

 LOGIQUE & CALCUL

L'accrochage des tableaux

Comment accrocher un tableau avec n clous et une ficelle, de façon à ce qu'en enlevant n'importe lequel des clous, le tableau soit libéré et glisse vers le sol ?

Jean-Paul DELAHAYE

Plantez deux clous. Accrochez à ces deux clous un tableau de la façon la plus simple et la plus naturelle. Si l'un des clous tombe, la corde (et donc le tableau) reste accrochée à l'autre (voir la figure du haut ci-contre). Il va donc de soi (pour un mathématicien...) de se demander : est-il possible de disposer la corde autour des deux clous de façon que, si l'un quelconque des deux clous disparaît, le tableau tombe ? Nous nommerons ce montage *Podger*, en hommage à l'illustre accrocheur de tableau de Jerome K. Jerome qui faisait toujours tomber son tableau (voir l'encadré 3). Ce problème est analogue à un montage de type *fail-safe* dans l'industrie : si un organe est défaillant, l'ensemble de la machine s'arrête.

Une équipe aux États-Unis a étudié ce problème d'accrochage de tableau, à la frontière des mathématiques récréatives, de la topologie algébrique et de l'algorithmique. Elle est composée de Erik Demaine, Martin Demaine et Ronald Rivest (le R du système de cryptage RSA) du MIT, Yair Minsky, de l'Université de Yale, Joseph Mitchell, de l'Université Stony Brook, et Mihai Patrascu, des Laboratoires ATT de Florham Park.

La première mention de l'énigme de l'accrochage d'un tableau remonte à 1997. Elle est le fait de A. Spivak qui posa son casse-tête dans la revue *Quantum* consacrée aux divertissements mathématiques. Depuis, un grand nombre de variantes du petit problème ont imposé la mise au point d'outils généraux que les mathématiciens ont su découvrir, ce qui les a conduites à de beaux théorèmes... pas tous faciles !

Pour vous persuader qu'en enlevant un seul des deux clous, le tableau sera libéré et glissera jusqu'au sol, observez la figure du bas ci-dessous ou faites l'essai avec une ficelle. On peut trouver cette solution par tâtonnements. Il existe cependant une méthode qui conduit sans hésitation à la solution et à la solution de la généralisation suivante que nous nommons *Le problème des n clous* : « Disposer la corde de soutien du tableau autour de n clous



de façon que si l'un quelconque des n clous disparaît, la pesanteur fasse glisser le tableau en le libérant des clous restants. »

Avant de lire la suite, vous pouvez rechercher la solution avec trois clous, puis quatre, etc., et imaginer un procédé pour n clous. Résoudre la question comme un exercice de travail manuel conduit à des difficultés,

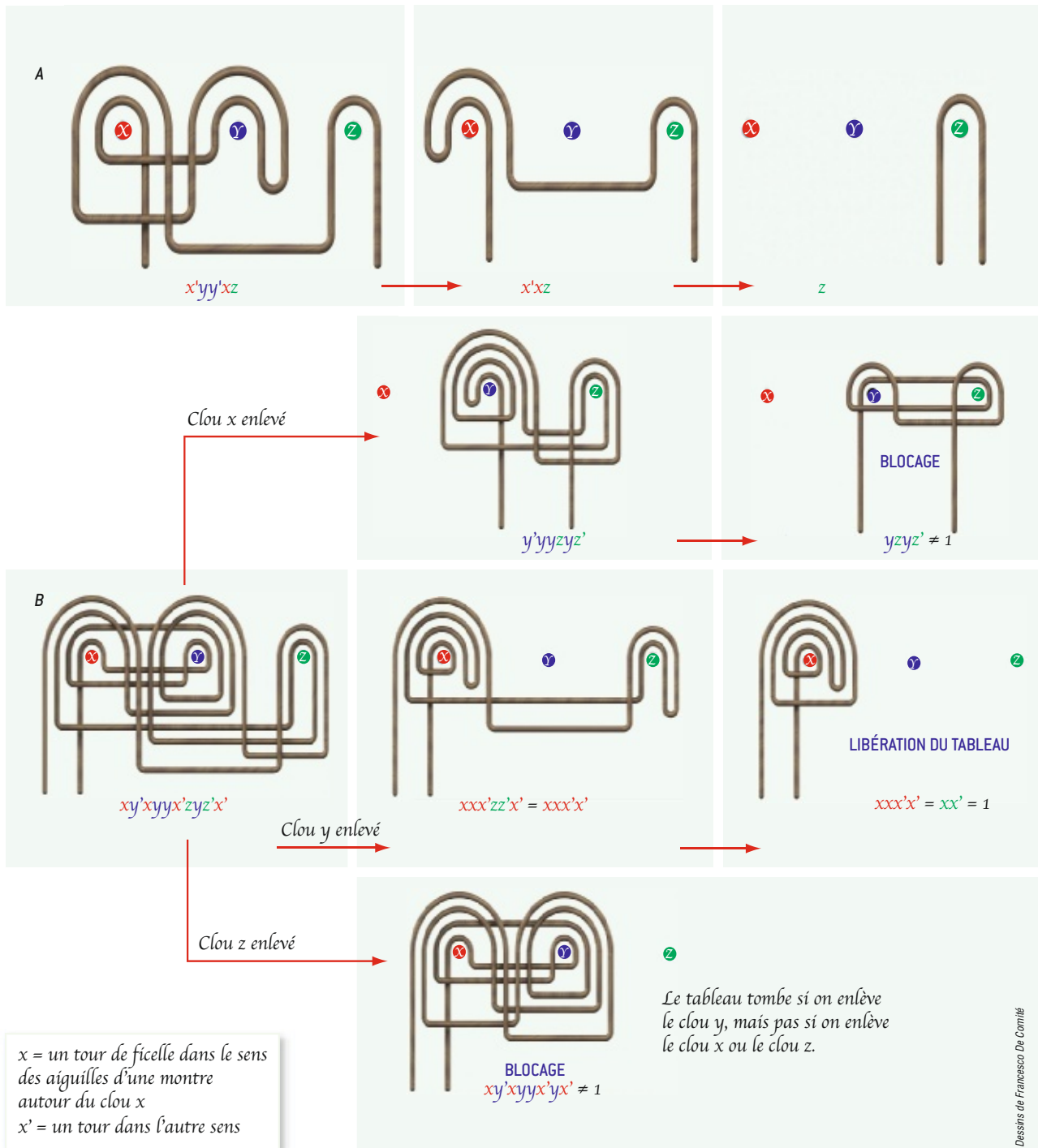
dues à la curieuse propension qu'ont les ficelles à faire des nœuds. Tester des trajets de la ficelle pour en découvrir qui ont la propriété recherchée demande une grande longueur de ficelle et beaucoup de patience. L'étude deviendra impossible quand vous envisagerez plus de quatre clous.

Heureusement, l'algèbre va nous secourir. L'idée, due à Neil Fitzgerald, d'un rapport entre le problème des n clous et la manipulation des expressions représentant des éléments du « groupe libre » (nous précisons ce que c'est) permet de se poser d'autres questions et de les résoudre (voir l'encadré 4).

Le groupe libre à l'aide

Le groupe libre de générateurs G est un système de calcul utile dans plusieurs domaines mathématiques, en particulier en topologie algébrique, la discipline mathématique qui, au moyen de l'algèbre, classe les nœuds et les surfaces. L'ensemble G des générateurs est, par exemple, constitué de trois éléments x, y et z ; on associe à chaque générateur un double x', y', z' . Leur ensemble est noté G' . On convient alors que toute expression composée d'une suite finie de symboles pris dans G ou dans G' désigne un élément du groupe libre. La suite vide, composée de zéro élément, se note 1 et, bien évidemment, $1s = s1 = s$ pour tout élément s du groupe libre.

Deux exemples d'éléments du groupe libre de générateurs x, y, z sont $s = xyxx'y'z'z$ et $r = zzzzyx'xy'z'$. Les expressions ainsi construites se simplifient parfois, mais la seule et unique façon de le faire est, par



1. SIMPLIFICATION DES PARCOURS DE FICELLE. Le parcours $x'y'y'xz$ (A) se simplifie en $x'xz$, puis en z , ce qui signifie qu'en tirant sur la ficelle placée pour suivre le parcours $x'y'y'xz$, on obtient le parcours z . Quand la formule associée à un parcours se simplifie totalement, un tableau accroché avec une ficelle suivant ce parcours tombe quand on tire sur la ficelle. Voyons l'effet de l'élimination d'un clou sur le parcours de ficelle $xy'xyx'zyz'x'$ (B). Pour déterminer

l'effet de l'élimination du clou y , on retire tous les y et y' de la formule du parcours et on simplifie. Ici, $xy'xyx'zyz'x'$ donne $xxx'zz'x'$, qui donne $xxx'x'$, puis xx' , puis 1 . Si on enlève le clou y , le tableau tombe, mais si on enlève le clou x , le tableau reste accroché : l'élimination des x donne $y'yzyz'$ qui se simplifie en $yyzyz'$, qui ne se simplifie plus. Si on enlève le clou z , le parcours $xy'xyx'zyz'x'$ donne $xy'xyx'yx'$ qui ne se simplifie plus : le tableau reste accroché.

Toute suite de symboles pris dans G et G' désigne un élément du groupe libre de générateurs G . Lorsqu'il n'existe plus aucune simplification possible, l'élément est dit « sous sa forme canonique ». Si deux éléments n'ont pas la même forme canonique, ils sont considérés différents. Notons que l'on n'est pas autorisé à permuter les symboles présents dans une expression : dans le groupe libre à deux générateurs x et y , l'élément xy n'est pas égal à yx .

Un parcours de ficelle pour chaque formule

La mise en relation des figures faites d'une ficelle passant autour de clous plantés dans un mur avec les éléments du groupe libre est l'outil idéal pour résoudre les problèmes d'accrochage de tableaux. Pour ce faire, on associe un générateur à chaque clou planté dans le mur. S'il y a trois clous, on choisit par exemple de les noter x , y et z .

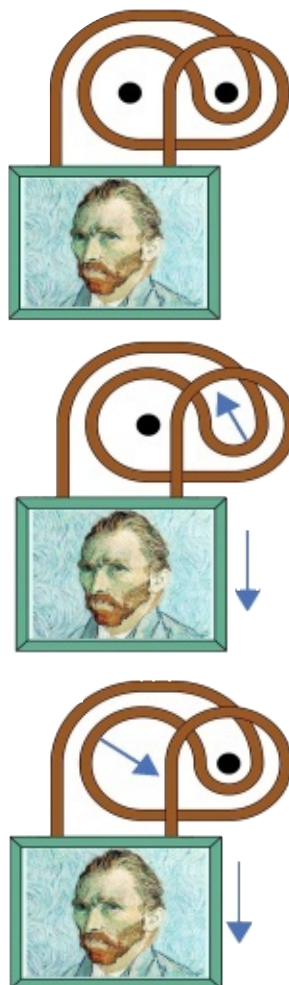
Chaque parcours d'une ficelle autour des clous est associé à un élément du groupe libre, c'est-à-dire à une suite de symboles x, y, z, x', y', z' de la manière suivante. On suit le trajet de la ficelle d'une extrémité à l'autre. À chaque fois qu'elle fait le tour du clou x dans le sens des aiguilles d'une montre, on écrit un x ; à chaque fois qu'elle fait le tour du clou x dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on écrit un x' . On procède de même pour les clous y et z .

De cette façon, à chaque élément du groupe libre se trouve associé un parcours de la ficelle autour des clous, et réciproquement. L'opération de simplification $xx' = x'x = 1$ correspond à l'idée que si la ficelle tourne autour du clou x dans le sens des aiguilles d'une montre, puis immédiatement après autour de x dans le sens

inverse, alors en tendant la ficelle (sans déplacer ou enlever de clou), le parcours de la ficelle se simplifie et fait disparaître x' .

Grâce au groupe libre et aux simplifications opérées, on saura si un tableau va tenir quand on l'accroche à une série de clous en faisant faire à la ficelle un parcours, aussi compliqué soit-il, autour des clous.

On suit le parcours de la ficelle en écrivant sa formule, une suite de symboles $x, y, z, \dots, x', y', z', \dots$. On simplifie l'expression en faisant disparaître autant que c'est possible les $xx', x'x, yy', y'y, zz', z'z$, etc. S'il ne reste plus rien à la fin du calcul, c'est que le tableau tombera (c'est un montage *Podger*) ; s'il reste quelque chose d'impossible à simplifier, c'est que le tableau restera accroché. Les lettres présentes dans la formule simplifiée indiquent les clous qui porteront le tableau.



Nous sommes maintenant armés pour transformer le problème général à n clous en un petit problème algébrique que nous pourrons traiter sans emmêler de ficelles.

Le montage *Podger*

Si l'on a un parcours autour de trois clous x, y et z , par exemple $xy'xy'yz'z'$ et qu'on enlève un clou, par exemple y , comment savoir si le tableau glisse au sol ?

C'est très simple : il suffit de retirer tous les y et y' de l'expression algébrique du parcours de la ficelle, et de simplifier ce qui reste autant que possible (*voir l'encadré 1*). Le problème des n clous est maintenant devenu purement symbolique. Il consiste à trouver une expression s (un élément du groupe libre de générateurs $x_1, x_2, \dots, x_n$) telle qu'elle ne se simplifie pas en 1 (il ne faut pas que le tableau tombe au sol quand tous les clous sont présents) et qui se simplifie en 1 quand on enlève l'un des clous, x_1 , ou $x_2, \dots$, ou x_n .

Il devient immédiat que la solution la plus courte au problème des deux clous comporte quatre symboles : $xyx'y'$ (ou $xy'x'y$, ou $x'yxy'$, ou $x'y'yx$, ou $yxxy'x'$, ou $y'xy'x'$, ou $yx'x'y'$, ou $y'x'yx$).

L'expression ne se simplifie pas et l'on voit que la suppression du clou x donne 1, de même que la suppression du clou y (*voir le dessin ci-contre*). Il existe une infinité d'autres solutions au problème des deux clous dont voici l'une d'elles, $xyyx'yx'y'y'y'$, qui est bien sûr inutilement compliquée.

Grâce à sa traduction algébrique, par tâtonnements – j’ai réellement procédé ainsi ! – on trouve assez vite une solution au problème des trois clous. Je suis tombé sur celle-ci : $x'y'zyxy'x'z'x'y$. Vérifions-la. Suppression du clou x :

$$y'zyy'z'y = y'zz'y = y'y = 1.$$

Suppression du clou y :

$$x'zx'z'x = x'zz'x = x'x = 1.$$

Suppression du clou z :

$$x'y'yx'y'x'xy = x'xy'x'xy = x'xy'y = x'x = 1.$$

Examinons maintenant le problème avec n clous. Pour le résoudre, voici une méthode générale qui fonctionne de proche en proche. On imagine qu'on dispose d'une solution pour le problème à n clous, et on en construit une pour le problème à $n + 1$ clous. Comme

2. La solution du problème à trois clous

Le problème consiste à trouver l'enroulement *Podger* de la ficelle tel que si l'on enlève un clou, la ficelle est libérée et le tableau tombe. Une fois ramené à l'algèbre, on trouve assez vite, en tâtonnant, une solution au problème des trois clous. Par exemple celle-ci (qui n'est pas unique) : $x'y'zyxy'x'z'xy$.

Suppression du clou x (A) :

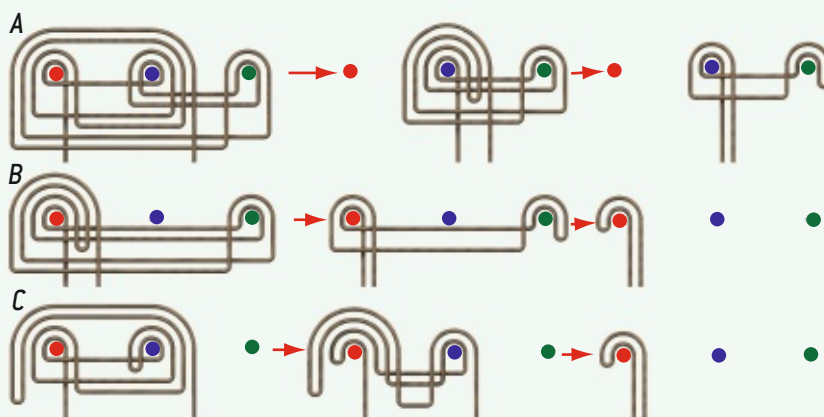
$y'zyy'z'y \rightarrow y'zz'y \rightarrow y'y \rightarrow 1$.

Suppression du clou y (B) :

$x'zxx'z'x \rightarrow x'zz'x \rightarrow x'x \rightarrow 1$.

Suppression du clou z (C) :

$x'y'xyx'xy \rightarrow x'xy'x'xy \rightarrow x'xy'y \rightarrow x'x \rightarrow 1$.



Dessins de Francesco De Comilé

3. Oncle Podger accroche un tableau

Il soulevait le tableau, et vlan ! Le tableau lui échappait, et tombait par terre. La toile était sortie du cadre. Mon oncle essayait de sauver le verre, le brisait, se coupait, sautillait par toute la pièce, cherchant son mouchoir dans tous les coins et ne le trouvait pas, pour la bonne raison qu'il était dans la poche du veston qu'il avait enlevé. Mais où avait-il mis son veston ? Il ne le savait plus ; il fallait que toute la maisonnée, cessant de chercher après ses outils, se mette en quête du veston, tandis qu'il allait et venait, affolé, barrant à chaque instant le passage à ceux qui l'aidaient.

— Il n'y a donc personne ici, criait-il, qui sache où j'ai mis mon veston ? Jamais je n'ai vu pareille collection d'empotés ! (...) Il se levait, furieux, et l'on s'apercevait alors qu'il était assis sur ce qu'il cherchait.

— Oh ! Vous pouvez vous dispenser de chercher davantage ! disait-il. Je l'ai trouvé. Je n'ai eu besoin de personne ! On ne peut compter que sur soi ! (...) Après une demi-heure passée à le panser, à lui acheter un autre verre ; quand les outils, l'escabeau, la chaise, la chandelle avaient été apportés à pied d'œuvre, l'oncle faisait un nouvel essai, toute la famille (y compris la bonne et la femme de ménage) faisant le cercle autour de lui, prête à lui rendre service. Deux personnes étaient chargées de tenir la chaise ; une troisième l'aidait à monter, à se tenir dessus ; la quatrième lui passait un clou, et naturellement, le laissait tomber.

— Là, disait-il, comme offensé, voilà ce clou perdu ! (...)

On retrouvait le clou ; mais, dans l'intervalle, l'oncle avait égaré son marteau.

— Où est mon marteau ? criait-il. Qu'est-ce que j'ai fait de mon marteau ? (...)

Nous retrouvions le marteau ; mais voilà qu'alors l'oncle ne retrouvait plus la marque qu'il avait faite sur le mur, l'endroit exact où il fallait enfoncer le clou. Chacun de nous, à tour de rôle, était invité à monter sur la chaise à côté de lui, pour voir si d'autres yeux ne pourraient pas retrouver la place. Or, chacun la trouvait en un point différent. L'oncle, alors, nous traitait d'idiots, l'un après l'autre, et nous disait de redescendre, prenait sa règle, mesurait de nouveau, trouvait qu'il lui fallait porter la moitié de trente et un pouces trois huitièmes à partir de l'angle de la pièce, cherchait à calculer cela de tête et devenait littéralement enragé.

Chacun essayait de calculer mentalement, et tous arrivaient à des résultats différents et se moquaient les uns des autres ; au milieu du tapage, l'oncle s'apercevait qu'il avait oublié la mesure. On ne savait plus de quoi il fallait trouver la moitié. Il ne restait plus qu'à recommencer. L'oncle se servait, cette fois, d'un bout de ficelle ; mais au moment où il se penchait, faisant avec la verticale un angle de quarante-cinq degrés, et tâchant de toucher un point sur le mur, trois empan au moins au-delà de ce qu'il était possible d'atteindre, la ficelle lui échappait, l'oncle

glissait, perdait l'équilibre, s'abattait sur le piano, produisant un curieux accord dissonant par la soudaineté avec laquelle sa tête et son corps avaient frappé vingt notes ensemble. (...)

Enfin, Podger marquait de nouveau la bonne place, posait dessus, de la main gauche, la pointe du clou, prenait le marteau de la main droite. Et, au premier coup, il s'écrasait le pouce, poussait un grand cri, laissait tomber le marteau sur les orteils de quelqu'un. (...)

Alors, nouvelle tentative. Au second coup, le clou traversait le plâtre d'outre en outre, la moitié du marteau aussi. Et l'oncle Podger suivait le marteau, lancé contre le mur d'un élan presque suffisant pour lui écraser complètement le nez.

Il nous appartenait de ramasser la règle et la ficelle ; on faisait un nouveau trou ; vers minuit, enfin, le tableau était accroché, un peu de travers, il est vrai, et pas très solidement, peut-être. En revanche, à plusieurs mètres alentour, le mur avait l'air d'avoir été ratissé. Tout le monde était éreinté, mort de fatigue, l'oncle Podger excepté.

Voilà ! disait-il, mettant lourdement pied à terre... sur le cor de la femme de ménage, et considérant avec un orgueil évident le désordre dont il était la cause. Je sais beaucoup de gens qui eussent dérangé un ouvrier au lieu de faire eux-mêmes une petite chose de rien du tout comme celle-là !

Jerome K. Jerome,

Trois hommes dans un bateau, 1889