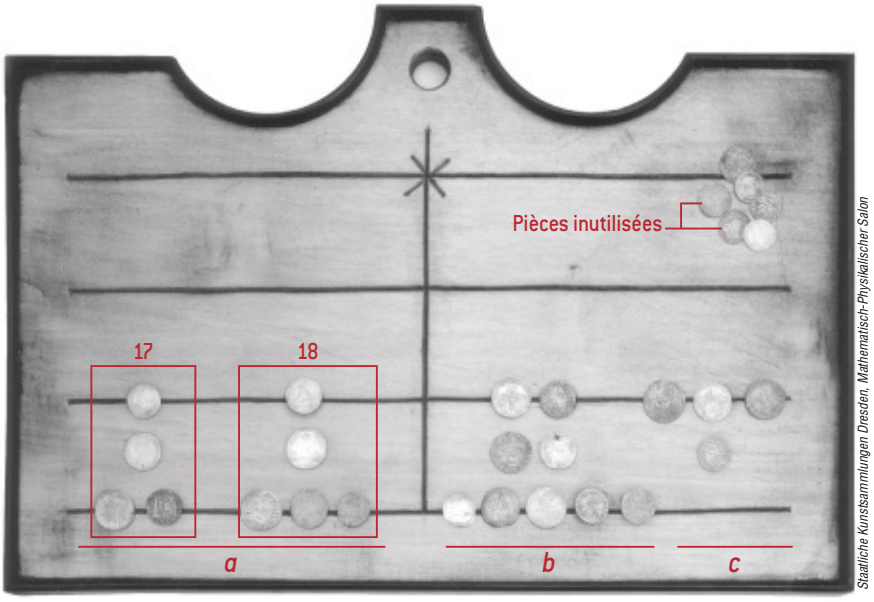
On dispose heureusement du texte de Bernelin, un élève de Gerbert qui a rapporté sa méthode alors que son maître était pape, entre 999 et 1003. Bernelin ne donne qu'une description textuelle de ses divisions, sans aucun dessin. Son texte ressemble ainsi à une suite d'instructions assez absconses : ne pouvant utiliser le zéro, ni se référer à la numération de position – qu'il connaissait pourtant peut-être, on y reviendra –, Gerbert avait été obligé d'énoncer toute une série de règles, définissant la colonne dans laquelle on place tel jeton en cours de calcul en fonction des colonnes où l'on a lu tel chiffre du dividende et tel autre du diviseur. Néanmoins, on comprend les étapes de la division en se reportant à l'opération telle que nous la pratiquons aujourd'hui *(voir la figure 3 et l'encadré page ci-contre)*.

Un bénéfice de son séjour en Catalogne ?

Un grand mystère entoure le calculateur Gerbert : où a-t-il puisé les idées qui l'ont conduit à son abaque ? Celui-ci n'existait pas chez les Arabes de son temps, et c'est donc une invention personnelle. Mais il présente de telles ressemblances avec notre numération de position, alors déjà connue des Arabes, qu'on peut faire une hypothèse raisonnable : Gerbert en aurait pris connaissance au cours de son séjour en Catalogne, quand il avait une vingtaine d'années. À cette époque, la Catalogne, qui ne portait pas encore son nom, était la partie orientale de la Marche d'Espagne, une bande de terres longeant les Pyrénées que Charlemagne avait conquise aux Arabes à la fin du VIIIe siècle. Le reste de l'Espagne était dominé par les Arabes. Plusieurs historiens pensent que lors de son séjour dans la Marche, Gerbert a été en contact avec la science arabe, sans doute par l'intermédiaire du monastère de Santa Maria à Ripoll, à 40 kilomètres au Nord de Vich, où des moines recopiaient des traductions latines d'ouvrages arabes sur l'astronomie, la géométrie et l'arithmétique.

Mais pourquoi, alors, Gerbert n'aurait-il pas préconisé tout simplement le calcul écrit, que cette numération permettait ? C'est un autre mystère, et une nouvelle hypothèse : il était moine et ce qui venait des Arabes était suspect. Il a peut-être craint d'être accusé de sorcellerie ; il aurait alors inventé son abaque comme un moyen terme, entre l'abaque à lignes lié aux chiffres romains et la science arabe qui connaissait la numération de position et le zéro. La question reste entière…



Staatliche Kunstsammlungen Dresden, Mathematisch-Physikalischer Salon

4. SUR CET ABAQUE CLASSIQUE (XVe siècle), les lignes correspondent, de bas en haut, aux unités, dizaines, centaines et milliers, et les positions intermédiaires aux valeurs 5, 50 et 500. La hauteur à laquelle un jeton est posé détermine la « valeur » qu'il prend momentanément. Les jetons disposés ici représentent les trois étapes d'une addition. Les deux nombres à additionner, 17 et 18 *(a)*, sont rapprochés pour former l'addition *(b)*, puis une réduction du nombre de jetons est effectuée *(c)* en remplaçant deux jetons intermédiaires valant 5 par un jeton sur la ligne des dizaines, et cinq jetons unités par un jeton intermédiaire entre la ligne des unités et celle des dizaines. Le résultat obtenu est trois jetons sur la ligne des dizaines et un jeton intermédiaire valant 5, soit 35.

Supplanté par le calcul arabe

L'avenir de l'abaque de Gerbert a été très modeste, pour une raison que le moine ne pouvait pas prévoir. L'engin n'intéressait qu'une élite, les meilleurs calculateurs ; or cette même clientèle s'est jetée sur le nouveau calcul – rendu possible par la numération de position, elle-même fondée sur les chiffres arabes et le zéro – dès qu'il s'est répandu en Europe chrétienne, vers la fin du XIIe siècle. Ces mêmes personnes ont considéré dès lors l'abaque de Gerbert comme trop compliqué par rapport à la division par effacement ou biffage qu'il était désormais facile de réaliser par écrit. ■

L'AUTEUR

Alain SCHÄRLIG est professeur honoraire de la Faculté des Hautes études commerciales de l'Université de Lausanne, en Suisse.

✔ BIBLIOGRAPHIE

A. Schärlig, **Un portrait de Gerbert d'Aurillac. Inventeur d'un abaque, utilisateur précoce des chiffres arabes, et pape de l'an mil**, PPUR, 2011.

A. Schärlig, **Du zéro à la virgule, les chiffres arabes à la conquête de l'Europe, 1143-1585**, PPUR, 2010.

A. Schärlig, **Compter avec des jetons. Tables à calculer et tables de compte du Moyen Âge à la Révolution**, PPUR, 2003.

B. Bakhouche (éd. et trad.), Bernelin, **Livre d'Abaque**, Princi Néguer, 2000.

LOGIQUE & CALCUL

Pour prouver, tous les moyens sont bons

Les activités mathématiques ne se réduisent pas à la logique formelle. Dessins, petits films, programmes observés, interactions physiques, etc., sont l'occasion de mener des démonstrations aussi rigoureuses que l'écriture minutieuse des preuves formelles.

Jean-Paul DELAHAYE

L'évidence paralyse la démonstration.
Pierre Reverdy (1889-1960)

Qu'est-ce que faire des mathématiques ? Depuis Euclide, on pense que les mathématiques commencent avec les démonstrations. C'est certainement vrai, mais est-on sûr de savoir ce qu'est une démonstration ?

L'évolution des technologies ouvre la voie à de nombreuses pistes nouvelles bousculant les idées trop assurées des logiciens et des philosophes qui, séduits par le symbolisme, ont cru résoudre définitivement le problème. Pour le mathématicien français René Thom (1923-2002), « Est rigoureuse toute démonstration, qui, chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d'évidence qui entraîne l'adhésion. » Cette conception ouverte, sans doute partagée par de nombreux mathématiciens, nous servira de repère et de guide.

Rappelons d'abord la façon dont les logiciens modernes envisagent la notion de preuve. Leur méthode, qualifiée de formaliste, procède en plusieurs étapes :

– On fixe un langage parfaitement précis permettant d'écrire des formules nommées énoncés.

– On choisit certains énoncés particuliers considérés comme acquis, les axiomes.

– On se donne des règles de manipulations symboliques permettant de passer d'énoncé en énoncé.

– On nomme alors démonstration (formelle) toute suite d'énoncés dont chacun est justifié soit parce qu'il s'agit d'un axiome, soit parce qu'il provient d'une manipulation autorisée à partir d'énoncés déjà obtenus.

Le tout constitue un système formel. On a su en concevoir pour l'arithmétique, la géométrie, la théorie des ensembles et tous les domaines mathématiques envisageables. Ceux de la théorie des ensembles englobent tous les autres et permettent, au moins en théorie, d'exprimer tout travail mathématique dans un langage unique, avec une notion unique de démonstration *(voir l'encadré 1 pour un exemple simplifié de système formel)*.

Cette façon de procéder est intéressante quand on envisage d'utiliser les

1. Un petit système formel

Le système formel décrit ici produit des séquences correctes de parenthèses.
(1) Les formules sont des suites de symboles (et). (2) () est le seul axiome. (3) On a deux règles, I et II, de déduction d'un théorème à partir d'autres.
I : A et B étant démontrés, leur juxtaposition, AB, l'est aussi.
II : si A est démontré, on a aussi (A).
Exemple :
F1 : (); c'est l'axiome du système.
F2 : ()() par la règle I appliquée à F1 prise deux fois.
F3 : (()() par la règle II appliquée à F2.
F4 : ()(()()) par la règle I appliquée à F1 et F3.
F5 : (()(()())) par la règle II appliquée à F4 ; etc.

Les théorèmes sont toutes les suites de parenthèses correctes dans une expression. Les suites (() ou ())((), par exemple, sont incorrectes et indémontrables dans ce système formel.

2. Théorème fondamental du sudoku

Ce sudoku comporte 17 données initiales et pourtant il n'a qu'une seule solution. En janvier 2012, Gary McGuire a publié un article expliquant comment, à l'aide d'un long calcul qui s'est étendu sur toute l'année 2011, il a démontré (le résultat avait été pressenti, mais nullement prouvé) qu'il n'existait pas de sudoku à 16 données initiales ayant une solution unique.

Sur la page http//mapleta.maths.uwa.edu.au/~gordon/sudokumin.php, on trouvera d'autres sudokus corrects (qui n'ont qu'une solution) à 17 données.

							1	5
			8	3				
						2		
	2	3				8		
					1			
	8							
1		5		4				
			6			7	2	
9								

ordinateurs pour qu'ils trouvent des démonstrations ou pour qu'ils vérifient des démonstrations trouvées par les mathématiciens. Pour cette vérification, il faut avoir pris soin de formaliser les preuves, ce qui se fait… avec l'aide d'ordinateurs (voir *Du rêve à la réalité de preuves* dans cette rubrique, avril 2011). Cependant, la formalisation des preuves est très contraignante et n'est vue que comme une possibilité ultime que l'on n'utilise que rarement. La notion de preuve rigoureuse de Thom ne mentionne pas de formalisme symbolique et semble prête à accepter bien d'autres idées.

L'approche formelle est par ailleurs catastrophique dans l'enseignement où elle revient à apprendre aux élèves des recettes de calculs qu'ils ne comprendront pas toujours… ou presque jamais. Nicolas Bourbaki, pourtant considéré comme le prototype même du formaliste, a exprimé clairement que comprendre ne consiste pas à suivre ligne à ligne une démonstration formelle : « Tout mathématicien sait d'ailleurs qu'une démonstration n'est pas véritablement "comprise" tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à toute autre. »

Si l'on souhaite vraiment saisir ce que sont les mathématiques, il faut, comme Thom, concevoir la démonstration d'une façon tolérante. C'est particulièrement important dans l'enseignement, et c'est pourquoi il est légitime de s'intéresser aux démonstrations entraînant l'adhésion de ceux à qui on les présente et n'entrant pas dans le cadre formaliste que nous venons de rappeler. Voici une liste de méthodes de démonstrations mathématiques hétérodoxes qu'il sera amusant de pratiquer, voire qu'il sera judicieux d'utiliser dans les classes pour susciter l'adhésion, ou même… l'intérêt des élèves.

Prouver en calculant

Selon la conception formaliste, une multiplication posée n'est pas une preuve. Si on devait justifier dans le système formel de l'arithmétique élémentaire que $17 \times 19 = 323$, la démonstration occuperait plusieurs dizaines de lignes et n'apporterait rien. La traduction dans le système formel de l'arithmétique d'une opération posée :

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 19 \\ \hline 153 \\ 17\,. \\ \hline 323 \end{array}$$

est si fastidieuse et inutile qu'on ne la fait jamais. La vérification opérée en contrôlant chaque chiffre est facile et apporte une certitude. Finalement, un calcul posé doit, au sens de Thom, être considéré comme une démonstration.

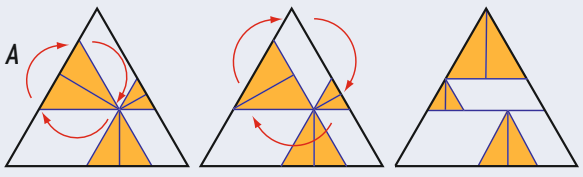
Les méthodes de contrôle de telles démonstrations sont tellement simples, ne demandant qu'un peu de soin et de patience (ou une machine), qu'un mathématicien dans un texte se contentera d'écrire $17 \times 19 = 323$, laissant aux lecteurs courageux l'exercice de calcul. Il écrira même sans donner de détail que 323 n'est pas un nombre premier (au lecteur de découvrir $17 \times 19 = 323$), ou qu'il y a 25 nombres premiers inférieurs à 100 et 168 inférieurs à 1 000.

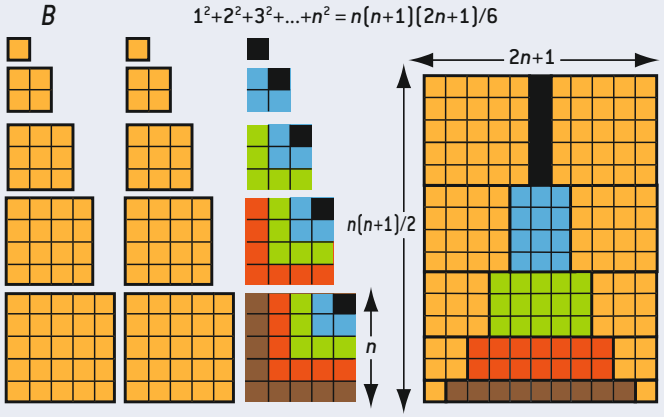
Les outils de calcul ayant progressé, cette pratique s'est généralisée. Dans un texte mathématique d'aujourd'hui, on écrira donc « la séquence 123 apparaît pour la première fois au 1924^{e} chiffre décimal de π » (c'est vrai !) sans rien expliquer de plus. L'idée est que la vérification d'un tel résultat, pourtant impossible à mener à la main, est évidente, car celui qui le souhaite entreprendra un petit travail de programmation dont l'issue le persuadera sans l'ombre d'un doute de la justesse de l'énoncé. Les preuves par le calcul pur vous conduisent, comme Thom l'écrit, dans un « état d'évidence qui entraîne l'adhésion », et cela même si le processus est long, fastidieux et s'appuie sur une multitude d'aides, dont celle d'une machine compliquée, produit d'une évolution technologique de plusieurs décennies ayant nécessité des investissements se comptant en milliards d'euros.

Déjà évoquées plusieurs fois dans cette rubrique, les « preuves sans mots » sont seulement constituées de dessins agrémentés de quelques symboles. L'idée est

3. Des preuves sans mots

Un examen attentif de la figure suffit à se convaincre du théorème (une propriété géométrique ou algébrique) à démontrer :
A. Le théorème de Viviani : la somme des distances d'un point à l'intérieur d'un triangle équilatéral aux trois côtés du triangle est constante et égale à la hauteur de ce triangle.
B. La somme des carrés des n premiers entiers est égale à $n(n + 1)(2n + 1)/6$ (on sait que la somme des n premiers entiers est $n(n + 1)/2$).

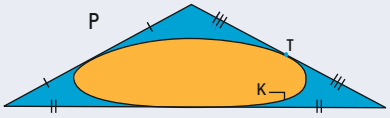




4. Par la physique !

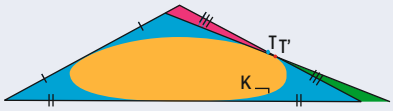
L'exemple suivant est tiré du livre de Mark Levi, *The Mathematical Mechanic*, Princeton University Press, 2009.

Théorème : Soit P un polygone d'aire minimale ayant *n* côtés et circonscrit à une forme convexe F délimitée par une courbe fermée K. Pour chaque côté C de P, le point de tangence T de K avec C est situé au milieu de C.



Démonstration physique : On imagine un cylindre ayant pour section K et on l'entoure de planches qui peuvent bouger indépendamment les unes des autres (on imagine qu'elles s'interpénètrent sans résistance). On fait le vide entre les planches et le cylindre. Les planches tentent de minimiser le volume de vide. Quand elles s'immobilisent, la surface en bleu est minimale. À cet instant, puisque le système est en équilibre, les points de tangence coupent chaque côté au milieu, car les couples de force dus à la pression constante s'égalent sur le point de contact. À deux dimensions, les forces uniformément réparties doivent s'équilibrer de part et d'autre du point de contact, qui est au milieu.

Esquisse d'une preuve avec des infinitésimaux, d'après Philippe Boulanger : Ce raisonnement utilise le fait qu'une fonction ne varie pas au voisinage d'un extremum suffisamment « plat » (la dérivée première de la fonction est continue). L'aire comprise entre le triangle et la coupe K du cylindre est minimale. Faisons varier un tout petit peu un côté de manière qu'il reste tangent en T' à la courbe K. Les petits triangles rouge et vert ainsi formés par les deux côtés ont la même aire, car l'aire bleue est minimale (l'aire gagnée est égale à l'aire perdue). Les deux triangles qui ont le même angle au sommet ont ainsi nécessairement des côtés de même longueur de part et d'autre de cet angle, et donc le point de contact est bien au milieu.

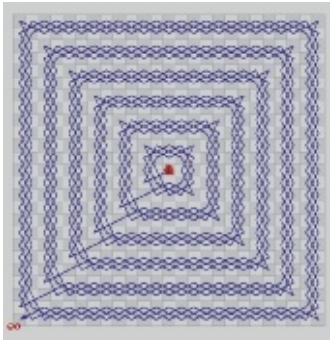


que l'observation attentive de l'image conduit le « lecteur suffisamment instruit et préparé » dans « un état d'évidence » concernant l'énoncé visé. De telles démonstrations *(voir l'encadré 3)* sont, pour le mathématicien qui suit Thom, des preuves parfaitement acceptables auxquelles rien ne manque.

Démontrer sans mots

Notons que les preuves sans mots, comme les preuves par le calcul pur, sont transformables en preuves formelles, mais le travail sera moins mécanique que pour le calcul pur. Le plus souvent, une telle traduction n'apportera pas grand-chose, et, au contraire, diminuera « l'état d'évidence » que crée la preuve sans mots. Pour le mathématicien à l'esprit ouvert, une belle preuve sans mots est donc une bien meilleure preuve qu'une preuve formelle.

Notons que les preuves sans mots démontrent parfaitement des résultats concernant l'infini. C'est le cas de la preuve qu'un cavalier du jeu d'échecs peut parcourir toutes les cases d'un échiquier infini *(ci-dessous)*.



Les preuves de topologie posent cependant un grave problème : en géométrie, Emmanuel Kant avait tort quand il estimait que les mathématiques sont fondées sur l'évidence intuitive des choses. Le théorème de Jordan illustrera ce point : il énonce que « Toute courbe simple fermée C (ne se recoupant pas et revenant à son point de départ) délimite dans le plan deux zones, telles qu'une courbe, qui relie un point de la première zone à un point de la seconde, coupe nécessairement C ».

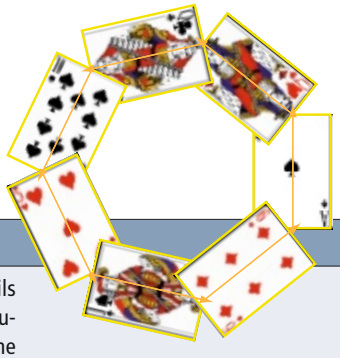
Suffit-il de faire un petit dessin pour démontrer le théorème de Jordan ? L'admettre est difficile, car aucune des preuves fondées sur les propriétés des nombres réels (indispensables pour définir convenablement ce que sont un plan et une courbe) n'est simple. On considère d'ailleurs qu'une preuve satisfaisante de ce théorème intuitivement évident n'a vraiment été formulée qu'en 1887 et qu'il a fallu encore un peu l'arranger en 1924 pour qu'on la juge complète. L'écriture totalement formelle d'une preuve du théorème de Jordan (dans un système permettant de parler de nombres réels) est considérée comme un exploit informatique et n'a été obtenue qu'en 2007 par Thomas Hales en utilisant le système logiciel HOL !

La raison de cette distorsion entre le petit dessin et la preuve détaillée jugée seule vraiment convenable est que le formaliste, qui a sans doute raison cette fois, ne peut pas se contenter de dire qu'une courbe est un tracé qu'on dessine sans lever le crayon. Après avoir donné la définition précise d'une courbe utilisant la notion de fonction continue, il doit s'y référer… ce qui n'est pas facile. Lorsqu'il s'agira de topologie ou de continuité, même si les preuves sans mots par petits dessins sont possibles et assez persuasives, il sera utile pour aller plus loin (et obtenir des généralisations à des espaces à plus de deux dimensions) de s'intéresser aussi aux preuves ramenant la géométrie à l'analyse, et cela quel qu'en soit le coût.

Se convaincre par l'observation d'un film

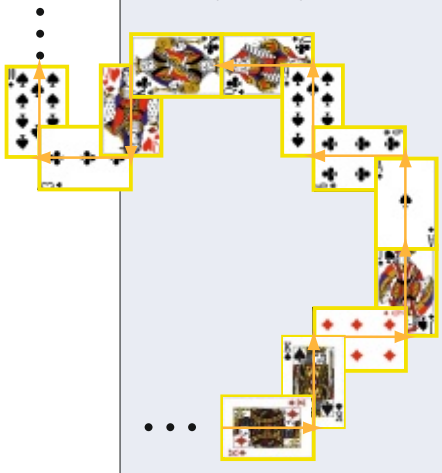
Assez proches des preuves sans mots, il y a les preuves par l'observation d'un film d'animation. En regardant des figures animées soigneusement conçues, on se trouve persuadé d'une vérité mathématique (par exemple le théorème de Pythagore). Utilisant systématiquement ce type de preuves, une série de films remarquables créés par Tom Apostol et adaptés à la langue française par Éliane Cousquer est accessible gratuitement en : http://itunes.apple.com/itunes-u/mathematics-!/id420345770

Toujours dans la même lignée, de petits programmes s'exécutent sur votre ordina-



5. Une preuve mentale du théorème de Wilson

Théorème de Wilson : si p est premier, alors $(p-1)! + 1$ est divisible par p. Ce résultat était connu du mathématicien arabe Alhasen (965-1039) ; il doit son nom



à John Wilson (1741-1793) qui l'énonça en 1770 sans le démontrer, chose faite trois ans plus tard par Joseph-Louis Lagrange.

On imagine un jeu de 52 cartes et on associe une direction à chaque couleur : Nord pour pique, Ouest pour trèfle, Est pour carreau, Sud pour cœur. On mélange les cartes et on en déduit une promenade aléatoire en prenant les cartes une à une et en les mettant à la suite l'une de l'autre. Comme il y a autant de Nord que de Sud et autant d'Ouest que d'Est, le parcours ramène au point de départ.

Prenons maintenant un jeu de p cartes, p étant un nombre premier. Soit l'angle $360°/p$ (un p-ième d'un tour complet) qu'on dénommera angle de base. On numérote les cartes par les entiers de 0 à $p-1$. À la carte i, on associe i fois l'angle de base. Comme précédemment, quel que soit l'ordre des cartes, le parcours aléatoire qu'on en déduit ramène au point de départ. Pour le voir, on considère les p vecteurs unitaires associés à ces p angles pris dans l'ordre : ils dessinent un grand polygone régulier à p côtés et donc leur somme est nulle. Dans un autre ordre, elle reste bien sûr nulle.

On réfléchit maintenant aux $p!$ promenades aléatoires engendrées par les différentes façons de classer les cartes. Comme le point de départ est sans importance, il n'y a que $(p-1)!$ promenades aléatoires différentes.

Certaines promenades sont peut-être invariantes par rotation, mais puisque p est premier, cela ne peut être que par la rotation de l'angle de base. Les promenades invariantes par rotation de l'angle de base sont faciles à identifier : ce sont celles qui dessinent les étoiles régulières faites en prenant p points régulièrement espacés sur une circonférence. Il y en a exactement $p-1$ (il y a deux fois moins d'étoiles, mais chacune donne deux promenades selon la façon dont on la parcourt). Il y a donc en tout $(p-1)! - (p-1)$ promenades différentes asymétriques.

Toute rotation d'une promenade asymétrique par un multiple de l'angle de base en donne une autre. Les promenades asymétriques se regroupent donc en paquets de p (dans un paquet, toutes les promenades s'obtiennent en faisant tourner l'une d'elles par les multiples de l'angle de base). Le nombre $(p-1)! - (p-1)$ est donc divisible par p, donc $(p-1)! + 1$ aussi. CQFD.

La réciproque conduit à une caractérisation des nombres premiers. Elle se fait mentalement aussi : si $p > 4$ est composé, alors $(p-1)!$ est divisible par p (traiter le cas p carré parfait, puis p non carré), donc $(p-1)! + 1$ ne l'est pas. Pour $p = 4$, on a $(p-1)! + 1 = 7$, non divisible par 4.

teur et vous proposent des démonstrations animées parfaitement convaincantes *(voir* http://clem.mscd.edu/~talmanl/MathAnim.html *pour une collection de telles animations)*.

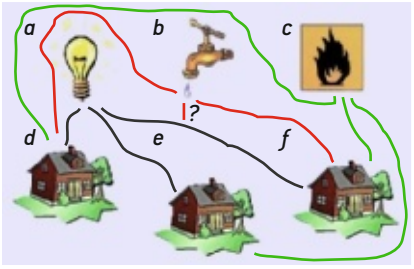
Des preuves mentales

À l'opposé des preuves sans mots, il y a les preuves sans dessins ni symbolisme mathématique, qu'on pourrait qualifier de mentales. Lors d'une promenade à pied avec un ami, vous la raconterez… et cela même en pleine nuit. Pour peu qu'il soit assez attentif, en vous écoutant, votre ami comprendra et se trouvera donc à la fin de votre exposé convaincu d'un résultat mathématique nouveau. Récemment, le mathématicien britannique Adam Goucher a proposé une preuve mentale et géométrique (ce n'est pas incompatible !) du théorème de Wilson. Ce théorème donne une caractérisation des nombres premiers comme nombres p qui divisent $(p-1)! + 1$ *(voir la figure 5)*. Je vous recommande cette preuve pour votre prochaine excursion en montagne. Elle vous fera sentir, bien mieux que les preuves usuelles fondées sur des connaissances peu intuitives d'arithmétique modulaire, que le théorème est vrai : en un mot, elle vous fera accéder à cet état de conviction profonde qui constitue la compréhension mathématique véritable. Du fait de leur nature verbale, les preuves mentales sont en général faciles à traduire en preuves formelles.

Prouver en bougeant son corps

Les mouvements et les actions qu'on effectue soi-même sont un bon moyen de se persuader d'une vérité. Cette implication du corps dans le processus de démonstration est parfois le moyen le plus efficace d'arriver à l'état de certitude intime à propos d'un énoncé mathématique.

L'exemple du problème des trois maisons de Henry Dudeney qui doivent avoir l'eau, le gaz et l'électricité illustre cette situation *(voir ci-dessous)*. Il lui correspond le théorème affirmant que le graphe $K_{3,3}$ (où trois points *a, b et c* rejoignent chacun trois autres points *d, e* et *f*) n'est pas planaire, c'est-à-dire ne peut pas être dessiné sur un plan sans que les tracés des jonctions ne se coupent. Quiconque essaye pendant dix minutes de résoudre le problème de Dudeney avec un papier, un crayon et une gomme, atteint cet état de certitude absolue que $K_{3,3}$ n'est pas planaire.



Le problème des trois maisons de Henry Dudeney : les tracés reliant *(a, b, c)* à *(d, e, f)* se coupent forcément au moins une fois.

Ces mouvements réalisés pour soi construisent une conviction privée, mais une démonstration doit être communicable. Ici, on ne peut donc pas considérer que la certitude acquise par manipulation vaut pour démonstration. Heureusement, l'énoncé que $K_{3,3}$ n'est pas planaire a des démonstrations au sens usuel… quoique utilisant de façon plus ou moins directe le théorème de Jordan et donc délicates à formaliser.

Démonstrations de physiciens

Notre connaissance instinctive ou apprise de la physique nous conduit à être certain d'énoncés pourtant purement mathématiques. Ces preuves d'énoncés mathématiques par le raisonnement physique peuvent difficilement être considérées comme de vraies preuves mathématiques et on ne sait pas ce qu'en aurait dit Thom. Cependant, elles sont fascinantes et il ne fait pas de doute qu'elles conduisent dans un état de certitude parfois aussi fort que les preuves vraiment mathématiques. La rubrique de février 2010 qui présentait un livre de Mark Levi consacré au sujet en donnait une série d'exemples *(voir l'encadré 4 pour un autre)*. Ces preuves sont délicates à analyser pour le mathématicien, car la preuve s'appuie sur des lois ou des considérations physiques qui ne sont pas permises habituellement en mathématiques. D'ailleurs, si les lois physiques ne sont pas vraies (une loi physique n'est jamais démontrée définitivement), il se pourrait que ce qu'on en a déduit de purement mathématique soit faux. L'analyse approfondie de ces preuves ferait peut-être découvrir qu'elles sont exprimables en contournant les hypothèses physiques qui y sont à l'œuvre. Le problème n'est pas très simple et il semble qu'il y ait là un beau sujet de recherche logique qui, à ma connaissance, n'a pas été traité.

La simple observation d'un programme qui affiche des images sur un écran constitue parfois une preuve entraînant une parfaite adhésion. Ce type de preuves est rarement mentionné par ceux qui réfléchissent à la nature des mathématiques et des démonstrations. Pourtant, il existe des domaines où elles jouent un rôle central, totalement irremplaçable, et où personne n'a le moindre doute sur les énoncés mathématiques qu'il produit.

Considérons l'énoncé suivant : il existe une configuration du *Jeu de la vie* de Conway de dix cellules créant des configurations dont le nombre de cellules tend vers l'infini.

Observer le déroulement d'un programme

C'est un énoncé mathématique très simple. Il n'a été démontré qu'en 1997 par Paul Callahan, 30 ans après l'invention du jeu. En quoi consiste sa démonstration ? En la présentation d'une configuration de dix cellules (la trouvaille), suivie de l'observation de 1 000 générations successives du devenir de la configuration. Ces 1 000 générations ne peuvent pas se calculer à la main, car assez rapidement elles font intervenir un grand nombre de cellules. À partir de la génération 1 000, le calcul présente une régularité : une partie de la configuration est stable alors qu'une autre partie avance, laissant derrière elle des cellules vivantes de plus en plus nombreuses et formant un motif périodique.

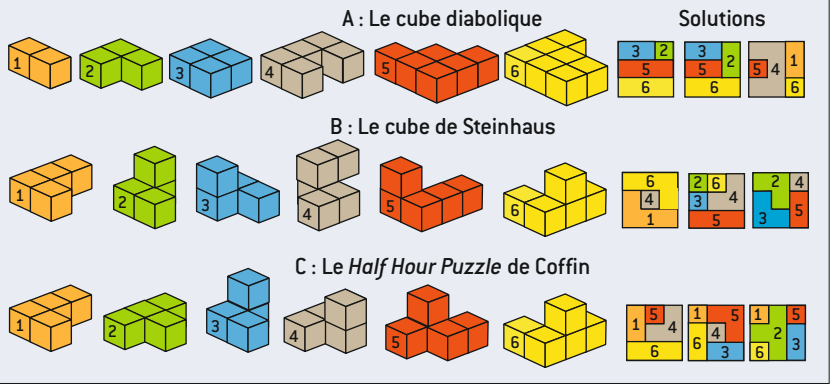
La conviction que cela se poursuit est totale. En effet, d'une part, le programme a été testé un grand nombre de fois et nul ne doute qu'il calcule comme il faut (on peut aussi refaire fonctionner la configuration initiale de dix cellules avec un autre programme) ; d'autre part, la régularité de ce qu'on observe ne laisse pas de doute sur l'idée que la croissance se poursuivra indéfiniment. C'est bien l'observation du programme en train de fonctionner en continu qui crée cet état d'évidence entraînant l'adhésion dont parlait Thom et qui caractérise les preuves rigoureuses.

L'étude du *Jeu de la vie* et de bien d'autres automates cellulaires conduit à pratiquer ce type de démonstrations et essentiellement celui-là. On y prouve des théorèmes dont certains sont si peu évidents qu'on ne les a découverts qu'après plusieurs décennies

6. Les démonstrations par manipulation

Si vous réussissez à ranger la boîte de cubes, vous en tirerez sans mal une preuve descriptive du théorème géométrique affirmant que ce rangement est possible. En revanche, si, après avoir essayé durant une heure de ranger une boîte avec six pièces, vous n'avez pas réussi, vous serez persuadé que c'est impossible et n'aurez pas le moindre doute. La conviction acquise « par manipulation » que la boîte ne peut pas être rangée sera malheureusement incommunicable et ne constituera donc pas une preuve mathématique acceptable.

Le cube diabolique (A), qui date du XIXe siècle, est, semble-t-il, le plus ancien problème de rangement du cube. Le cube de Steinhaus (B) a été inventé en 1930 et le *Half Hour Puzzle* de Coffin, inventé vers 1970 (C), se remonte après une demi-heure de réflexion… Les solutions à droite représentent les trois vues du cube (de gauche, de droite et de dessus).



de recherche. Ce sont des preuves hétérodoxes certes, qu'on pourrait transformer en preuves formelles très longues (car le contexte est discret et se réduit à l'arithmétique), mais personne n'en ressent la moindre nécessité. Ce sont les preuves dont ce domaine mathématique a besoin, et aucun autre type de preuves n'établira mieux le résultat qu'il existe une configuration de dix cellules qui croît indéfiniment.

Une autre démonstration par énumération (menée par ordinateur, bien sûr) a établi qu'il n'existe aucune configuration de neuf cellules ou moins qui croît indéfiniment : la configuration à dix cellules de P. Callahan est donc la plus petite possible ayant cette propriété.

Le résultat cité paraîtra un peu anecdotique, mais ce n'est pas toujours le cas. La meilleure preuve du théorème de John von Neumann qu'il existe des configurations autoreproductrices fonctionnant sur un schéma génétique *(voir l'article de cette rubrique de janvier 2012)* est de cette nature. La conviction profonde que doit donner une démonstration peut dans ce cas soit provenir de la lecture attentive du texte de von Neumann (c'est un gros effort), soit provenir de l'observation du calcul réalisé par le programme qui fait fonctionner sa fameuse configuration, programme dont bien sûr on s'assurera qu'il fait ce qu'on attend et rien d'autre. Les preuves par observation du fonctionnement d'un programme pourraient bien jouer un rôle important dans l'avenir des mathématiques.

Confier le calcul à un ordinateur

Nous n'insisterons pas sur les preuves obtenues par l'usage d'un ordinateur qui réalise un calcul (qu'on n'observe pas directement comme précédemment). Depuis plusieurs dizaines d'années, leur usage s'étend lentement et on leur doit maintenant des théorèmes importants. Signalons un très bel exemple tout récent. En janvier de cette année, après plus de cinq ans de travail, le théorème fondamental du sudoku a été démontré : une grille de sudoku 9 × 9 doit comporter 17 chiffres préinscrits ou plus pour avoir une solution unique.

Le résultat m'a été signalé par son auteur Gary McGuire, de l'*University College* de Dublin, qui, pour son énorme calcul, a été aidé de Bastian Tugueman et Gilles Civario. Précisons qu'il y a peu de temps, ce calcul était jugé infaisable et qu'il n'a pu être mené que parce qu'il a été préalablement simplifié par une étude mathématique utilisant certains outils combinatoires, dont le lemme de Burnside.

Les tentatives mathématiques directes (sans ordinateurs) pour traiter le problème réussissent à montrer assez facilement que sept données sont nécessaires, mais ne vont pas plus loin pour l'instant. On est donc très loin du 17 obtenu avec l'ordinateur et qui apparaît totalement hors de portée du pur raisonnement non assisté par une machine. La preuve par ordinateur a exigé un calcul équivalent à plus de sept millions d'heures (environ 800 ans) d'un bon processeur d'ordinateur de bureau. L'examen du programme, des résultats mathématiques sur lesquels il se fonde, des contrôles assurant que tout se déroule bien et du résultat qu'il produit, constituent un ensemble de données communicables qu'il faut considérer comme une preuve rigoureuse au sens de Thom.

La liste des démonstrations hétérodoxes contient d'autres catégories encore, que je cite brièvement sans donner d'exemples : à l'inverse de la conception formaliste, elles incitent à une vision libre et ouverte de l'activité mathématique.

– Les preuves sans transfert de connaissance. En dialoguant avec la personne qui détient la preuve, vous serez persuadé que l'affirmation mathématique est juste, mais vous n'apprenez rien de la preuve et vous restez donc incapable d'en convaincre quelqu'un d'autre *(voir l'article de cette rubrique de janvier 2011)*.

– Les preuves probabilistes : même si la preuve aboutit, il reste une probabilité (que l'on tentera de rendre aussi faible que possible) pour que le résultat prouvé soit faux.

– Les preuves holographiques (ou PCP) : vérifier la preuve (avec un risque très faible de se tromper) n'exige qu'un petit morceau de la preuve.

L'AUTEUR

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

G. McGuire, **There is no 16-clue Sudoku**, 2012 : http://www.math.ie/checker.html

R. Nelsen, **Proof without words**, The Mathematical Association of America, vol. I 1993, vol. II 2000, version française à paraître aux éditions Hermann, 2012.

J.-P. Delahaye, **Persuader de son savoir sans le transmettre**, *Pour la Science* n° 399, janvier 2011.

J.-P. Delahaye, **Du rêve à la réalité des preuves**, *Pour la Science* n° 402, avril 2011.

J.-P. Delahaye, **Quand la physique démontre des théorèmes mathématiques**, *Pour la Science* n° 388, février 2010.

C. Alsina et R. Nelsen, **Visualizing Basic Identities**, The Mathematical Association of America, 2009.

M. Levi, **The Mathematical Mechanic**, Princeton University Press, 2009.

C. Alsina et R. Nelsen, **Math Made Visual**, The Mathematical Association of America, 2006.

IDÉES DE PHYSIQUE

L'anneau bavard, *alias* chatter ring

Le chatter ring, *l'« anneau qui bavarde », est un accessoire de jonglerie très populaire en Nouvelle-Zélande, à Hawaï et au Japon. Son principe s'apparente à celui d'un* hula hoop *à plusieurs anneaux.*

Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK

Quasi inconnu en France, le *chatter ring* a connu son heure de gloire à la fin du siècle dernier (le XX^{e}...) en Nouvelle-Zélande, où 170 000 exemplaires ont été vendus en moins d'un an, et au Japon (500 000 exemplaires). Ce jeu difficile à maîtriser consiste en une tige métallique circulaire sur laquelle sont enfilés cinq petits anneaux, métalliques eux aussi.

Mis en rotation rapide, les cinq anneaux effectuent le long de la tige annulaire une sorte de mouvement de *hula hoop* descendant, en faisant tinter un son métallique. Cela se poursuit tant que l'utilisateur parvient à maintenir les anneaux « vivants » en faisant tourner le grand anneau sur lui-même *(voir la figure 1)*. Entre les mains de joueurs expérimentés, cet objet devient un accessoire de impressionnant. Et il offre au physicien un joli sujet de réflexion...

Et le jeu renaquit de ses cendres...

Le *chatter ring*, nommé aussi *jitter ring*, est constitué d'une tige d'acier de 6,4 millimètres de diamètre formant un cercle de 28 centimètres de diamètre, sur lequel sont enfilés cinq anneaux de trois centimètres de diamètre extérieur et de sept millimètres d'épaisseur. Le trou central de ces anneaux est deux fois plus large que la tige. Une fois lancés par un vigoureux coup de pouce, les petits anneaux tournent très rapidement autour de la tige centrale, en descendant lentement.

Le principe du jeu est de faire tourner la tige pour maintenir les petits anneaux en rotation à hauteur constante. Une fois ce mouvement maîtrisé, on peut ensuite réaliser des figures, par exemple faire passer le grand anneau en position horizontale ou jongler sans que les petits anneaux ne cessent de tournoyer autour de la tige.

L'ancêtre du *chatter ring* est le *gyro ring*, jeu pour enfants né peut-être au début du XX^{e} siècle (un brevet de 1906 de l'Américain William Van Horn porte sur un système à un seul anneau). Le *gyro ring* était composé d'une tige métallique circulaire traversant cinq anneaux de plastique. Dans les années 1980, le physicien américain Jearl Walker a mentionné une variante, le *fiddlestick*, dans *Le carnaval de la physique*, son ouvrage bien connu des amateurs de physique amusante. Dans cette version, les petits anneaux descendent le long d'une tige rectiligne verticale.

Le *gyro ring* ou le *fiddlestick* seraient restés dans l'ombre si, dans les années 1990, un incendie n'avait pas détruit la maison d'un jeune Néo-Zélandais qui avait en sa possession un exemplaire de *gyro ring* (du moins est-ce ce qu'on raconte). En cherchant dans les décombres de sa chambre calcinée, le jeune homme retrouve son jeu avec les petits anneaux dépouillés de leur plastique, qui a brûlé. Il s'aperçoit vite que l'objet rescapé est bien plus rapide et qu'il produit un ronronnement métallique marqué (c'est ce

Dessins de Bruno Vacaro

1. CINQ PETITS ANNEAUX MÉTALLIQUES mis en rotation rapide autour d'une tige circulaire : ce jeu simple, le *chatter ring* ou *jitter ring*, consiste à maintenir le plus longtemps possible la rotation des anneaux. Pour ce faire, le joueur doit faire tourner le grand cercle de façon à garder les petits anneaux à la même hauteur.