



Réf. 004900

Éditions Belin/Pour la Science 2009

224 pages – 25,90 euros – ISBN 978-2-7011-4900-4

L'astronomie des Anciens

Yaël Nazé

Dans cet ouvrage richement illustré, l'auteur nous invite à un voyage passionnant aux origines de l'astronomie. Une incroyable histoire au cœur des civilisations les plus anciennes.

Ce que disent les minéraux



Réf. 004729

Éditions Belin/Pour la Science 2008

160 pages – 23,85 euros – ISBN 978-2-7011-4729-1

Patrick Cordier et Hugues Leroux

À la surface de la Terre, dans le Système solaire, aux confins de l'Univers, dans le tréfonds de notre planète, les auteurs nous invitent à écouter le message des minéraux. Un livre étonnant pour un fabuleux voyage avec les minéraux.



Réf. 075105

La physique buissonnière

Jean-Michel Courty et Édouard Kierlik

Une plante plus rapide qu'une mouche, un tuyau qui parle, une cape qui rend invisible, etc. La nature est pleine de surprises pour qui veut bien s'aventurer hors des sentiers battus. Passionnés de physique, les auteurs vous invitent à une promenade sur des chemins de traverse pour comprendre cette physique du quotidien.

Éditions Belin/Pour la Science 2009

160 pages – 22,35 euros – ISBN 978-2-8424-5105-9

Atmosphère, océan et climat

R. Delmas, S. Chauzy, J.-M. Verstraete et H. Ferré

Ce livre a l'ambition d'expliquer de façon simple mais précise le fonctionnement de l'atmosphère, de l'océan et leur interaction, afin d'amener le lecteur à comprendre les enjeux et les incertitudes concernant l'évolution du climat.

Éditions Belin/Pour la Science 2007

288 pages – 30,45 euros – ISBN 978-2-7011-4508-2



Réf. 004508

Panorama de la physique

Sous la direction de Gilbert Pietryk

Ce livre dresse un panorama de la physique moderne des années 1950 jusqu'aux résultats les plus récents, à travers 150 sujets, chacun traité sur une double page illustrée. Une référence indispensable.

Éditions Belin/Pour la Science 2007

304 pages – 27,90 euros – ISBN 978-2-7011-3972-2



Réf. 003972

LA SÉLECTION POUR LA SCIENCE C'EST AUSSI...

Pourquoi aime-t-on la musique ?

Silvia Bencivelli

Éditions Belin/Pour la Science 2009

144 pages – 18,90 euros
ISBN 978-2-7011-4938-7
Réf. 004938



Cerveau, drogues et dépendances

Lucas Salomon

Éditions Belin/Pour la Science 2010

144 pages – 23,50 euros
ISBN 978-2-7011-5113-7
Réf. 005113



Maux d'artistes

Sebastian Dieguez

Éditions Belin/Pour la Science 2010

176 pages – 25,40 euros
ISBN 978-2-8424-5101-1
Réf. 075101



Pour commander ces ouvrages www.pourlascience.fr/librairie *

ou en renvoyant le bon de commande ci-dessous.

BON DE COMMANDE

à retourner accompagné de votre règlement à : Groupe Pour la Science • 628 avenue du Grain d'Or • 41350 Vineuil • Tél. : 0 808 655 255 • e-mail : pourlascience@audin.fr

☐ Oui, je commande les livres présentés dans la sélection de *Pour la Science*. Je reporte les titres, prix et références à 6 chiffres correspondant aux ouvrages choisis :

Titre	Réf.	Prix
	_____	€
	_____	€
	_____	€
	_____	€
	_____	€
Frais de port (4,90 € France – 12 € étranger)	+	€
Total à régler	=	€

J'indique mes coordonnées :

Nom : _____

Prénom : _____

Adresse : _____

C.P. : _____ Ville : _____

Pays : _____ Tél.* : _____

E-mail* : _____

*pour recevoir la newsletter Pour la Science (à remplir en majuscules).

Je choisis mon mode de règlement :

☐ par chèque à l'ordre de *Pour la Science*

☐ par carte bancaire

Numéro _____

Date d'expiration _____

Cryptogramme _____

Signature obligatoire

Belin
ÉDITEUR INDÉPENDANT
DEPUIS 1777



En application de l'article 27 de la loi du 6 janvier 1978, les informations ci-dessus sont indispensables au traitement de votre commande. Elles peuvent donner lieu à l'exercice du droit d'accès et de rectification auprès du groupe Pour la Science. Par notre intermédiaire, vous pouvez être amené à recevoir des propositions d'organismes partenaires. En cas de refus de votre part, merci de cocher la case ci-contre ☐.

DPL414

HISTOIRE DES SCIENCES

Le mystérieux abaque de Gerbert d'Aurillac

Au X^e siècle, un jeune moine français inventa un abaque qui, pour la première fois, permettait d'effectuer des divisions. Alors qu'en Occident, on énumérait en chiffres romains, il utilisa une numérotation très proche des chiffres arabes.

Alain SCHÄRLIG

Calculer au X^e siècle n'était pas une mince affaire. Les nombres étant notés en chiffres romains, il était impossible de poser une opération par écrit. Essayez d'additionner DCCCLXXVI et CCCLXXXVII (qui s'écrivaient d'ailleurs dcccclxxvj et ccclxxxvij, en cursives liées, voir la figure 2, partie haute) ! Aussi employait-on une représentation physique des nombres sous forme de jetons identiques disposés sur des lignes parallèles tracées sur une table (voir la figure 4). Nommées abaque, ces lignes constituaient, avec les jetons, la machine à calculer de l'époque. On y lisait les résultats, qu'on écrivait ensuite, par exemple, sur une feuille de compte.

Effectuer une addition à l'aide d'un abaque était relativement aisé (de nos jours, un enfant de dix ans l'apprend facilement) ; la soustraction était plus délicate ; la multiplication demandait un grand nombre de manipulations ; et la division était tout simplement hors de portée.

Pape de l'an mil

C'est alors qu'un moine, Gerbert d'Aurillac, inventa un abaque révolutionnaire – bien plus compliqué, certes, au maniement beaucoup plus lourd, mais qui permettait d'effectuer des divisions. Cette invention resta confinée à quelques monastères. Pourtant, elle aurait dû faire le bonheur des comptables. Surtout, Gerbert y utilisait, pour la première fois en Occident, une notation qui s'imposa deux siècles plus tard comme un système de numération bien pratique pour

les calculs : les chiffres arabes. Pourquoi Gerbert éprouva-t-il le besoin de construire un tel abaque ? Comment fonctionnait-il ? Quelle inspiration guida Gerbert ? Pourquoi ne poussa-t-il pas plus loin ses réflexions sur les chiffres arabes, jusqu'à présenter lui-même le système de numération qu'ils sous-

tendent ? Telles sont les questions auxquelles nous allons essayer de répondre.

Gerbert d'Aurillac est surtout connu pour la fonction qu'il occupa de 999 à 1003, date de son décès : il fut le premier pape français, sous le nom de Sylvestre II. Suite au décès subit du pape Grégoire V, l'empereur du Saint empire romain germanique dont il était le protégé, Othon III, l'avait fait nommer au poste suprême de l'Église catholique. Il était alors archevêque de Ravenne, en Italie, depuis un an, et avait tout juste 50 ans. Mais Gerbert était aussi un savant, réputé en Europe pour ses connaissances en astronomie, et un enseignant novateur de cette discipline.

Né dans une famille modeste peu avant 950, il était entré comme oblat, c'est-à-dire comme enfant offert, au monastère Saint-Géraud, à Aurillac dans le Massif central, où il était devenu moine bénédictin. À l'instigation de son abbé, qui espérait sans doute le voir revenir instruit et capable de dispenser un enseignement supérieur, il avait séjourné en Catalogne de 967 à 970 sous la protection du comte de Barcelone Borrell II, qui l'avait confié à Hatton, évêque de Vich, une commune voisine de Barcelone. Hatton était réputé très savant dans les quatre disciplines du *quadrivium*, la seconde partie de l'enseignement des « arts », qui comportait l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie et la musique. Gerbert avait déjà suivi à Aurillac la première partie de l'enseignement, le *trivium*, qui comportait la grammaire, la rhétorique et la dialectique.



1. LA STATUE DE GERBERT à Aurillac, érigée dans les années 1850 en l'honneur du pape de l'an mil. La tiare papale à trois niveaux est un anachronisme : les papes ne l'ont portée qu'à partir du XIV^e siècle.

Nolege / Wikimedia Commons

ij. tb. xij. B. iij. d.

En 970, Gerbert, âgé d'une vingtaine d'années, avait accompagné à Rome, sans doute comme secrétaire, le comte Borrell II et Hatton, qui devaient y négocier auprès du pape l'avenir de l'Église catalane. Il y était resté à la demande d'Othon I^{er}, empereur du Saint empire romain germanique, et avec l'autorisation du pape. Il y avait acquis une réputation de savant, donnant même des leçons au futur Othon II, fils d'Othon I^{er} (et futur père d'Othon III qui, nous l'avons vu, devint le protecteur de Gerbert). De retour en France en 972, Gerbert s'était rendu à Reims, où il était devenu écolâtre à l'école cathédrale, c'est-à-dire professeur d'université avant la lettre. Il y enseignait *trivium* et *quadrivium*. Et dans ce dernier domaine, il donnait une forte prépondérance à l'astronomie... et au calcul.

Un écolâtre érudit

Il semble que Gerbert avait des connaissances en astronomie bien plus larges que quiconque en France à cette époque. Il savait construire des cadrans solaires et un nocturlabe (un instrument donnant l'heure la nuit en fonction du mouvement des étoiles de la Grande Ourse), et connaissait le mouvement des planètes autour de la Terre et la position des constellations. Il savait en outre rendre la discipline accessible à ses étudiants, notamment en recourant à des modèles qu'il inventait, telles une sphère céleste avec ses parallèles et ses pôles, ou une sphère armillaire, formée d'anneaux et de cercles, que Gerbert



2. CE DESSIN DE L'ABAQUE DE GERBERT tiré d'un manuscrit conservé à Erlangen, en Allemagne, date du XIII^e siècle. Les adjonctions manuscrites n'ont rien à voir avec les jetons de l'abaque ; elles sont l'œuvre d'un « compilateur » qui voulait faire croire que l'abaque était une invention de Boèce, un auteur latin du VI^e siècle. On reconnaît en haut, de droite à gauche, les chiffres arabes de 1 à 9 en usage à l'époque en Europe. Le cercle avec un triangle n'est pas un zéro, mais un *sipos*, qui marque une position au cours d'un calcul. En dessous, on lit, en chiffres romains, les valeurs respectives des colonnes (unités I, dizaines X, centaines C, etc.) et aux lignes suivantes la moitié, le quart et le huitième de ces valeurs. Le texte au-dessus de ce document est extrait des comptes de Thounne, en Suisse (XV^e siècle). On y lit 2 livres, 13 sous et 4 deniers en chiffres romains cursifs.

avait pourvue d'un mécanisme lui permettant de faire comprendre le mouvement des planètes.

C'est dans ce cadre que Gerbert enseigna les règles de multiplication et de division sur son abaque, afin, explique-t-il dans une lettre adressée à un ami vers 980, que ces opérations puissent être utilisées « en toute bonne foi dans la théorie et la pratique de la mesure du ciel et de la terre ».

Un abaque pour la division

L'abaque de Gerbert est constitué de colonnes verticales, que nous appellerions décimales, et que l'on dessine en nombre suffisant pour le calcul envisagé : par exemple quatre, si les nombres à traiter vont jusqu'aux milliers. Son originalité tient aux jetons que l'on utilise : ils sont non pas neutres, comme ceux de l'abaque classique, mais marqués chacun d'un chiffre. L'utilisateur dispose

$\bar{C}$	$\bar{X}$	$\bar{I}$	C	X	I
	2		7	1	2
				3	6
				7	2
			3	6	
		8	4		
2	4				
2	4	8	8	3	2

3. UNE MULTIPLICATION SUR L'ABAQUE de Gerbert, tirée d'un exemple de son élève Bernelin : $12 \times 20\,736$. Effacez les colonnes et les cercles représentant les jetons et vous obtiendrez une opération très proche de la multiplication en numération de position telle que nous la réaliserions ; il n'y manque que le zéro de $20\,736$, représenté par un vide dans la colonne des milliers.

de neuf tas de jetons, portant les chiffres de 1 à 9. Et ces chiffres sont arabes, ce qui représente la première apparition de cette notation en Europe. Mais attention : il ne s'agit pour l'instant que d'un marquage. Les chiffres arabes et le zéro n'ont été introduits que beaucoup plus tard – à la fin du XII^e siècle – et, grâce à eux, la numération de position que nous pratiquons encore.

Cette numération est dite de position, car la position de chaque chiffre dans le nombre informe sur son statut : dans 389, par exemple, on lit le 8 comme une quantité de dizaines, parce qu'il est dans la position des dizaines. Or cette notation n'a été possible qu'avec l'apparition des chiffres arabes et, surtout, du zéro (qui permet d'écrire que dans 309, il n'y a pas de dizaines). Alors seulement, on a pu effectuer des calculs par écrit, en alignant par exemple les nombres d'une addition sur leurs chiffres des unités.

Il ne nous est pas parvenu de description, par Gerbert, de l'utilisation de son abaque.

Une division sur l'abaque de Gerbert

Sur l'abaque de Gerbert, la division se fait en plusieurs étapes. En voici un exemple simple adapté du *Livre d'abaque* de son élève Bernelin : la division de 888 par 5. Les jetons qui jouent un rôle à chaque étape sont mis en évidence.

En premier lieu, on pose le problème (a) : on écrit le diviseur, puis le dividende deux fois, d'abord comme témoin (on ne le touchera plus), et en-dessous pour le diminuer à mesure qu'on divise et savoir ce qui reste à diviser. Puis on répond à la question « en

8 combien de fois 5 ? » pour le 8 de la colonne C des centaines (b). La réponse, 1, est placée au bas de la colonne des centaines, et on soustrait 5 du second dividende : il reste 3. La question suivante est plus subtile (c) : « En 3 de la colonne C, combien de fois 5 pour un résultat en colonne X ? » La réponse, 6, est posée sur la colonne X des dizaines, et on enlève le jeton 3, car il n'y a pas de reste.

Cette complication résulte de l'absence du zéro et de l'ignorance de la numération de position : ne

pouvant dire que le nombre formé par 3 de la colonne C du point de vue de la colonne X est 30, le calculateur ancien est réduit à appliquer des « règles » compliquées.

On refait ensuite le même calcul qu'en (b), décalé d'une colonne vers la droite (d) : « En 8 (de la colonne X) combien de fois 5 ? » La réponse, 1, est inscrite au bas de la colonne et on soustrait 5 de ce 8 : il reste 3. On recommence alors le même calcul qu'en (b), décalé d'une colonne vers la droite (e) : « En 3 de

colonne X, combien de fois 5 pour un résultat en colonne I ? » La réponse, 6, est posée en bas de la colonne des I, et le jeton 3 est retiré, car il n'y a pas de reste. Enfin, le même calcul qu'en (d) est effectué, décalé d'une colonne vers la droite (f). La réponse, 1, est placée au bas de la colonne, et le reste, 3, remplace le jeton 8 des unités. Les quotients partiels, en bas de l'abaque, sont additionnés, et on trouve 177, le quotient de la division (g). Le 3 est, quant à lui, le reste de la division.

a

C	X	I
		5
8	8	8
8	8	8

b

C	X	I
		5
8	8	8
3	8	8
1		

c

C	X	I
		5
8	8	8
	8	8
1	6	

d

C	X	I
		5
8	8	8
	3	8
1	6	1

e

C	X	I
		5
8	8	8
		8
1	6	6
	1	

f

C	X	I
		5
8	8	8
		3
1	6	6
	1	1

g

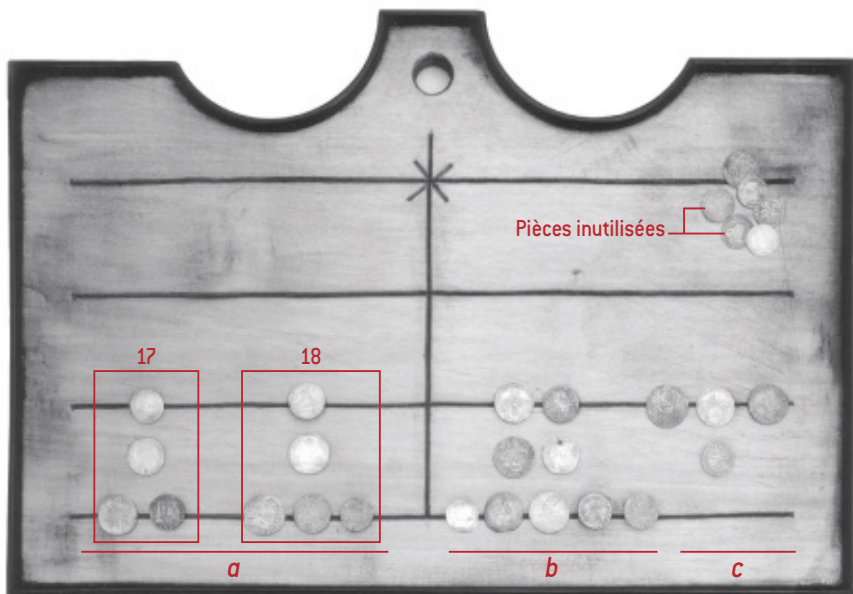
C	X	I
		5
8	8	8
		3
1	7	7

On dispose heureusement du texte de Bernelin, un élève de Gerbert qui a rapporté sa méthode alors que son maître était pape, entre 999 et 1003. Bernelin ne donne qu'une description textuelle de ses divisions, sans aucun dessin. Son texte ressemble ainsi à une suite d'instructions assez absconnes : ne pouvant utiliser le zéro, ni se référer à la numération de position – qu'il connaissait pourtant peut-être, on y reviendra –, Gerbert avait été obligé d'énoncer toute une série de règles, définissant la colonne dans laquelle on place tel jeton en cours de calcul en fonction des colonnes où l'on a lu tel chiffre du dividende et tel autre du diviseur. Néanmoins, on comprend les étapes de la division en se reportant à l'opération telle que nous la pratiquons aujourd'hui (voir la figure 3 et l'encadré page ci-contre).

Un bénéfice de son séjour en Catalogne ?

Un grand mystère entoure le calculateur Gerbert : où a-t-il puisé les idées qui l'ont conduit à son abaque ? Celui-ci n'existait pas chez les Arabes de son temps, et c'est donc une invention personnelle. Mais il présente de telles ressemblances avec notre numération de position, alors déjà connue des Arabes, qu'on peut faire une hypothèse raisonnable : Gerbert en aurait pris connaissance au cours de son séjour en Catalogne, quand il avait une vingtaine d'années. À cette époque, la Catalogne, qui ne portait pas encore son nom, était la partie orientale de la Marche d'Espagne, une bande de terres longeant les Pyrénées que Charlemagne avait conquise aux Arabes à la fin du VIII^e siècle. Le reste de l'Espagne était dominé par les Arabes. Plusieurs historiens pensent que lors de son séjour dans la Marche, Gerbert a été en contact avec la science arabe, sans doute par l'intermédiaire du monastère de Santa Maria à Ripoll, à 40 kilomètres au Nord de Vich, où des moines recopiaient des traductions latines d'ouvrages arabes sur l'astronomie, la géométrie et l'arithmétique.

Mais pourquoi, alors, Gerbert n'aurait-il pas préconisé tout simplement le calcul écrit, que cette numération permettait ? C'est un autre mystère, et une nouvelle



4. SUR CET ABAQUE CLASSIQUE (XV^e siècle), les lignes correspondent, de bas en haut, aux unités, dizaines, centaines et milliers, et les positions intermédiaires aux valeurs 5, 50 et 500. La hauteur à laquelle un jeton est posé détermine la « valeur » qu'il prend momentanément. Les jetons disposés ici représentent les trois étapes d'une addition. Les deux nombres à additionner, 17 et 18 (a), sont rapprochés pour former l'addition (b), puis une réduction du nombre de jetons est effectuée (c) en remplaçant deux jetons intermédiaires valant 5 par un jeton sur la ligne des dizaines, et cinq jetons unifiés par un jeton intermédiaire entre la ligne des unités et celle des dizaines. Le résultat obtenu est trois jetons sur la ligne des dizaines et un jeton intermédiaire valant 5, soit 35.

hypothèse : il était moine et ce qui venait des Arabes était suspect. Il a peut-être craint d'être accusé de sorcellerie ; il aurait alors inventé son abaque comme un moyen terme, entre l'abaque à lignes lié aux chiffres romains et la science arabe qui connaissait la numération de position et le zéro. La question reste entière...

Supplanté par le calcul arabe

L'avenir de l'abaque de Gerbert a été très modeste, pour une raison que le moine ne pouvait pas prévoir. L'engin n'intéressait qu'une élite, les meilleurs calculateurs ; or cette même clientèle s'est jetée sur le nouveau calcul – rendu possible par la numération de position, elle-même fondée sur les chiffres arabes et le zéro – dès qu'il s'est répandu en Europe chrétienne, vers la fin du XII^e siècle. Ces mêmes personnes ont considéré dès lors l'abaque de Gerbert comme trop compliqué par rapport à la division par effacement ou biffage qu'il était désormais facile de réaliser par écrit.

L'AUTEUR

Alain SCHÄRLIG est professeur honoraire de la Faculté des Hautes études commerciales de l'Université de Lausanne, en Suisse.

✓ BIBLIOGRAPHIE

A. Schärli, *Un portrait de Gerbert d'Aurillac. Inventeur d'un abaque, utilisateur précoce des chiffres arabes, et pape de l'an mil*, PPUR, 2011.

A. Schärli, *Du zéro à la virgule, les chiffres arabes à la conquête de l'Europe, 1143-1585*, PPUR, 2010.

A. Schärli, *Compter avec des jetons. Tables à calculer et tables de compte du Moyen Âge à la Révolution*, PPUR, 2003.

B. Bakhouch (éd. et trad.), Bernelin, *Livre d'Abaque*, Princi Négrier, 2000.

LOGIQUE & CALCUL

Pour prouver, tous les moyens sont bons

Les activités mathématiques ne se réduisent pas à la logique formelle. Dessins, petits films, programmes observés, interactions physiques, etc., sont l'occasion de mener des démonstrations aussi rigoureuses que l'écriture minutieuse des preuves formelles.

Jean-Paul DELAHAYE

L'évidence paralyse la démonstration.
Pierre Reverdy (1889-1960)

Qu'est-ce que faire des mathématiques ? Depuis Euclide, on pense que les mathématiques commencent avec les démonstrations. C'est certainement vrai, mais est-on sûr de savoir ce qu'est une démonstration ?

L'évolution des technologies ouvre la voie à de nombreuses pistes nouvelles bousculant les idées trop assurées des logiciens et des philosophes qui, séduits par le symbolisme, ont cru résoudre définitivement le problème. Pour le mathématicien français René Thom (1923-2002), « Est rigoureuse toute démonstration, qui,

chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d'évidence qui entraîne l'adhésion. » Cette conception ouverte, sans doute partagée par de nombreux mathématiciens, nous servira de repère et de guide.

Rappelons d'abord la façon dont les logiciens modernes envisagent la notion de preuve. Leur méthode, qualifiée de formaliste, procède en plusieurs étapes :

- On fixe un langage parfaitement précis permettant d'écrire des formules nommées énoncés.

- On choisit certains énoncés particuliers considérés comme acquis, les axiomes.

- On se donne des règles de manipulations symboliques permettant de passer d'énoncé en énoncé.

- On nomme alors démonstration (formelle) toute suite d'énoncés dont chacun est justifié soit parce qu'il s'agit d'un axiome, soit parce qu'il provient d'une manipulation autorisée à partir d'énoncés déjà obtenus.

Le tout constitue un système formel. On a su en concevoir pour l'arithmétique, la géométrie, la théorie des ensembles et tous les domaines mathématiques envisageables. Ceux de la théorie des ensembles englobent tous les autres et permettent, au moins en théorie, d'exprimer tout travail mathématique dans un langage unique, avec une notion unique de démonstration (voir l'encadré 1 pour un exemple simplifié de système formel).

Cette façon de procéder est intéressante quand on envisage d'utiliser les

1. Un petit système formel

Le système formel décrit ici produit des séquences correctes de parenthèses.

(1) Les formules sont des suites de symboles (et). (2) (est le seul axiome. (3) On a deux règles, I et II, de déduction d'un théorème à partir d'autres.

I : A et B étant démontrés, leur juxtaposition, AB, l'est aussi.

II : si A est démontré, on a aussi (A).

Exemple :

F1 : () ; c'est l'axiome du système.

F2 : (()) par la règle I appliquée à F1 prise deux fois.

F3 : (()) par la règle II appliquée à F2.

F4 : (()) par la règle I appliquée à F1 et F3.

F5 : (()) par la règle II appliquée à F4 ; etc.

Les théorèmes sont toutes les suites de parenthèses correctes dans une expression. Les suites (()) ou (())(), par exemple, sont incorrectes et indémontrables dans ce système formel.

2. Théorème fondamental du sudoku

Ce sudoku comporte 17 données initiales et pourtant il n'a qu'une seule solution. En janvier 2012, Gary McGuire a publié un article expliquant comment, à l'aide d'un long calcul qui s'est étendu sur toute l'année 2011, il a démontré (le résultat avait été pressenti, mais nullement prouvé) qu'il n'existait pas de sudoku à 16 données initiales ayant une solution unique.

Sur la page <http://mapleta.maths.uwa.edu.au/~gordon/sudoku>,

on trouvera d'autres sudokus corrects (qui n'ont qu'une solution) à 17 données.

						1	5
		8	3				
					2		
2	3				8		
				1			
8							
1	5		4				
		6			7	2	
9							