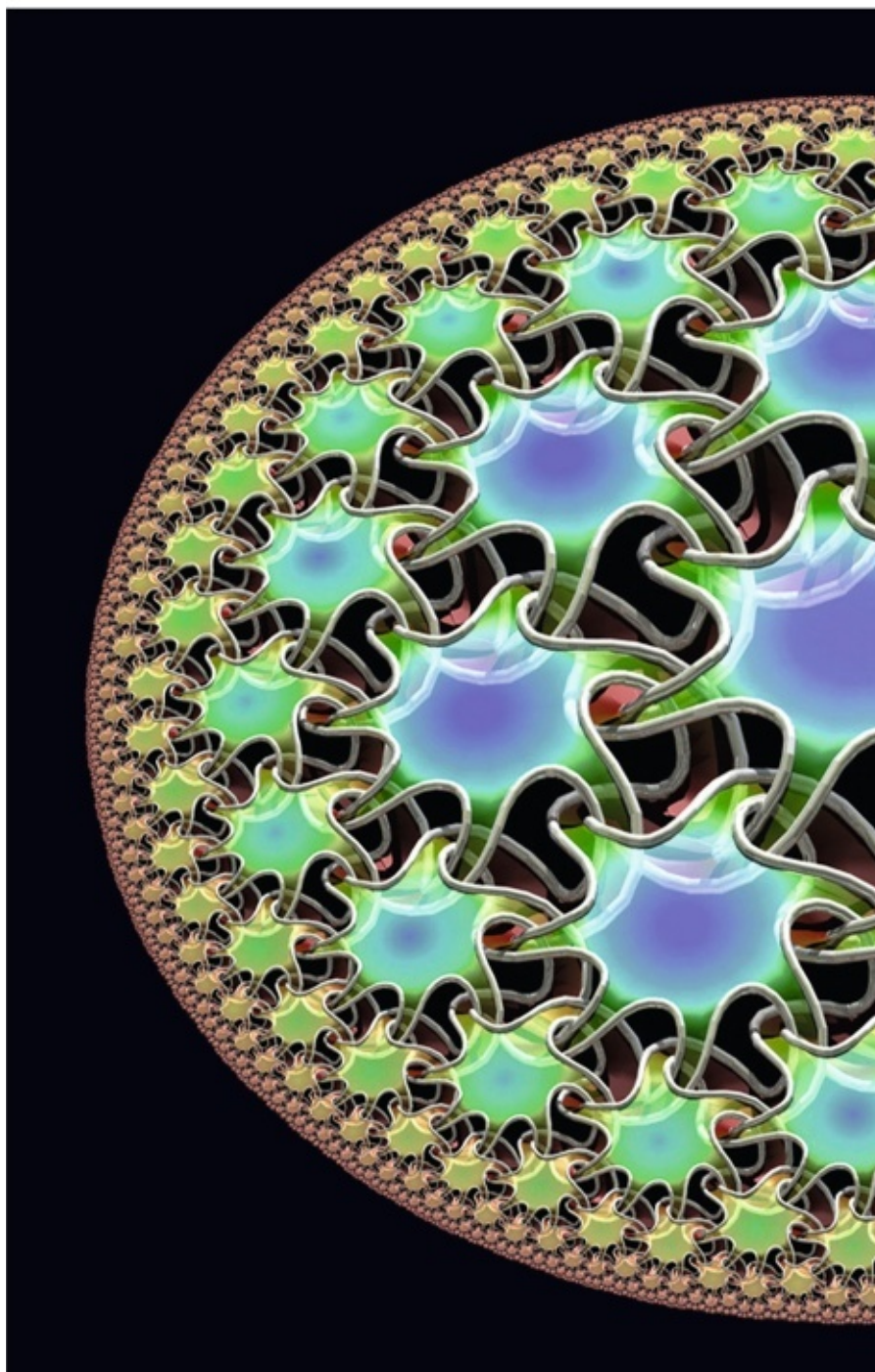
Bien après l'invention de la perspective en peinture, les mathématiciens ont conçu des méthodes pour conférer un bord à un espace géométrique infini. Cette construction d'un horizon représente un outil mathématique puissant.

Françoise Dal'Bo-Milonet

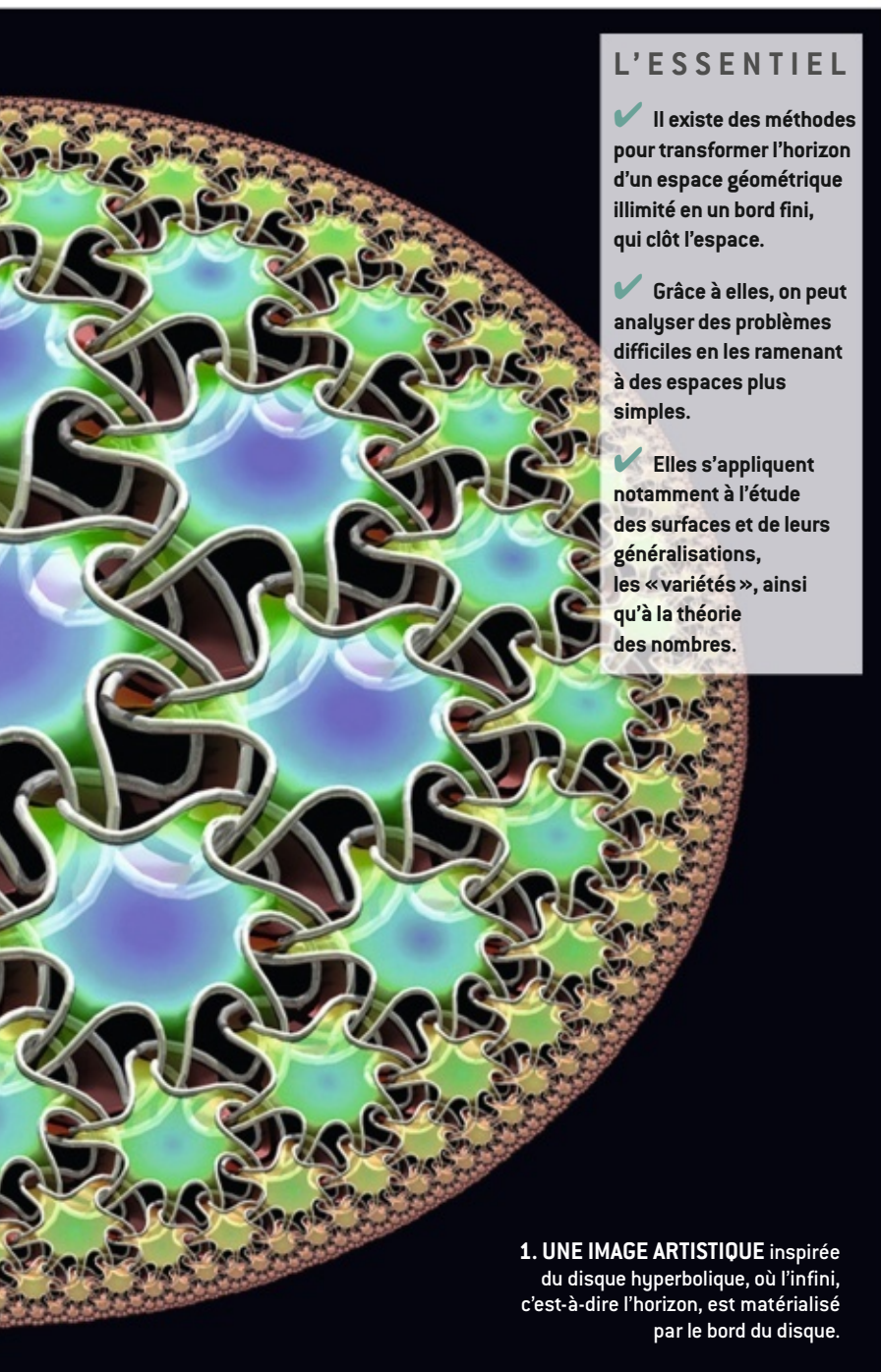
Observons deux droites parallèles : notre œil les voit converger en un point du champ visuel. Cette perception, que le dessin en perspective reproduit sur un plan, nous paraît aujourd'hui évidente. Il a pourtant fallu beaucoup d'audace aux peintres du XV^e siècle pour représenter un point de convergence à l'infini par un point ordinaire sur le tableau. Ce geste libérateur a donné lieu à divers procédés graphiques de représentation en perspective.

Deux siècles plus tard, en cherchant à les unifier, Girard Desargues, un architecte et géomètre lyonnais mort il y a tout juste 350 ans (en 1661), pose les bases d'une géométrie qui neutralise la différence entre le fini et l'infini. Desargues introduit un espace clos, qui contient le plan ordinaire mais où toutes les droites sont sécantes, y compris les droites parallèles.

Le savant lyonnais, maître de Blaise Pascal, détrône ainsi le plan usuel, support universel des figures de la géométrie d'Euclide. Trop révolutionnaires pour



des horizons



l'époque et écrits dans un style peu académique, les travaux de Desargues passent inaperçus face à ceux de son contemporain René Descartes, qui défendent la toute-puissance de l'algèbre. Ils ne sont sortis de l'oubli qu'au XIX^e siècle. Les idées de Desargues ont alors ouvert la voie à une nouvelle géométrie dite projective, qui prend en compte simultanément un espace et son «horizon».

Les études géométriques, autrefois centrées sur les figures, se sont désormais tournées vers l'espace qui les contient. Elles ont conduit à la découverte, dans les années 1850, du premier exemple de géométrie non euclidienne. Un peu plus tard, trois siècles après Desargues, la notion de «bord visuel», qui formalise les points de fuite et permet ainsi de clore les espaces géométriques, entraine de plein droit dans les mathématiques.

De l'infini géométrique au fini

Dès lors, les mathématiciens ont tissé des liens profonds entre espaces clos et espaces illimités. Et il y a une quarantaine d'années, sous l'impulsion de l'Américain George Mostow, ces bords se sont introduits dans les raisonnements : aujourd'hui, le géomètre les utilise comme de précieuses passerelles qui lui permettent de traduire des problèmes posés sur un espace illimité en termes de géométrie bornée en petite dimension. J'illustrerai ici la force de cette approche sur deux axes de la recherche actuelle en mathématiques : les «variétés hyperboliques», objets géométriques convoités par les topologues et les cosmologistes, et les pavages réguliers non euclidiens.

Avant d'introduire la notion de variété hyperbolique, considérons d'abord un exemple plus simple d'espace géométrique non euclidien : la sphère. Cette figure

bien connue peut sembler simple. Pourtant, la géométrie qui la caractérise est longtemps restée ignorée. Certes, en cosmologie, l'hypothèse d'un monde sphérique, clos, s'est longtemps imposée face à celle d'un Univers sans fin et sans limites. Mais en géométrie, le monde de départ est l'espace euclidien, un réceptacle neutre, illimité, où les droites se prolongent à l'infini. C'est peut-être ce parti pris qui explique que la sphère, pourtant si familière, ait mis du temps à s'imposer comme espace géométrique à part entière.

Les siècles de discussions qui ont porté sur le cinquième postulat de la géométrie d'Euclide (325-265 avant notre ère) illustrent bien cette résistance à prendre en compte la sphère. La version la plus connue de ce postulat affirme que par un point du plan situé à l'extérieur d'une droite D , passe une seule droite ne rencontrant pas D (voir la figure 2a). Le statut de cet énoncé a

espace illimité, conforme au plan euclidien sur bien des points, mais qui s'en départit sur un : le chemin le plus court, ou « géodésique », entre deux points, n'est pas un segment de droite. Comme nous le verrons, dans ce nouvel espace dit hyperbolique, les analogues des droites du plan, les géodésiques, ne vérifient pas le cinquième postulat d'Euclide, formulé en remplaçant le terme de droite par celui de géodésique.

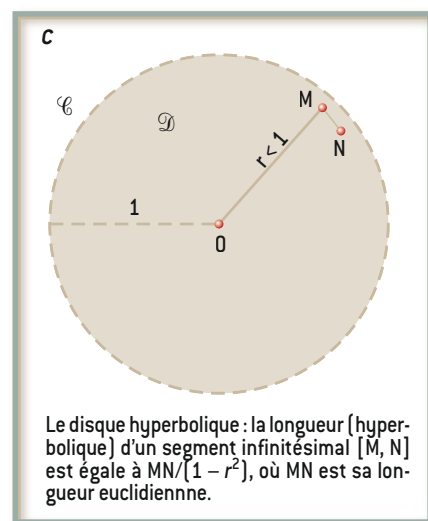
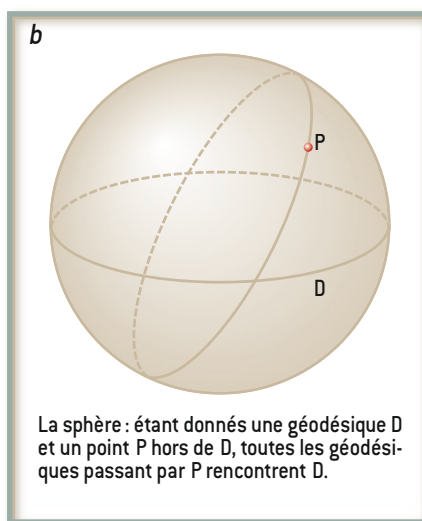
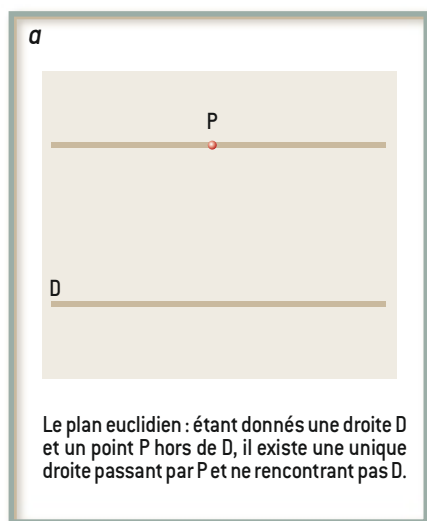
La sphère, espace illégitime ?

Pour des raisons différentes, le cinquième postulat d'Euclide est aussi incompatible avec la géométrie de la sphère. Pour nous en convaincre, mettons-nous à la place d'un marin au long cours. Pour lui, le chemin géodésique (le chemin le plus court) entre deux points à la surface de la Terre est porté

le concept de variété : il s'agit d'un espace qui, localement, c'est-à-dire au voisinage de chacun de ses points, peut être décrit par un espace euclidien de dimension fixe n . Ses travaux unificateurs permettront enfin à la sphère, cas particulier de variété de dimension 2, d'acquiescer un statut d'espace géométrique, aux côtés de celui d'Euclide et de l'espace de Bolyai-Lobatchevski.

Depuis, les mathématiciens n'ont eu de cesse d'intégrer pleinement à leur domaine ces trois géométries : euclidienne, hyperbolique, sphérique. À commencer par le Français Henri Poincaré (1854-1912), qui a fourni une construction concrète de l'exemple abstrait conçu par Bolyai et Lobatchevski.

En quoi consiste l'espace de Bolyai-Lobatchevski ? Il en existe de nombreux modèles, dont celui dit du disque hyperbolique. Pour construire ce modèle, on part d'un disque $\mathcal{D}$ du plan euclidien, centré



suscité bien des interrogations : existe-t-il une géométrie cohérente, non euclidienne, dans laquelle il est mis en défaut ?

Pendant plus de deux millénaires, des mathématiciens ont tenté de démontrer que le cinquième postulat découle des quatre autres, donc qu'il n'existe pas de géométrie où cet axiome n'est pas vérifié. Il a fallu attendre les années 1850 pour que l'on comprenne que ces tentatives sont vouées à l'échec et qu'apparaisse le premier exemple de géométrie non euclidienne. Deviné par l'Allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), on l'attribue au Hongrois Janos Bolyai (1802-1860) et au Russe Nicolai Lobatchevski (1792-1856). Ces mathématiciens ont conçu un

par un cercle dont le centre est celui de la sphère (voir la figure 2b). Deux tels grands cercles, autrement dit deux géodésiques de la sphère, se rencontrent toujours.

Pourquoi les mathématiciens sont-ils passés à côté de cette géométrie sphérique, non euclidienne, que les marins connaissaient bien avant le XIX^e siècle ? Pour reprendre l'argumentation de l'historien François Russo, l'hypothèse d'une géométrie où deux géodésiques ont toujours au moins un point d'intersection a longtemps été considérée comme inacceptable, notamment par Lobatchevski et Bolyai, car elle contraignait l'espace à être clos.

L'Allemand Bernhard Riemann (1827-1866) la rendra légitime en introduisant

en un point O , de rayon 1 et privé du cercle $\mathcal{C}$ qui le délimite. Sur ce disque « ouvert », on change les règles métriques en imposant une nouvelle façon de calculer les longueurs des chemins. Dans le plan euclidien, on calcule la longueur d'une portion de courbe en l'approchant par celle d'une ligne polygonale composée de segments de droite de plus en plus nombreux et courts, c'est-à-dire tels que la ligne brisée épouse de plus en plus finement la courbe. Il en est de même pour la longueur d'un chemin dans le disque hyperbolique. Pour définir d'une nouvelle façon les longueurs sur le disque hyperbolique $\mathcal{D}$, il suffit donc de spécifier la longueur d'un segment infinitési-

mal $[M, N]$, où M et N sont deux points de $\mathcal{D}$ très voisins.

La «longueur hyperbolique» du segment $[M, N]$ que l'on impose est un multiple de sa longueur euclidienne MN , avec un facteur qui dépend de la position du point M . Plus précisément, sa valeur est par définition égale à $MN/(1 - OM^2)$ (voir la figure 2c). Si M est proche de O , cette longueur hyperbolique est comparable à MN , puisque le nombre $1 - OM^2$ est presque égal à 1. Mais si M s'approche du cercle $\mathcal{C}$, ce nombre tend vers 0 et la longueur hyperbolique de $[M, N]$ devient de plus en plus grande, bien que, du point de vue euclidien, N soit très voisin de M .

La notion de longueur sur un espace est fondamentale en géométrie. Elle permet de caractériser des courbes particulières, les géodésiques, qui portent les chemins les plus courts entre deux points. Dans le plan euclidien, il s'agit des droites; sur la

dien (voir la figure 2d). En revanche, sa longueur hyperbolique est différente de sa longueur euclidienne, puisqu'elle tend vers l'infini lorsque le point M est fixé et que N s'approche du cercle $\mathcal{C}$. Un habitant du disque hyperbolique partant de O n'atteint donc jamais ce cercle en un temps fini.

Dans cette nouvelle géométrie, l'énoncé du cinquième postulat d'Euclide n'est pas vérifié. Il y existe en effet une infinité de géodésiques passant par le point O (des diamètres) qui ne rencontrent pas un arc de cercle fixé. En d'autres termes, il existe une infinité de géodésiques distinctes de l'arc de cercle en question et qui lui sont «parallèles» (voir la figure 2e).

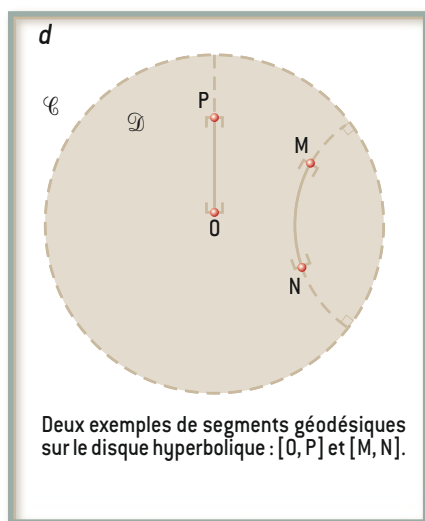
L'existence de telles configurations non euclidiennes a des conséquences troublantes sur les triangles hyperboliques, ces figures du disque hyperbolique dont les trois côtés sont des géodésiques (voir la figure 2f):

L'AUTEUR

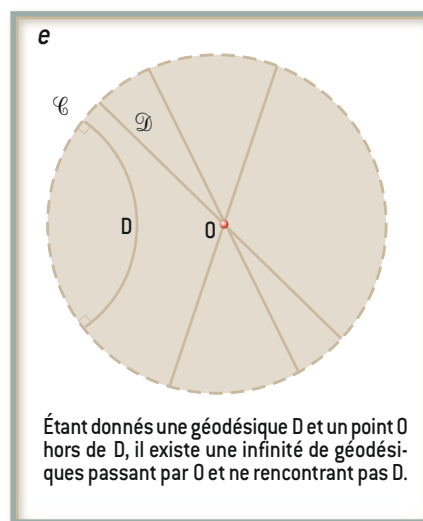


Françoise DAL'BO-MILONET est professeur des universités en mathématiques et responsable du Groupement de recherche CNRS de géométrie ergodique nommé «Platon». Elle effectue ses recherches à l'Institut de recherches mathématiques de Rennes (IRMAR).

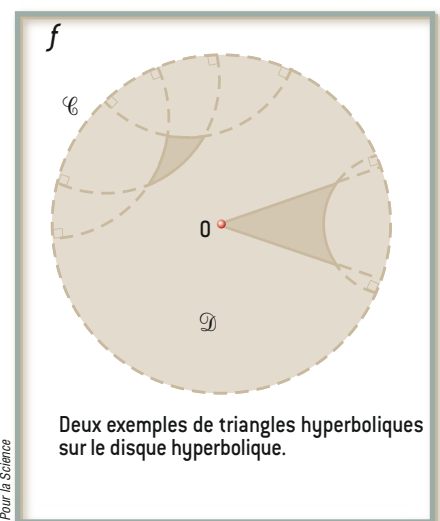
2. QUELQUES CARACTÉRISTIQUES du plan euclidien [a] et de deux espaces non euclidiens : la sphère [b] et le disque hyperbolique [c, d, e, f].



Deux exemples de segments géodésiques sur le disque hyperbolique : $[O, P]$ et $[M, N]$.



Étant donné une géodésique D et un point O hors de D , il existe une infinité de géodésiques passant par O et ne rencontrant pas D .



Deux exemples de triangles hyperboliques sur le disque hyperbolique.

sphère, nous l'avons déjà mentionné, ce sont les grands cercles. Dans le disque hyperbolique, on montre que les géodésiques sont de deux types : d'une part les demi-cercles perpendiculaires au cercle $\mathcal{C}$, d'autre part les diamètres (euclidiens) de ce cercle.

Longueurs euclidienne et hyperbolique

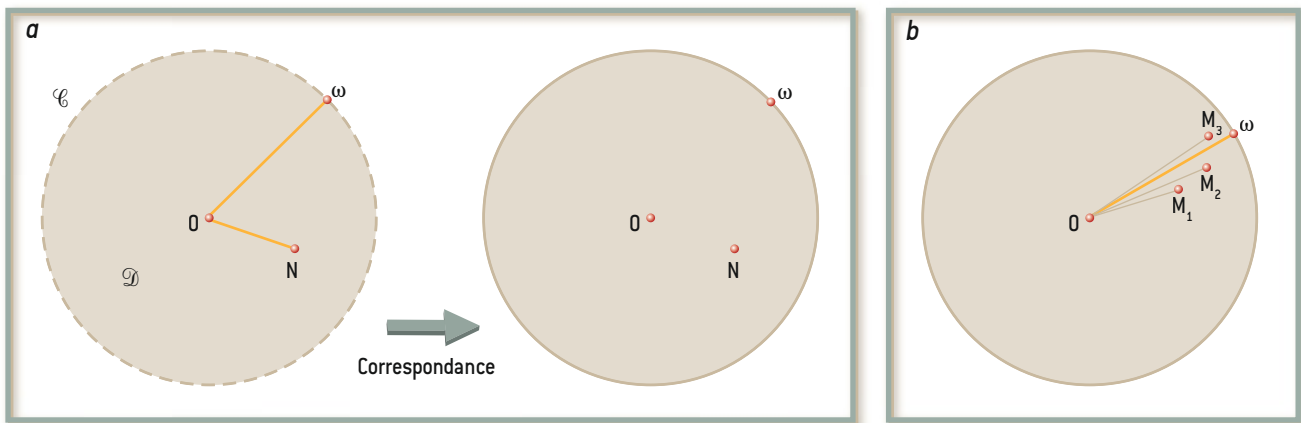
Plus précisément, si M et N ne sont pas alignés avec le point O , parmi tous les chemins de $\mathcal{D}$ qui relient M à N , celui qui a la plus petite longueur hyperbolique est porté par un arc de cercle. Si M , N et O sont alignés, ce chemin géodésique est le segment $[M, N]$, comme dans le plan eucli-

dien. La somme de leurs angles est strictement inférieure à 180 degrés. De plus, cette somme peut prendre toutes les valeurs comprises strictement entre 0 et 180 degrés, contrairement à celle d'un triangle euclidien qui est constante, égale à 180 degrés ! C'est le premier signe d'une géométrie plus souple, moins contraignante que celle du plan euclidien.

Comme il est repoussé à l'infini, le cercle $\mathcal{C}$ n'a pas d'existence concrète dans le monde hyperbolique, alors qu'il en a une dans le monde euclidien. Comment interpréter ce cercle immatériel en termes hyperboliques ? Imaginons que le point O soit, dans le disque hyperbolique, une source lumineuse qui émet dans toutes les

directions. La lumière se propage le long des chemins géodésiques. Parce qu'ils sont issus de O , ces chemins lumineux sont les segments de la forme $[O, \omega]$, où ω est un point du cercle $\mathcal{C}$. La longueur hyperbolique de $[O, \omega]$ étant infinie, on peut assimiler ω à un point sur l'horizon.

Ainsi, en associant à chaque rayon de lumière infini $[O, \omega]$ le point ω , on établit une correspondance entre l'ensemble des rayons et le cercle $\mathcal{C}$ (voir la figure 3). Sous cet angle, un point de $\mathcal{C}$ prend un sens «concret» hyperbolique : c'est un rayon de lumière hyperbolique issu de la source O . Dans le même esprit, on construit une correspondance entre les rayons de lumière hyperboliques de longueur finie émis



3. EN ASSOCIANT À CHAQUE RAYON LUMINEUX issu de O le point ω de l'horizon $\mathcal{C}$ vers lequel il se dirige, on établit une correspondance entre l'ensemble des rayons $[O, \omega[$ de longueur hyperbolique infinie et le cercle $\mathcal{C}$. De même, on fait correspondre à chaque rayon $[O, N]$ de longueur hyperbolique finie son extrémité N . En identifiant ainsi les

points aux rayons, finis ou infinis, le disque hyperbolique devient une partie d'un espace plus grand et clos, qui contient son horizon *[a]*. Dans cet espace, des points M sont dits visuellement proches de ω quand l'angle en O entre $[O, M]$ et $[O, \omega]$ est petit et la distance hyperbolique de $[O, M]$ grande *[b]*.

par O , autrement dit les segments $[O, N]$, où N est un point de $\mathcal{D}$, et le disque hyperbolique : à un tel rayon, on associe son point d'arrêt N (voir la figure 3a).

Le grand intérêt de cette approche par les rayons est d'apporter une vue hyperbolique unifiée du disque $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}$: leurs points sont identifiés à des rayons lumineux émis par la source O , que ces rayons soient de longueur finie ou infinie. En adoptant ce nouveau point de vue, le disque hyperbolique devient une partie d'un espace plus grand mais clos, un espace « compact » qui contient son horizon.

Le rôle principal de cet espace, que l'on peut représenter par la réunion du disque $\mathcal{D}$ et de son horizon $\mathcal{C}$, est de « compactifier » le disque, autrement dit de capturer son infini en donnant une limite à des suites de points qui divergent dans $\mathcal{D}$.

Pour que le concept de limite ait un sens dans ce nouvel espace, on introduit une notion de points « visuellement pro-

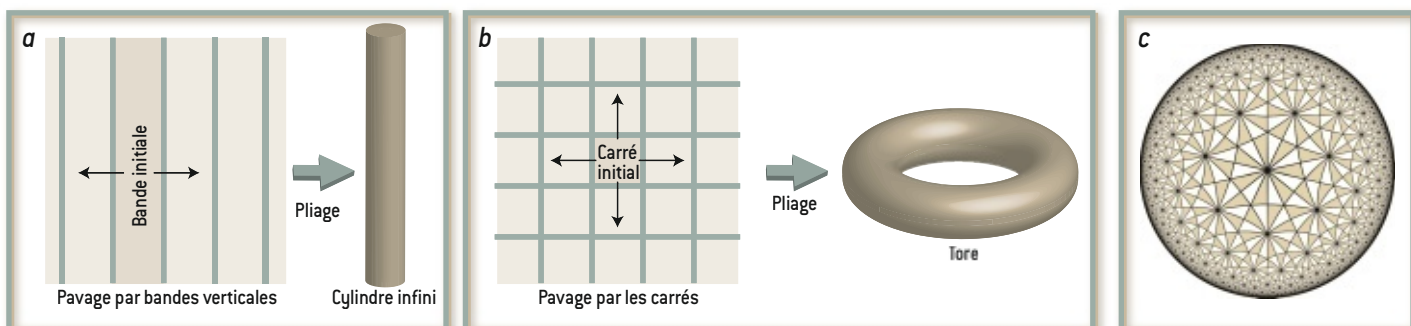
ches » qui vient contourner le problème de distance infinie entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$. Concrètement, on dira qu'un point M de $\mathcal{D}$ et un point ω de $\mathcal{C}$ sont proches si, d'une part, l'angle en O entre le rayon de lumière fini $[O, M]$ et le rayon infini $[O, \omega]$ est petit, et si, d'autre part, la longueur hyperbolique de $[O, M]$ est grande (voir la figure 3b).

Le bord visuel, un miroir de l'espace

Dans cet espace topologique, une suite de points M de $\mathcal{D}$ qui s'éloignent de O le long d'un rayon infini $[O, \omega]$, ou en restant visuellement proches de celui-ci, converge vers un point ω de cet espace, alors qu'elle diverge dans $\mathcal{D}$ (puisque ω n'est pas un point de $\mathcal{D}$). L'infini du disque hyperbolique est ainsi neutralisé, matérialisé par son « bord visuel », à savoir le cercle $\mathcal{C}$ considéré comme l'ensemble des rayons lumineux infinis émis par la source O .

Cette construction d'un bord visuel destiné à clore un espace géométrique s'est pleinement intégrée aux mathématiques à partir des années 1970, notamment grâce aux travaux de l'Américain Patrick Eberlein. Dans le cas le plus simple où cet espace est le plan euclidien, ce bord peut être représenté par un cercle, comme pour le disque hyperbolique. On s'en convainc en traçant un cercle autour d'une source de lumière du plan, et en associant à chaque rayon lumineux son point de rencontre avec ce cercle (voir la figure 4).

Ces bords mettent en évidence des liens entre des espaces qui étaient considérés comme étrangers l'un à l'autre. C'est ainsi que la sphère, illégitime en tant qu'espace géométrique jusqu'au XIX^e siècle, se révèle intimement liée à notre espace euclidien, au sens où elle traduit la géométrie de son horizon. On sait aujourd'hui que, dans de nombreux



5. LE PAVAGE DU PLAN AVEC DES BANDES PARALLÈLES permet de construire, en faisant se rejoindre les deux directions de translation horizontale, un cylindre de hauteur infinie *[a]*. Le pavage par des carrés per-

met de même, par « pliage » le long des directions de translation horizontale puis verticale, de construire un tore *[b]*. Les transformations permettant de paver de façon régulière le disque hyperbolique sont plus difficiles

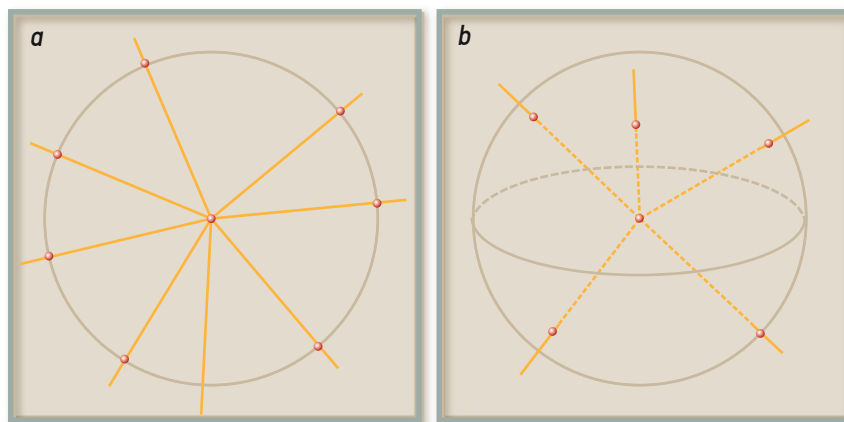
cas, le bord visuel porte de précieuses informations sur l'espace qu'il enserme. Par exemple, le cercle est le bord du plan euclidien et du disque, car ces deux espaces sont de dimension 2. Le bord d'un espace de dimension 3, tel l'espace euclidien, est une sphère. Des informations plus subtiles sont accessibles, d'autres restent à découvrir.

Le bord visuel est une invention théorique qui constitue une magnifique passerelle entre l'imagination et le raisonnement. Le géomètre s'en sert notamment pour étudier des problèmes posés dans un espace illimité, problèmes qui, grâce au bord visuel, se transcrivent sur un espace compact de plus petite dimension. Cette démarche est particulièrement fructueuse dans l'étude des pavages.

D'un pavage régulier à son ensemble limite

«Paver» un espace géométrique consiste à le recouvrir par des motifs qui ne se chevauchent pas, comme on le fait pour carrelé un sol. Le pavage est dit régulier s'il est obtenu en déplaçant un pavé initial par des transformations, qualifiées de déplacements, qui ne modifient ni la taille ni la forme du pavé. Son étude se résume essentiellement à celle de l'ensemble des déplacements qu'il met en jeu, ensemble nommé groupe paveur. Comment construire un tel groupe ?

Les groupes paveurs du plan euclidien sont bien connus. Ils sont en nombre fini. Leurs déplacements comprennent des rotations ou des translations. Par exemple, un pavage du plan peut être obtenu en appliquant à une bande verticale d'épaisseur unité le groupe des translations horizontales de longueur entière, ou encore en



4. LE CERCLE EST LE BORD VISUEL du plan euclidien (a), tandis que la sphère est le bord visuel de l'espace euclidien (b). Le bord visuel est un concept qui permet de clore un espace géométrique.

appliquant à un carré le groupe des translations entières, horizontales et verticales (voir les figures 5a et 5b).

Dans le cas du disque hyperbolique, les groupes paveurs sont plus difficiles à décrire et sont en nombre infini. Un exemple est construit en prenant, pour motif initial, un triangle hyperbolique dont les angles aux sommets sont de la forme $180^\circ/p$, $180^\circ/q$ et $180^\circ/r$, où p , q et r sont des entiers positifs vérifiant $1/p + 1/q + 1/r < 1$, ce qui garantit que la somme des angles soit inférieure à 180° . Les triangles se répètent alors sur le disque hyperbolique en devenant de plus en plus petits du point de vue euclidien, bien qu'ils gardent la même taille si on les mesure à l'aune de la longueur hyperbolique (voir la figure 5c).

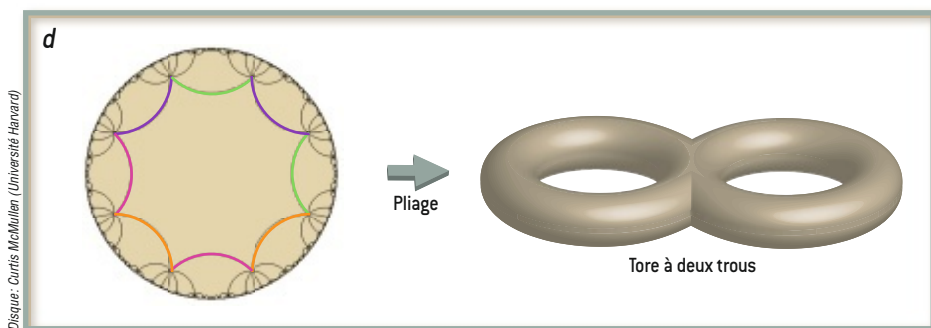
Il y a une quarantaine d'années, les mathématiciens ont introduit la notion d'«ensemble limite» d'un pavage régulier. Il s'agit d'un ensemble de points appartenant au bord visuel de l'espace et qui reflète la façon dont un point O de l'espace s'échappe à l'infini lorsqu'on le

déplace à l'aide des transformations du groupe paveur. Imaginons que les points de cette trajectoire soient peints en rouge, et intéressons-nous à ceux qui s'éloignent de O . Pour un observateur immobile, ces points s'accumulent à l'infini sur une partie rouge de son horizon : c'est l'ensemble limite du pavage.

Quelle est la nature de cet ensemble limite ? Pour un pavage régulier du plan euclidien, cet ensemble est soit formé d'un nombre fini de points, soit égal à tout le bord visuel, c'est-à-dire au cercle. Le premier cas est illustré par le pavage en bandes verticales : la trajectoire de O étant portée par la droite horizontale passant par ce point, ses points limites sont les deux «extrémités» à l'infini de cette droite (voir la figure 6a).

Le pavage régulier par des carrés illustre le deuxième cas. On montre que, obtenue par les translations entières horizontales et verticales, la trajectoire de O croise une infinité de fois toute droite de pente rationnelle passant par O . En poussant plus loin le raisonnement et en utilisant le fait que les nombres rationnels sont très nombreux dans l'ensemble de tous les nombres, on obtient que la «trace à l'infini» de cette trajectoire coïncide avec le bord visuel (voir la figure 6b).

Dans le disque hyperbolique, il existe aussi des pavages réguliers dont l'ensemble limite est constitué d'un nombre fini de points, ou encore égal à tout le cercle à l'infini. Mais, à la différence des pavages euclidiens, un troisième cas s'ajoute : celui d'une multitude de pavages réguliers dont les ensembles limites sont de nature fractale (voir la figure 6c). Ces ensembles, mines d'or de la géométrie hyperbolique, illustrent encore une fois la souplesse de cette géométrie.



à décrire. Ce disque peut être pavé d'une infinité de façons différentes, par des triangles (c, par exemple), par des octogones (d), etc. Avec le pavage par des octogones, le pliage le long de directions définies par les paires de côtés de l'octogone central de même couleur crée un tore à deux trous.

✓ BIBLIOGRAPHIE

É. Ghys, *Géométrer l'espace : de Gauss à Perelman*, *Images des Mathématiques*, CNRS, 2007 (<http://images.math.cnrs.fr/Geometriser-l-espace-de-Gauss-a.html>) et *Dossier Pour la Science* n° 74, janvier-mars 2012.

F. Dal'Bo, *Des trajectoires pour approcher les nombres*, *Pour la Science*, n° 359, pp. 66-73, septembre 2007.

F. Dal'Bo, *Trajectoires géodésiques et horocycliques*, EDP Sciences-CNRS, 2007.

J.-P. Luminet, *L'Univers chiffonné*, Gallimard (Folio), 2005.

R. Taton, *L'œuvre mathématique de Desargues*, 2^e édition, J. Vrin, 1981.

À quoi sert l'ensemble limite ? D'importantes informations portant sur un pavage régulier s'y reflètent. Certaines sont liées à la forme du motif du pavage. Par exemple, si ce motif est borné, comme dans le cas du pavage du plan euclidien par des carrés, son ensemble limite coïncide avec le bord visuel.

Lorsque l'ensemble limite est une fractale, des résultats récents montrent que l'architecture infinitésimale de cet ensemble, mesurée par sa « dimension fractale », est reliée au comptage des images du point O par les transformations du groupe paveur. Plus précisément, la croissance de ce groupe, donnée par le nombre d'images restant à une distance de O inférieure à un nombre positif R , est une fonction exponentielle du produit de cette dimension par R .

Des surfaces créées en pliant des pavages

Les pavages réguliers du plan euclidien, du disque hyperbolique et de la sphère sont intimement reliés aux surfaces (ou variétés de dimension 2). Ce lien s'appuie sur une interprétation en termes de pliage des déplacements associés au pavage.

Prenons l'exemple du pavage du plan euclidien par des carrés. Si l'on utilise les translations horizontales et verticales, non pas pour déplacer le motif mais pour identifier ses côtés, c'est-à-dire les recoller, on obtient une surface dont la forme est celle d'une bouée : un tore (voir la figure 5b). Parce qu'il provient d'un

pliage du plan, on dit que le tore est une « surface euclidienne ».

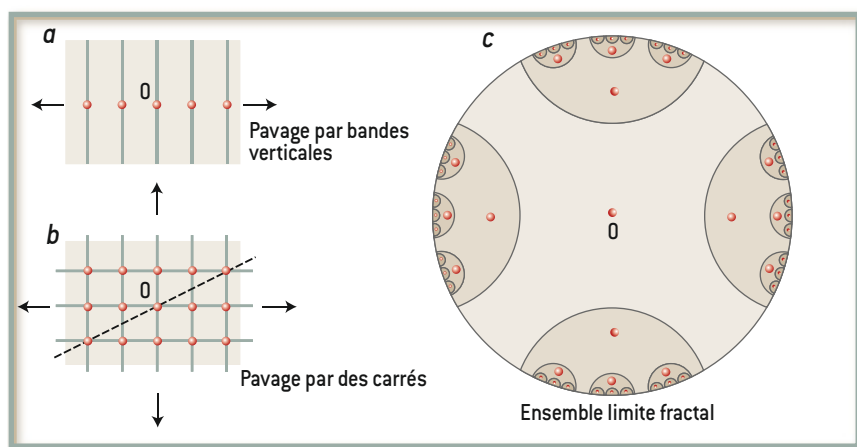
Les surfaces ne sont pas toutes euclidiennes. Un contre-exemple est la sphère : elle ne peut pas être construite en pliant un plan. On peut citer aussi le tore à deux trous, obtenu en recollant deux tores, que l'on construit en pliant le disque hyperbolique le long d'un octogone (hyperbolique) régulier (voir la figure 5d). Ces trois exemples reflètent une situation générale mise en lumière par Poincaré : une surface est soit euclidienne, soit sphérique, soit hyperbolique. Les deux premières familles sont finies, la troisième est infinie.

Pour savoir quel type de géométrie porte une surface, il suffit d'en connaître la forme. Cette information topologique ne suffit cependant pas pour retrouver le pavage à partir duquel la surface a été construite. Le tore à deux trous en est la preuve : il existe une infinité de pavages réguliers du disque hyperbolique permettant de le construire ! Toutefois, cette différence entre topologie et géométrie disparaît lorsqu'on s'intéresse à des objets de dimension supérieure à celle des surfaces, notamment les variétés de dimension 3.

Parmi ces variétés, on peut citer la boule, le tore plein, et plus généralement les surfaces fermées pleines. À l'exception de ces cas particuliers, il est généralement impossible de visualiser de tels objets dans l'espace ordinaire. Ces objets abstraits de dimension 3 n'en ont pas moins une existence mathématique.

L'un des premiers mathématiciens à s'y être intéressés de près est l'Américain William Thurston, dans les années 1970. Ses contributions dans le domaine lui ont valu une médaille Fields en 1978. Une question, inspirée par l'étude des surfaces, est au cœur de ses travaux : une variété est-elle « géométrisable » ? Autrement dit, peut-on la construire à partir du pavage régulier d'un espace modèle de dimension 3 ?

Cette question profonde a été à l'origine de nombreux développements en topologie. Elle est en particulier reliée à la conjecture de Poincaré, selon laquelle toute variété compacte de dimension 3 dépourvue de trous est topologiquement équivalente à la sphère tridimensionnelle (bord de la boule euclidienne de dimension 4). En 2003, le Russe Grigori Perelman parvint à démontrer cette conjecture, ce qui lui valut en 2006 une médaille



6. L'ENSEMBLE LIMITE D'UN PAVAGE RÉGULIER est l'ensemble de points vers lequel tendent les images d'un point initial O par les transformations du groupe paveur. Pour un pavage du plan par bandes verticales (a), l'ensemble limite est constitué des deux points à l'infini, à droite et à gauche. Pour un pavage par des carrés (b), on montre que la « trace » à l'infini de la trajectoire de O coïncide avec le bord visuel du plan, c'est-à-dire le cercle. Dans le cas du disque hyperbolique, on peut avoir des pavages réguliers dont l'ensemble limite est fractal (c).

Fields (qu'il a déclinée, tout comme le prix Clay plus récemment).

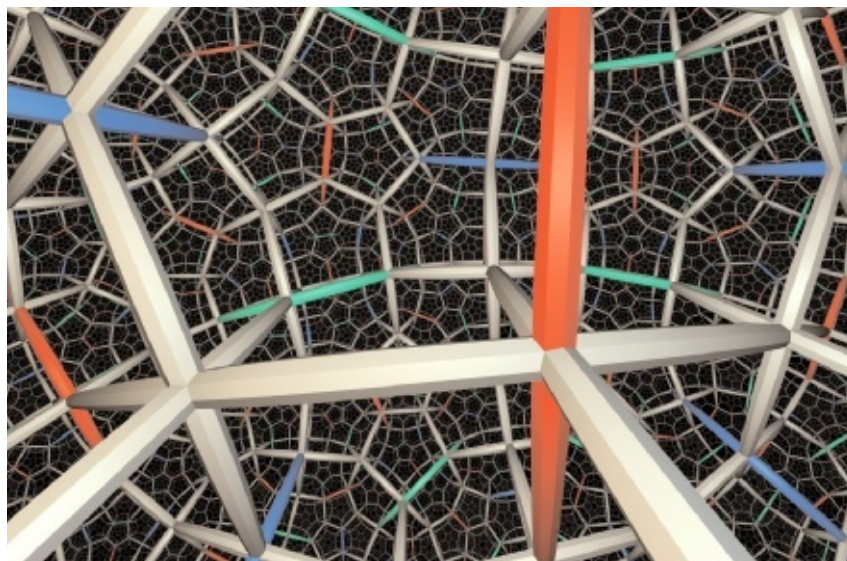
Si la géométrisation des surfaces met en jeu trois modèles – le plan euclidien, la sphère ou le disque hyperbolique –, celle des variétés de dimension 3 en fait intervenir huit. Parmi eux, citons « notre » espace ambiant euclidien et la boule hyperbolique obtenue, par analogie au disque hyperbolique, à partir d'une boule euclidienne (pleine, privée de la sphère qui l'entoure), sur laquelle on modifie le calcul des longueurs des chemins.

Les pavages réguliers de cette boule (voir la figure 7), difficiles à réaliser, permettent de construire par pliage des variétés dites hyperboliques. Ces objets, qui échappent à notre intuition, intéressent beaucoup les topologues pour leur forme complexe et leur lien avec la théorie mathématique des nœuds. En cosmologie, ils sont sources de spéculations sur la topologie de l'Univers.

Contrairement au cas des surfaces bidimensionnelles, la topologie d'une variété hyperbolique de dimension 3 détermine sa géométrie. C'est précisément l'énoncé du « théorème de rigidité » de G. Mostow : une variété hyperbolique étant donnée, il existe un unique pavage régulier de la boule hyperbolique qui permet de construire (par pliage) la variété en question.

Ce résultat de « dépliage » joue un rôle clef dans les travaux de W. Thurston et de G. Perelman. Il est à l'origine d'une école mathématique très active qui, de Yale à Jérusalem, travaille autour de ces concepts en lien avec la théorie des nombres et celle des probabilités.

Pour démontrer ce théorème, G. Mostow a fait preuve d'une grande originalité en introduisant le bord visuel de la boule hyperbolique dans son raisonnement. Dans ses grandes lignes, la démonstration consiste à partir d'un pavage régulier de la boule par un motif borné. En l'étudiant de près, on découvre que son groupe paveur contient, contrairement aux groupes paveurs euclidiens, des transformations mettant en jeu des mouvements complexes. G. Mostow les applique aux points du bord visuel de la boule hyperbolique, c'est-à-dire d'une sphère. En utilisant la présence de ces mouvements complexes sur un espace cette fois limité et de dimension 2, il parvient à montrer qu'à elle seule, cette action à l'infini détermine le pavage de départ.



Charles Gamm, Mathéon, Berlin (Allemagne)

7. L'INTÉRIEUR D'UNE BOULE HYPERBOLIQUE pavée de façon régulière par des dodécaèdres. Les couleurs n'ont pas de signification particulière dans cette représentation artistique du pavage.

Si, aujourd'hui, le théorème de rigidité de G. Mostow a perdu son éclat aux côtés d'énoncés plus généraux, l'idée de raisonner sur le bord visuel continue à vivre chez les géomètres du XXI^e siècle. Par ailleurs, sur les traces de G. Mostow et du Russe Gregori Margulis, les bords à l'infini se sont introduits dans des démonstrations d'arithmétique, grâce à la découverte de liens entre nombres et trajectoires sur des variétés illimitées. Des mathématiciens misent sur cette approche pour tenter de résoudre des conjectures de théorie des nombres.

Des bords à l'infini pour la théorie des nombres

L'une de ces conjectures, énoncée dans les années 1930 par l'Anglais John Littlewood, affirme qu'étant donnés deux nombres réels a et b , il existe des entiers p, q, r tels que la quantité $q^3(a - p/q)(b - r/q)$ soit aussi proche de zéro que l'on veut (cet énoncé porte donc sur l'approximation de a et b par des nombres rationnels). Sa formulation géométrique met en jeu un pavage régulier d'un espace de dimension 8 et un point du bord à l'infini de cet espace qui représente le couple de nombres (a, b) .

Dans ce modèle, s'intéresser à la conjecture de Littlewood revient à analyser les motifs du pavage rencontrés par une famille de géodésiques d'extrémité (a, b) . C'est ainsi

qu'avec deux collègues, le jeune Israélien Elon Lindenstrauss, lauréat d'une médaille Fields en 2010, a montré que l'ensemble des éventuelles exceptions à la conjecture de Littlewood est, sinon vide, très petit (en un sens mathématique précis). Ces travaux sont une belle illustration de la force de l'approche des bords à l'infini.

Le plan euclidien, le disque hyperbolique et leurs analogues en dimension supérieure font partie des espaces où les rayons lumineux se propagent facilement. Ce n'est pas toujours le cas. Certaines surfaces, par exemple, contiennent des trous ou des bosses qui dévient les rayons. On peut en construire une multitude par pliage de pavages réguliers du disque hyperbolique dont le motif initial est un polygone hyperbolique admettant une infinité de côtés, ou encore par recollement d'une infinité de tores.

Pour capturer l'infini d'une telle surface, l'objet adapté n'est plus le bord visuel, mais un ensemble plus abstrait, l'horobord, introduit dans les années 1980 par le mathématicien franco-russe Mikhaïl Gromov. Et depuis, d'autres notions de bord ont été inventées.

Ainsi, plus de 2000 ans après Euclide, les géomètres, partant des lois de l'optique, ont libéré les mathématiques en neutralisant l'infini, alors même que les physiciens, inspirés par des espaces géométriques abstraits, l'ont introduit dans leur représentation de l'Univers. Deux démarches qui, loin de se contredire, s'enrichissent. ■

Nourrir et préserver

Jonathan Foley

Doubler la production alimentaire d'ici 2050 tout en réduisant la dégradation de l'environnement : selon une équipe internationale, cet objectif est accessible.

L'ESSENTIEL

✓ Pour nourrir neuf milliards d'individus en 2050, il faudra doubler la production alimentaire.

✓ Or, déjà aujourd'hui, presque toutes les terres cultivables sont exploitées.

✓ Une équipe internationale propose un plan d'action pour doubler la production tout en réduisant son impact sur l'environnement.

✓ Ce plan comporte cinq mesures : améliorer la gestion des terres agricoles pour stopper leur extension, augmenter les rendements les plus faibles, mieux utiliser les engrais et l'eau, consommer moins de viande et éviter le gaspillage.

Un milliard de personnes souffrent aujourd'hui de faim chronique. Le problème ne vient pas tant de la quantité de nourriture disponible – les agriculteurs en produisent suffisamment pour répondre à leurs besoins – que de sa répartition inégale et de l'escalade des prix. En 2050, cependant, le défi aura pris une tout autre tournure.

La population mondiale aura augmenté de deux ou trois milliards, ce qui, d'après plusieurs études, devrait doubler la demande agricole. À cause de la croissance démographique, certes, mais aussi de l'augmentation du niveau de vie pour bon nombre de personnes, qui devrait entraîner une hausse de la consommation, en particulier de viande, sans oublier l'utilisation croissante de terres arables pour produire des biocarburants. Ainsi, même si l'on résout aujourd'hui les problèmes de pauvreté et d'accès aux ressources, il faudra produire deux fois plus pour assurer un approvisionnement mondial suffisant.

Et ce n'est pas tout. Parce qu'elle nécessite de défricher les forêts tropicales, de cultiver des terres en marge de zones non cultivables et d'intensifier l'industrie agroalimentaire dans des paysages et des bassins hydrographiques fragiles, l'agriculture est devenue la principale menace environnementale pour la planète. Elle occupe une grande part des terres disponibles, perturbe

des écosystèmes, consomme d'importantes ressources en eau douce, pollue les rivières et les océans et émet plus de gaz à effet de serre que la plupart des autres activités humaines. Pour préserver la planète à long terme, il devient impératif de réduire les impacts nocifs de l'agriculture.

Doubler la production en 40 ans

Le système alimentaire mondial est ainsi confronté à trois défis intriqués : nourrir les sept milliards d'individus qui peuplent la planète aujourd'hui, doubler la production d'aliments au cours des 40 prochaines années et atteindre ces deux objectifs tout en devenant une activité durable pour l'environnement. Comment répondre simultanément à ces trois défis ? Une équipe internationale d'experts, que j'ai coordonnée, propose un programme en cinq mesures qui, si elles sont appliquées conjointement, pourrait doubler la nourriture disponible pour la consommation humaine mondiale tout en réduisant les émissions de gaz à effet de serre, les pertes de biodiversité, l'utilisation de l'eau et sa pollution.

À première vue, la solution pour nourrir plus de personnes semble évidente : faire pousser plus de produits alimentaires en étendant les terres cultivées et en