

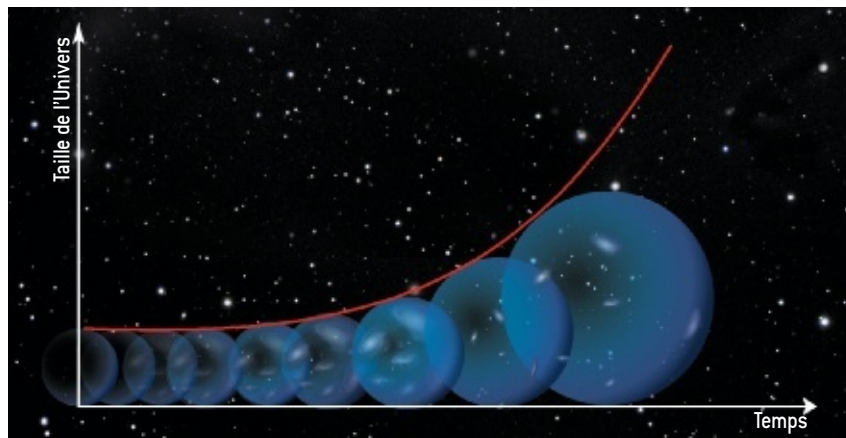
tions. » Et dans ses articles et ses cours après la Seconde Guerre mondiale, Lemaître cite la loi de Hubble sans jamais faire mention de sa propre contribution de 1927.

La controverse résolue par M. Livio a engendré une série d'effets intéressants. Nous en citerons deux. Le premier est d'avoir souligné de manière éclatante le fait que Georges Lemaître est bien le premier à avoir expliqué la « loi de Hubble ». Celle-ci mériterait donc, même si la modestie de Georges Lemaître en eût souffert, que nous la nommions désormais « loi de Hubble-Lemaître ». Et la récente proposition d'attribuer le nom de « Lemaître » à un grand instrument d'astronomie apparaît, dans ce contexte, on ne peut plus judicieuse.

Le Big Bang se dessine

Le deuxième est lié au contenu de la réponse de Lemaître à Smart. Lemaître avait la possibilité de supprimer tous les passages qu'il voulait dans sa traduction. Or, s'il enlève les données d'observations astronomiques effectives (qu'il eût été légitime de conserver malgré l'existence d'autres plus actuelles), il conserve ce qui est de l'ordre de la spéculation hardie : « Même la suggestion finale, qui n'est pas confirmée par un de mes travaux récents, n'a pas été modifiée », écrit-il à Smart. Cette suggestion est la suivante : « Il resterait à se (sic !) rendre compte de la cause de l'expansion de l'Univers. Nous avons vu que la pression de radiation travaille lors de l'expansion. Ceci semble suggérer que cette expansion a été produite par la radiation elle-même. »

Cette idée spéculative (et fausse !) est la trace d'une réflexion qui a pris corps lorsque Lemaître a réfléchi sur une autre idée spéculative (et fausse aussi), publiée en 1928 par Robert Millikan et Harvey Cameron, sur la nature des rayons cosmiques, des rayonnements très énergétiques détectés dans la haute atmosphère. Pour Millikan et Cameron, ces rayons sont produits dans l'espace, lors de la formation de noyaux atomiques à partir de protons et d'électrons, lesquels se seraient matérialisés à partir d'un rayonnement primitif. Dans un article de 1930, Lemaître reprend cette idée : « On pourrait



4. LE MODÈLE D'UNIVERS EN EXPANSION PROPOSÉ PAR LEMAÎTRE EN 1927. Son commencement est repoussé à l'infini vers le passé où il se raccorde au modèle statique d'Einstein, et une force répulsive accélère son expansion de façon exponentielle. En 1931, Lemaître affina son modèle en proposant un Univers où le monde a un commencement en feu d'artifice.

admettre que la lumière a été l'état originel de la matière et que toute la matière condensée en étoiles s'est formée par le processus proposé par Millikan. »

Elle est un des éléments qui le conduiront vers l'hypothèse de l'atome primitif. À l'origine de la théorie du Big Bang, cette hypothèse envisage, au commencement du Monde, un Univers ramassé dans un seul « atome » – un élément indivisible et homogène correspondant à un *quantum* d'énergie. Smart proposait à Lemaître d'ajouter une contribution nouvelle à sa traduction. Ce dernier préfère écrire un autre article où l'expansion sera non plus liée à une hypothétique pression de radiation originelle, mais à l'instabilité créée par la formation de condensations de matière dans un Univers quasi statique.

Loin d'être l'instrument d'une censure, la lettre de Smart m'apparaît comme une invitation faite à Lemaître à diffuser ses dernières idées. La lettre retrouvée par M. Livio montre que les préoccupations de Lemaître avaient changé depuis 1927. La question qui l'occupait en cette année 1931 était moins l'expansion de l'Univers que la cause profonde de son expansion et de son commencement, voire la formation des galaxies dans un Univers en expansion. Une controverse en histoire des sciences est toujours intéressante, car elle bouscule les idées et... les archives pour faire apparaître des vérités, y compris celles auxquelles on ne pensait pas !

✓ À ÉCOUTER

En février 2012, Dominique Lambert reviendra sur la controverse dans l'émission **La marche des sciences**, sur France Culture de 14h à 15h. www.franceculture.com

✓ BIBLIOGRAPHIE

M. Livio, *Mystery of the missing text solved*, *Nature*, vol. 479, pp. 171-173, 2011.

D. Lambert, *Un atome d'univers. La vie et l'œuvre de Georges Lemaître*, Lessius, 2011.

D. Lambert et J. Reisse, *Charles Darwin et Georges Lemaître. Une improbable mais passionnante rencontre*, Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences, 2008.

D. Lambert, *Lemaître. Le père du Big Bang*, *Les Génies de la Science*, n°30, pp. 26-120, 2007.

D. Lambert, *L'itinéraire spirituel de Georges Lemaître suivi de Univers et Atome* (inédit de G. Lemaître), Lessius, 2007.

J.-P. Luminet, *L'invention du Big Bang*, Seuil, 2004.

LOGIQUE & CALCUL

La conjecture du carré inscrit

Placer sur une courbe fermée quatre points formant les coins d'un carré est presque toujours possible. C'est bien, mais comment se débarrasser du « presque » ?

Jean-Paul DELAHAYE

Là où on s'y attend le moins, des questions mathématiques difficiles surgissent, si difficiles parfois qu'elles restent non résolues. Le cas dont nous allons parler est particulièrement étrange puisque la question est « presque » résolue depuis longtemps. Malheureusement, les mathématiciens n'ont pu enlever le « presque », malgré des progrès récents et un siècle de tentatives diverses par des chercheurs chevronnés.

Voici le problème.

1) Dessinez une boucle avec une craie sur un tableau : cercle, ellipse, ovoïde, polygone régulier, etc.

2) Trouvez quatre points de la courbe qui soient les quatre sommets d'un carré.

Si vous êtes patient et méthodique, vous réussirez quel que soit votre tracé sur le tableau (voir la figure 1).

Le constat sur des cas particuliers est intéressant, mais peut-on démontrer qu'il existe un tel carré pour toute courbe fermée simple (qui revient à son point de départ sans se couper) dessinée sur un plan ?

La réponse n'est pas connue dans le cas général, bien que de nombreux cas particuliers aient été traités, lesquels recouvrent à peu près toutes les courbes fermées simples habituellement envisagées en mathématiques. Le problème a été formulé en 1911 par le mathématicien allemand Otto Toeplitz [1881-1940]. Depuis, une multitude d'articles mathématiques lui ont été consacrés. J'en ai compté plus de 30, qui,

tout en faisant avancer la résolution de l'énigme ou en traitant certaines variantes, n'en sont pas venus à bout. L'affirmation que « Toute courbe fermée simple contient les quatre coins d'au moins un carré » reste, aujourd'hui encore, une conjecture.

L'énigme est liée au problème concernant le positionnement d'une table sur un monticule. Considérons un terrain bombé, une petite colline, assez régulier pour qu'on puisse l'assimiler à une surface continue. Chaque ligne de niveau est une courbe fermée simple ou la juxtaposition de plusieurs courbes fermées simples. Si la conjecture est vraie ou si les courbes mises en jeu sont suffisamment régulières pour entrer dans la classe des courbes pour laquelle la conjecture est prouvée (voir plus loin), alors sur chacune d'elles, il existe quatre points formant les sommets d'un carré, où l'on peut placer les pieds d'une table carrée ayant des pieds de même hauteur et supposés très fins et assez longs.

Pique-nique sur une colline

À chaque niveau possible, on pourra ainsi poser une table carrée au moins dans une position stable et parfaitement horizontale. Notons toutefois que, pour un niveau donné, la table sera imposée et il faudra donc la fabriquer exprès pour que l'écartement entre les pieds soit le bon, c'est-à-dire égal au côté du carré inscrit sur la courbe de niveau choisie. Heureusement, si la surface du

monticule est assez régulière, le côté du carré inscrit variera de manière continue en parcourant les lignes de niveau, et on aura donc le résultat plus intéressant en pratique : toute table à base carrée donnée et assez haute, dont les pieds ne sont pas trop écartés, pourra être placée horizontalement et d'une façon stable sur le monticule où l'on souhaite pique-niquer.

Revenons au problème initial d'un carré ayant ses quatre coins sur une courbe. Précisons que nous dirons « inscrit sur la courbe » même si d'autres intersections du carré avec la courbe se produisent et que celui-ci sort donc de la zone intérieure délimitée par la courbe. Pour expliquer la situation et la multitude de résultats démontrés autour de la conjecture de Toeplitz, il faut faire un effort de rigueur et nous formulerons quelques définitions.

Une courbe fermée simple C du plan est l'ensemble des points $C(t)$ du plan quand t varie dans l'intervalle des nombres réels compris entre 0 et 1 tel que $C(t)$ soit une fonction continue qui ne prend pas deux fois la même valeur (la courbe ne se coupe pas) sauf en $t = 0$ et en $t = 1$ (la courbe revient à son point de départ).

La propriété d'être continue fait que la courbe C se dessine sans avoir à lever la craie. Cette condition de continuité ne garantit pas que la courbe C soit totalement lisse. Elle peut avoir des angles et, par exemple, un triangle équilatéral ou un polygone quelconque (non croisé) est une courbe fermée simple. Les points où la courbe fermée

simple n'admet pas de tangente (il y en a trois pour le triangle) peuvent être tous les points de la courbe : tel est le cas des courbes fractales comme le flocon de von Koch qui ne possède de tangente en aucun point. Cette courbe dont la longueur est infinie est une courbe fermée simple (voir la figure 3). Bien sûr, il peut y avoir plusieurs carrés inscrits et, pour chaque entier positif n , on connaît des exemples de courbes possédant exactement n carrés inscrits (nous y reviendrons).

Des cas particuliers démontrés

La conjecture n'a pas été prouvée dans le cas général, mais un grand nombre de cas particuliers ont été traités.

- La conjecture est démontrée si la courbe possède une tangente en tout point et si cette dernière varie continûment quand le point glisse sur la courbe, c'est-à-dire si la courbe est parfaitement lisse comme un cercle ou une ellipse.

- La conjecture est démontrée si la courbe délimite une zone intérieure convexe, c'est-à-dire telle que si A et B sont deux points de la zone intérieure, alors le segment AB est entièrement contenu dans la zone intérieure.

- La conjecture est démontrée si la courbe est dotée d'un centre de symétrie ou d'un axe de symétrie.

L'un des résultats les plus puissants concernant la conjecture a été démontré en 1989 par Walter Stromquist, du *Swarthmore College* aux États-Unis. Il indique que la conjecture est vraie pour toute courbe « localement monotone ». La propriété d'être localement monotone signifie en gros que la courbe ne fait pas de zigzag à toute échelle (voir la figure 2) : elle peut en faire un peu, mais les zigzags ne doivent pas s'accumuler en un point. Ce résultat permet de traiter le cas de tous les polygones et de toutes les courbes fermées obtenues en collant un nombre fini de bouts de droites, d'arcs de cercles, d'ellipses, de sinusoides, etc. Toutes les courbes que vous tracerez à la craie entrent dans le champ du théorème de Stromquist !

1. Carré inscrit et table sur un monticule

La conjecture de Toeplitz est l'affirmation, toujours sans démonstration en 2012, que toute courbe fermée simple (une boucle ne se coupant pas) contient quatre points formant les sommets d'un carré (a), que l'on dénomme « carré inscrit ».

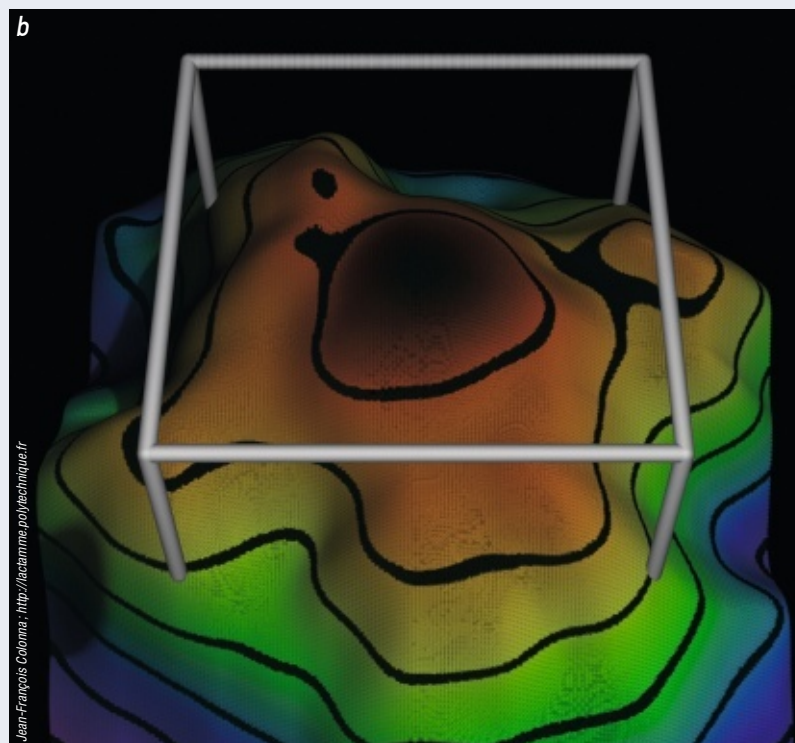
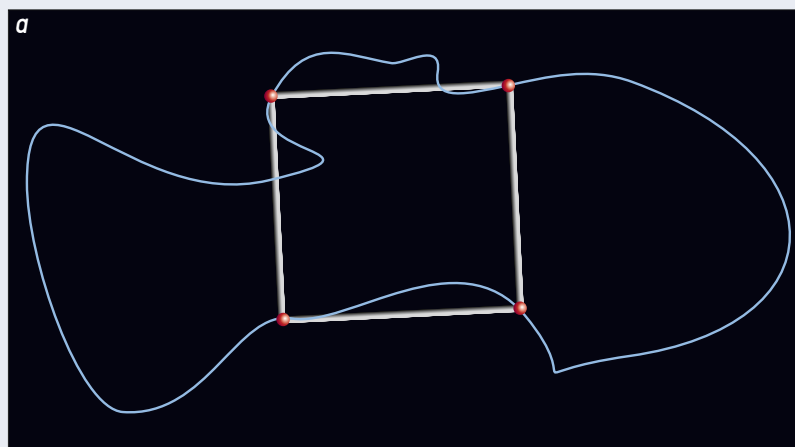
Le problème de la table carrée sur un monticule (b) est

un problème du même type à trois dimensions : peut-on placer horizontalement une table pour qu'elle soit stable, c'est-à-dire telle que les quatre pieds (chacun de même longueur et infiniment fins, formant un carré) touchent la surface ?

Le théorème de la table de Roger Fenn indique les

conditions sur la surface du monticule qui assurent que toute table à base carrée pas trop grande pourra être convenablement posée.

Ce théorème totalement démontré contourne la conjecture de Toeplitz toujours incertaine. Nous voilà rassurés pour notre prochain pique-nique.



Jean-François Colonna - <http://laclanma.polytechnique.fr>

2. La conjecture de Toeplitz est presque démontrée

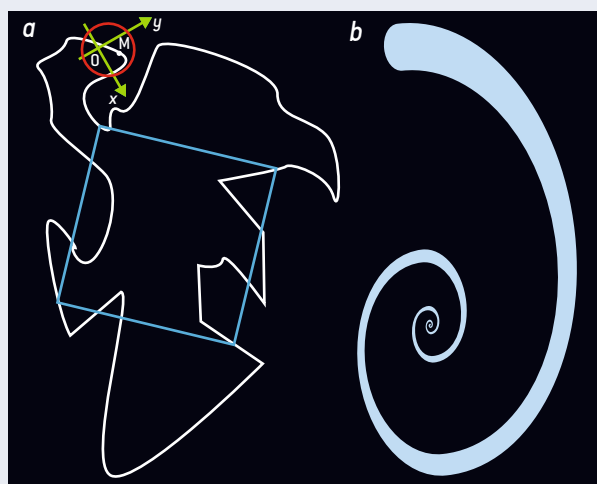
Walter Stromquist a démontré en 1989 que si une courbe fermée simple du plan est *localement monotone*, alors elle possède nécessairement un carré inscrit.

Par définition, pour qu'une courbe soit localement monotone (a), on doit pouvoir associer, à chaque point M de la courbe, un système d'axes Oxy de façon qu'un petit morceau de la courbe autour de M soit tel que deux points de ce bout de courbe ne sont jamais sur une droite parallèle à l'axe Oy.

À l'exception des courbes fractales et de quelques courbes

bizarres, toutes les courbes envisagées en mathématiques sont localement monotones et donc le théorème de Stromquist démontre de manière presque définitive la conjecture de Toeplitz.

Le problème est qu'on ne sait pas se débarrasser du « presque » ! La courbe fermée simple (b) entourant le domaine en bleu est lisse en tous points, sauf au centre où la condition de monotonie locale n'est pas vérifiée. À moins d'un argument particulier, on ne peut lui appliquer le théorème de Stromquist et on n'est donc pas certain qu'elle possède un carré inscrit.



Malheureusement certaines courbes fractales ne sont pas localement monotones, et la conjecture n'est donc pas démontrée pour cette famille de courbes. On obtient une courbe pour laquelle la conjecture n'est pas prouvée en mettant bout à bout des morceaux de la courbe du flocon de von Koch de façon à obtenir une courbe non symétrique.

Le flocon de von Koch lui-même est un exemple intéressant : sa symétrie assure qu'il comporte au moins un carré inscrit. Une étude graphique empirique de Francesco De Comit , au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille, suggère fortement que le flocon comporte une infinité de carrés inscrits, mais pour l'instant le résultat n'est pas établi rigoureusement (voir la figure 3).

Errare humanum est...

Certaines erreurs sont des pièges dans lesquels nous sommes irrésistiblement attirés. Un joli piège est à l'origine de plusieurs résultats faux, heureusement repérés depuis leur publication. Une idée naturelle pour démontrer le cas général consiste à approcher une courbe fermée simple C par une suite $C_0, C_1, C_2, \dots$ de courbes régulières (par exemple des polygones) pour lesquelles on sait qu'il y a un carré inscrit. Partant de cette

suite de carrés [qui n'est pas nécessairement convergente], on sait en extraire une suite convergente de carrés (on ne retient que certains des carrés de la suite). Le fait que les courbes C_i convergent vers C assure que le carré limite de la suite convergente extraite est un carré inscrit dans C .

La conjecture est-elle démontrée ? Hélas non, car, sauf argument supplémentaire, rien n'interdit à la suite extraite de carrés de converger vers un carré... de côté nul.  videmment, cela n'a aucun intérêt, car même si on ne l'a pas précisé dans l'énoncé de la conjecture, il est clair qu'on a exclu le cas des carrés inscrits réduits à un seul point. De nombreuses tentatives de démonstration de la conjecture de Toeplitz et plusieurs démonstrations de cas particuliers exploitent l'idée ici décrite en s'arrangeant pour que le carré limite ne se réduise pas à un point.

La situation aujourd'hui est donc indéterminée, et il n'est pas exclu que les courbes fermées simples du plan qui contiennent les quatre coins d'un carré constituent un sous-ensemble « maigre » de l'ensemble de toutes les courbes fermées simples. La notion de « sous-ensemble maigre » (allez voir la définition de Wikipédia...) exprime l'idée de rareté dans le contexte topologique des ensembles de courbes continues. Elle

a une certaine analogie avec le fait que les nombres rationnels (rapports de deux entiers) sont rares dans l'ensemble des nombres réels. Il est amusant de constater que les cas pour lesquels on a démontré la conjecture recouvrent la grande majorité des courbes que les mathématiciens envisagent, mais que cette partie pourrait malgré tout être infime (« maigre »).

L'apparente contradiction tient à ce que les mathématiciens étudient en priorité les courbes régulières et que celles-ci ne sont pas représentatives des courbes qu'on rencontrerait si on les choisissait au hasard.

La situation est assez analogue à celle des nombres réels calculables, nombres pour lesquels il existe un algorithme qui en énumère indéfiniment les décimales. Les nombres calculables constituent une partie infime des nombres réels (c'est un ensemble qui a autant d'éléments qu'il y a d'entiers, alors qu'il y a plus de nombres réels que d'entiers), ce qui n'empêche pas qu'il a fallu attendre Alan Turing pour réaliser en 1936 qu'il existait des nombres non calculables et en désigner un !

  défaut de faire avancer directement l'énigme récalcitrante de Toeplitz, on tente de comprendre ce qui se passe dans des situations mathématiques proches. Que dire des rectangles, des triangles, des losanges ?

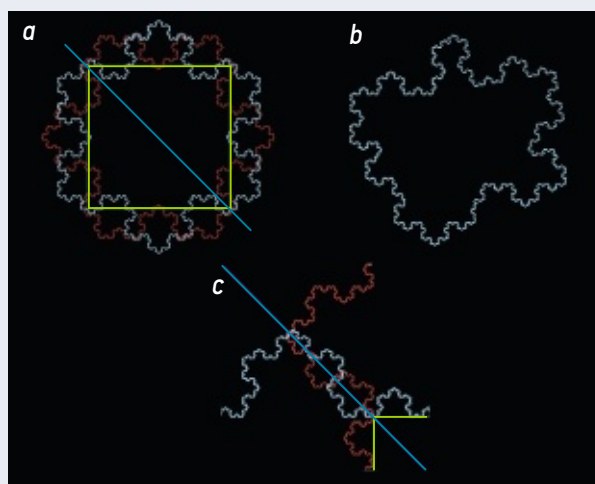
3. Le cas symétrique et la courbe de von Koch

Si une courbe fermée simple du plan possède un centre de symétrie, alors elle possède un carré inscrit : en superposant la courbe à une copie tournée de 90° , on obtient une figure invariante par rotation de 90° . Les points communs à la courbe initiale et à sa version tournée de 90° sont les sommets d'un carré inscrit (a).

Le flocon de von Koch n'est pas localement monotone et le résultat de Stromquist ne s'applique pas. Toutefois, il possède un centre de symétrie et donc un carré inscrit. La figure (b) a été obtenue en recollant des bouts de courbes prises sur

le flocon de von Koch de manière à éviter toute symétrie : on obtient une figure qu'aucun des théorèmes connus ne permet de traiter : cette figure ne possède peut-être aucun carré inscrit.

La figure (c) montre la partie de l'image (a) où le flocon de von Koch rencontre sa version tournée de 90° . Chaque point de rencontre détermine un carré inscrit. On est persuadé qu'il y a un nombre infini de points d'intersection, et donc de carrés inscrits. Ce travail empirique réalisé par Francesco De Comitè n'a pour l'instant pas été confirmé par une démonstration.



Que deviennent ces questions quand on passe du plan à l'espace ? Que deviennent ces questions en géométrie discrète où l'on envisage des courbes composées de pixels en nombre fini (seules courbes que l'informatique considère) ?

Remplacer le carré par un rectangle, un triangle, un losange

Commençons par rendre le problème plus facile en remplaçant le carré recherché par un rectangle. Cette version a été résolue par Herbert Vaughan en 1977 : toute courbe fermée simple du plan contient au moins un rectangle inscrit. Cette propriété est démontrée en quelques lignes.

Et dans l'espace à trois dimensions, une courbe fermée simple contient-elle toujours un rectangle inscrit ? Non, un contre-exemple a montré qu'il existe des courbes de l'espace ne possédant aucun rectangle inscrit (et donc aucun carré inscrit). Un résultat de 1995, positif cette fois, de Mark Nielsen et S. Wright établit que dans l'espace, toute courbe fermée simple symétrique par rapport à un plan ou symétrique par rapport à un point possède un rectangle inscrit.

Et pour les triangles ? La réponse est catégorique : toute courbe fermée simple du plan possède au moins un triangle équilatéral inscrit.

Ce résultat se généralise à un triangle quelconque : si T est un triangle fixé, et que C est une courbe fermée simple du plan, alors C contient au moins les trois sommets d'un triangle semblable à T . En fait, M. Nielsen a indiqué en 1992 qu'il existe une infinité de points de la courbe qui sont sommets d'un triangle semblable à T inscrit dans C et que ces points forment un sous-ensemble dense de la courbe : entre deux points différents de la courbe, aussi proches soient-ils, il existe toujours un point P sommet d'un triangle semblable à T inscrit dans C .

Pour les losanges et donc aussi pour les parallélogrammes, c'est encore bon : toute courbe fermée simple du plan contient au moins un losange inscrit.

Le théorème de M. Nielsen qui établit ce résultat montre de plus que, si une direction est fixée, on peut demander au losange recherché d'avoir deux de ses côtés parallèles à cette direction. V. Makleev, de l'Université de Saint-Petersbourg, a établi en 2004 que le résultat était encore vrai dans l'espace (sans, cette fois, que l'on puisse imposer à certains côtés du losange d'être parallèles à une direction donnée).

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

4. Quatre petits problèmes

• Existe-t-il des courbes fermées simples du plan qui possèdent des carrés inscrits passant par chacun de leurs points ?

Un cercle et un carré ont bien sûr cette propriété. De nombreuses autres courbes fermées possèdent cette propriété (dont toutes les courbes invariantes par une rotation de 90°). Francesco De Comit  a dessiné les figures *a*, *b*, *c*, *d*.

• Trouver une courbe fermée simple du plan n'ayant qu'un seul carré inscrit.

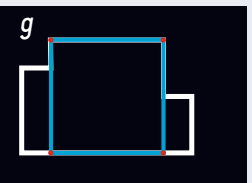
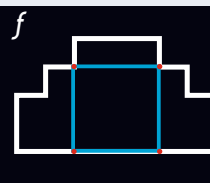
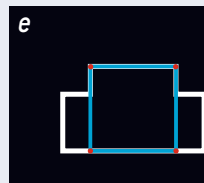
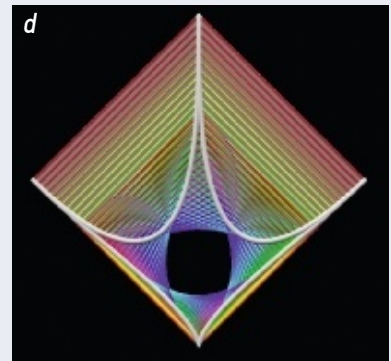
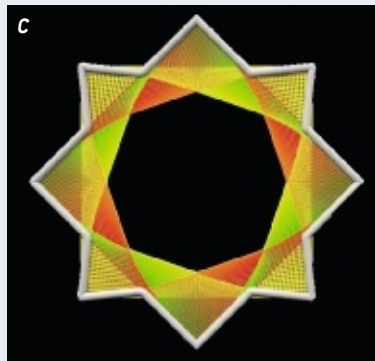
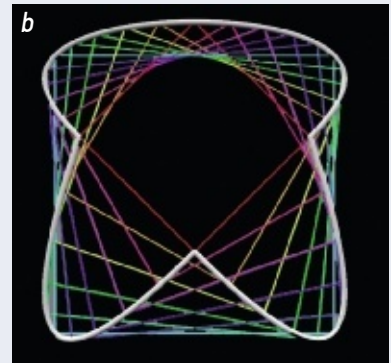
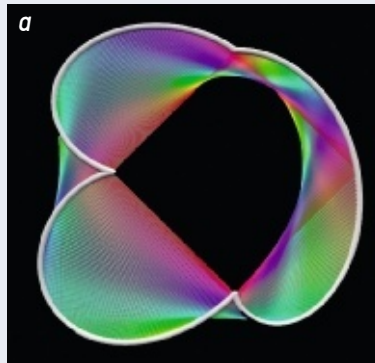
Solution : voir les figures *e*, *f*, *g*.

• Toute courbe fermée simple du plan contient-elle les sommets d'un pentagone régulier inscrit ? [Autrement dit, la conjecture de Toeplitz avec les carrés se généralise-t-elle avec les pentagones ?]

Non. Un triangle équilatéral, à cause des problèmes créés par les angles, ne peut pas contenir les cinq points d'un pentagone régulier. De la même façon, une courbe fermée simple du plan ne contient pas toujours un polygone régulier de plus de cinq côtés.

• Tout point *P* donné d'une courbe fermée simple *C* est-il le sommet d'un triangle équilatéral inscrit dans *C* ?

Non. Soit *C* un triangle isocèle dont l'angle au sommet est inférieur à 120° . Ce sommet *P* ne peut pas être le sommet d'un triangle équilatéral inscrit dans *C*.



5. Les courbes informatiques

Les différents pixels d'une courbe (assimilés à des petits carrés sur un quadrillage) forment une chaîne de voisins.

Dans le cas des courbes fines, le mot « voisins » signifie « avoir au moins *un point* en commun ». Pour les courbes épaisses, deux

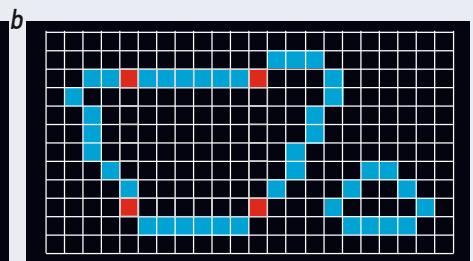
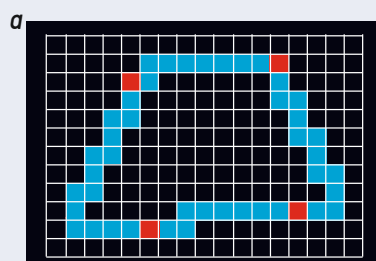
pixels voisins de la courbe doivent avoir au moins *un côté* en commun.

Pour éviter les recouvrements et imposer le retour au pixel de départ (courbe fermée simple), on ajoute dans les deux cas que chaque pixel possède deux voisins exactement. Le problème du

carré inscrit dans le monde discret des pixels est alors clairement posé... et a été résolu en 2011 :

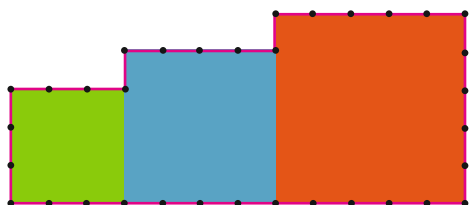
- toute courbe épaisse fermée simple possède au moins un carré inscrit (*a*) ;
- il existe des courbes fines fermées simples qui n'ont pas de carré inscrit (*b*).

Dans une courbe «  paisse », deux pixels voisins ont au moins un côté en commun (*a*).
Dans une courbe « fine », deux pixels voisins ont au moins un point en commun (*b*, deux exemples d'une telle courbe). Les propriétés de ces courbes vis-à-vis des carrés inscrits sont différentes.



Un carré est constitué de deux paires de côtés opposés parallèles et ses deux diagonales ont même longueur. Une généralisation du carré dans l'espace est le quadrilatère ayant ses quatre côtés égaux ainsi que ses deux diagonales, que nous nommerons « le quasi-carré ». Jason Cantarella et John McCleary, aux États-Unis, ont démontré que toute courbe fermée simple assez régulière de l'espace à trois dimensions possède un tel quasi-carré inscrit. « Assez régulière » signifie que la courbe est non seulement continue, mais qu'elle a une tangente en chaque point, tangente qui varie continûment quand le point de tangence glisse le long de la courbe.

Les carrés inscrits peuvent-ils être nombreux ? Peut-il par exemple y en avoir cinq, ni plus ni moins ? Là encore, bien que les résultats soient récents, on n'a pas rencontré d'obstacles majeurs. Pour tout entier strictement positif n , il existe une courbe fermée simple du plan qui possède exactement n carrés inscrits. Le résultat a été démontré en 2008 par Strashimir Popvassilev, au *City College* de New York, qui a pu établir qu'on peut imposer de plus à la courbe d'être indéfiniment différentiable (c'est-à-dire parfaitement lisse) et même qu'on peut avoir exactement n carrés inscrits en imposant à la courbe de délimiter une zone intérieure convexe. Le théorème est patent pour les polygones, comme le montre la figure ci-dessous qui résout le cas $n = 3$ et qui se généralise de façon évidente.



Le nombre de carrés inscrits sera fréquemment impair. En effet, si la courbe fermée simple est un polygone n'ayant rien de particulier, deux de ses côtés ne sont jamais parallèles ni orthogonaux, ou si la courbe fermée simple est extrêmement lisse, définie par des fonctions analytiques, alors le nombre de carrés inscrits est infini ou impair.

Par ailleurs, le mathématicien japonais Shizuo Kakutani a démontré en 1942 que

tout volume convexe de l'espace peut être enfermé dans un cube exinscrit dont chaque face touchera le volume. Notons enfin qu'un théorème de l'Anglais Roger Fenn a réglé en 1970 le problème de la table évoqué au début de l'article. Si la fonction continue définissant le monticule est positive sur un ensemble convexe et nulle ailleurs, alors toute table carrée pas trop grande pourra être convenablement posée sur le monticule.

Carrés inscrits sur courbes pixellisées

Les travaux de Feliú Sagols et Raúl Marín, de l'Institut polytechnique national du Mexique, auront peut-être des applications puisqu'ils concernent les figures dessinées avec des pixels et que des algorithmes de calculs des carrés inscrits ont été proposés.

Le plan discret n'est qu'un tableau de cases carrées, les pixels, constituant un grand quadrillage. Deux notions de courbes discrètes sont naturelles : les courbes fines et les courbes épaisses (voir la figure 5). Le problème du carré inscrit se pose dans ce contexte : toute courbe épaisse fermée simple contient les quatre coins d'un carré et il existe des courbes fines fermées simples qui ne contiennent aucun carré inscrit (jamais quatre de leurs pixels ne sont les quatre coins d'un carré).

La démonstration du résultat positif concernant les courbes épaisses n'est pas aussi simple qu'on l'imagine. Cela montre une fois encore que bien des problèmes du continu ont des traductions intéressantes dans le monde du fini des pixels et de l'informatique.

Le monde mathématique est étrange et certains passages semblent interdits. Même dans des domaines élémentaires (comme celui des courbes fermées simples du plan) pour lesquels on s'imaginait bien armé par les outils de l'analyse et de la géométrie, on butte sur des obstacles durs comme le diamant. Rien ne nous permet de reconnaître ces problèmes difficiles avant qu'on ne se cogne à eux et ils semblent surgir au hasard. Ils s'amusent à humilier une communauté vieille de plus de trois millénaires !

BIBLIOGRAPHIE

B. Matschke, *Equivariant topology methods in discrete geometry*, Thèse de l'Univ. de Berlin, 2011.

J. Cottanceau, *La randonnée du carré*, Blog « Choux romanesco, Vache qui rit et intégrales curvilignes », 2011 : <http://eljjdx.canalblog.com/archives/2011/03/20/20671768.html>

I. Pak, *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*, 2010. <http://www.math.ucla.edu/~pak/geopol8.pdf>

F. Sagols et R. Marín, *Two discrete versions of the Inscribed Square Conjecture and some related problems*, *Theoretical Computer Science*, vol. 412, pp. 1301-1312, 2011.

M. Nielsen, *Rhombi inscribed in simple closed curves*, *Geometriae Dedicata*, vol. 54, pp. 245-254, 1995.

M. Nielsen, *Triangles inscribed in simple closed curves*, *Geometriae Dedicata*, vol. 43, pp. 291-297, 1992.

V. Klee et S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, 1991.

W. Stromquist, *Inscribed squares and square-like quadrilaterals in closed curves*, *Mathematika*, vol. 36, pp. 187-197, 1989.

R. Fenn, *The table theorem*, *Bull. London Math. Soc.*, vol. 2, pp. 73-76, 1970.

O. Toeplitz, *Ueber einige Aufgaben der Analysis situs*, *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn*, vol. 4, p. 197, 1911.

 ART & SCIENCE

Vermeer, la carte et le castor

Dans L'Officier et la jeune fille riante, un homme porte un chapeau en feutre de castor, matériau précieux dont la confection a participé à la disparition des espèces européennes. À l'arrière-plan, une carte intrigue...

Loïc MANGIN

Pays-Bas, vers 1658. Les Provinces-Unies (l'ancien nom des Pays-Bas) ont déclaré leur indépendance vis-à-vis du trône d'Espagne depuis près de 80 ans, et elle est quasi effective en 1609. Les combats cessent définitivement en 1648 et les militaires, de retour à la vie civile, ont tout loisir de conter fleurette. En 1658 donc, c'est un tel épisode que peint Johannes Vermeer (1632-1675) dans *L'Officier et la jeune fille riante* (voir page ci-contre), une toile conservée à New York.

De dos, un militaire vêtu d'un uniforme rouge éclatant et d'un grand chapeau noir, sur lequel nous reviendrons, disserte avec la jeune fille qui le reçoit et dont il espère sans doute les faveurs. Précisons que l'habitude de se découvrir en présence d'une demoiselle n'était pas encore adoptée. Sur le mur, au fond, une carte étonne.

Elle est intitulée *La Topographie nouvelle et très exacte de toute la Hollande et de la Frise occidentale*. Elle représente la partie occidentale, donnant sur la mer, des nouvelles Provinces-Unies (la Hollande et la Frise en sont deux), l'Ouest étant au sommet de la carte. Cette orientation reflétait les préoccupations majeures de l'époque : les Provinces-Unies sont « tournées » vers la mer du Nord, le large, ce qui est naturel pour un peuple de marins qui a conquis le monde. On retrouve cette carte dans d'autres œuvres de Vermeer, telle *La Femme en bleu lisant une lettre*.

On constate également que les terres sont en bleu et les mers en marron. Pourquoi Vermeer a-t-il interverti les couleurs ? On l'ignore, mais Timothy Brook, historien à l'Université

d'Oxford, s'interroge : le peintre fait-il allusion au changement de prestige des militaires dû au retour de la paix ?

Venons-en au chapeau. À cette époque, au milieu du XVII^e siècle, tous les Hollandais en portaient, du simple bonnet mou, nommé *klapmuts*, au plus prestigieux couvre-chef tel celui porté par l'officier. L'objet était en feutre, une étoffe constituée de poils agglomérés d'animaux, ici du castor. Le feutre de castor était le matériau à la mode et tout individu de haut statut social se devait d'avoir un chapeau fabriqué en cette matière.

La folie des chapeliers aurait résulté des vapeurs toxiques de mercure.

La matière première nécessaire à la fabrication de ce feutre n'est pas la fourrure entière de l'animal, mais le sous-poil (des poils courts et denses distincts des poils longs). En effet, au microscope, on observe des écailles (des arpillons) qui se chevauchent sur toute la surface de ces fibres. Ces aspérités favorisent l'agglomération et donc le feutrage. De fait, le feutre de castor est résistant, flexible et il garde sa forme même mouillé.

Les chapeliers faisaient mijoter ce sous-poil dans un mélange d'acétate de cuivre, de gomme arabique et de mercure afin d'obtenir, après foulage et séchage, un feutre d'excellente qualité dédié à la fabrication des meilleurs chapeaux. Notons que la folie souvent

attribuée aux chapeliers résultait probablement des vapeurs toxiques de la mixture.

Jusqu'au XV^e siècle, on utilisait des castors d'Europe occidentale, mais l'animal fut victime de son succès et de la disparition de son habitat naturel. On se tourna alors vers les castors scandinaves, mais les mêmes causes eurent les mêmes effets, et ce fut la fin des chapeaux en castor.

Au XVI^e siècle, les chapeliers n'eurent plus à leur disposition que le feutre de laine, un matériau plus grossier. On ajoutait parfois des poils de lapin, pour faciliter l'agglomération, mais le feutre obtenu était fragile. Enfin, le feutre de laine absorbe l'eau et se déforme dès qu'il est mouillé, à l'inverse du feutre de castor. Le *klapmuts* des Hollandais de basse condition était en feutre de laine.

La situation changea à la fin du XVI^e siècle quand se développa le commerce avec les Amérindiens. Le Français Samuel de Champlain (1567-1635) fut l'un des précurseurs de ce marché. Dans les années 1580, quand les premières peaux arrivèrent en Europe, la demande explosa et ce fut le renouveau des chapeaux en castor. Ces articles se vendaient à prix d'or, à un point tel que l'on vit s'épanouir un marché du « castor d'occasion ». Ces pratiques furent néanmoins vite contrôlées par les autorités qui redoutaient les maladies dues aux poux.

Vermeer, qui jouissait d'un poste prestigieux dans la cité de Delft, avait sans doute lui aussi un chapeau en feutre de castor. Peut-être même est-ce celui qui est peint ! ■

T. Brook, *Le chapeau de Vermeer*. Le XVII^e siècle à l'aube de la mondialisation, Payot, 2010.