

2. La solution du problème à trois clous

Le problème consiste à trouver l'enroulement *Podger* de la ficelle tel que si l'on enlève un clou, la ficelle est libérée et le tableau tombe. Une fois ramené à l'algèbre, on trouve assez vite, en tâtonnant, une solution au problème des trois clous. Par exemple celle-ci (qui n'est pas unique) : $x'y'zyxy'x'z'xy$.

Suppression du clou x (A) :

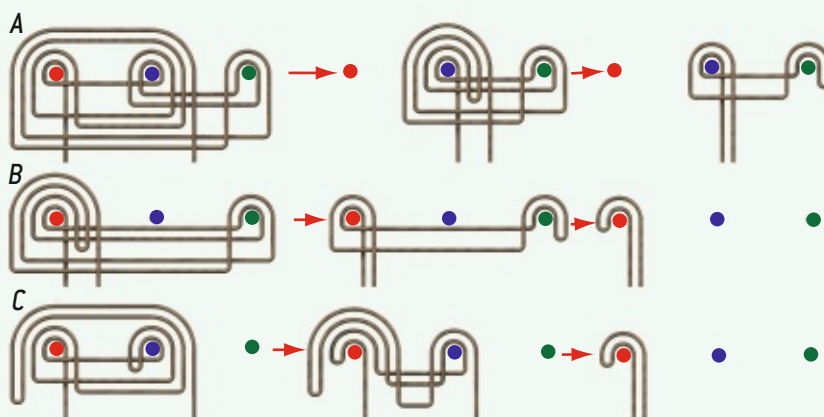
$y'zyy'z'y \rightarrow y'zz'y \rightarrow y'y \rightarrow 1$.

Suppression du clou y (B) :

$x'zxx'z'x \rightarrow x'zz'x \rightarrow x'x \rightarrow 1$.

Suppression du clou z (C) :

$x'y'xy'x'xy \rightarrow x'xy'x'xy \rightarrow x'xy'y \rightarrow x'x \rightarrow 1$.



Dessins de Francesco De Comilé

3. Oncle Podger accroche un tableau

Il soulevait le tableau, et vlan ! Le tableau lui échappait, et tombait par terre. La toile était sortie du cadre. Mon oncle essayait de sauver le verre, le brisait, se coupait, sautillait par toute la pièce, cherchant son mouchoir dans tous les coins et ne le trouvait pas, pour la bonne raison qu'il était dans la poche du veston qu'il avait enlevé. Mais où avait-il mis son veston ? Il ne le savait plus ; il fallait que toute la maisonnée, cessant de chercher après ses outils, se mette en quête du veston, tandis qu'il allait et venait, affolé, barrant à chaque instant le passage à ceux qui l'aidaient.

— Il n'y a donc personne ici, criait-il, qui sache où j'ai mis mon veston ? Jamais je n'ai vu pareille collection d'empotés ! (...) Il se levait, furieux, et l'on s'apercevait alors qu'il était assis sur ce qu'il cherchait.

— Oh ! Vous pouvez vous dispenser de chercher davantage ! disait-il. Je l'ai trouvé. Je n'ai eu besoin de personne ! On ne peut compter que sur soi ! (...) Après une demi-heure passée à le panser, à lui acheter un autre verre ; quand les outils, l'escabeau, la chaise, la chandelle avaient été apportés à pied d'œuvre, l'oncle faisait un nouvel essai, toute la famille (y compris la bonne et la femme de ménage) faisant le cercle autour de lui, prête à lui rendre service. Deux personnes étaient chargées de tenir la chaise ; une troisième l'aidait à monter, à se tenir dessus ; la quatrième lui passait un clou, et naturellement, le laissait tomber.

— Là, disait-il, comme offensé, voilà ce clou perdu ! (...)

On retrouvait le clou ; mais, dans l'intervalle, l'oncle avait égaré son marteau.

— Où est mon marteau ? criait-il. Qu'est-ce que j'ai fait de mon marteau ? (...)

Nous retrouvions le marteau ; mais voilà qu'alors l'oncle ne retrouvait plus la marque qu'il avait faite sur le mur, l'endroit exact où il fallait enfoncer le clou. Chacun de nous, à tour de rôle, était invité à monter sur la chaise à côté de lui, pour voir si d'autres yeux ne pourraient pas retrouver la place. Or, chacun la trouvait en un point différent. L'oncle, alors, nous traitait d'idiots, l'un après l'autre, et nous disait de redescendre, prenait sa règle, mesurait de nouveau, trouvait qu'il lui fallait porter la moitié de trente et un pouces trois huitièmes à partir de l'angle de la pièce, cherchait à calculer cela de tête et devenait littéralement enragé.

Chacun essayait de calculer mentalement, et tous arrivaient à des résultats différents et se moquaient les uns des autres ; au milieu du tapage, l'oncle s'apercevait qu'il avait oublié la mesure. On ne savait plus de quoi il fallait trouver la moitié. Il ne restait plus qu'à recommencer. L'oncle se servait, cette fois, d'un bout de ficelle ; mais au moment où il se penchait, faisant avec la verticale un angle de quarante-cinq degrés, et tâchant de toucher un point sur le mur, trois empan au moins au-delà de ce qu'il était possible d'atteindre, la ficelle lui échappait, l'oncle

glissait, perdait l'équilibre, s'abattait sur le piano, produisant un curieux accord dissonant par la soudaineté avec laquelle sa tête et son corps avaient frappé vingt notes ensemble. (...)

Enfin, Podger marquait de nouveau la bonne place, posait dessus, de la main gauche, la pointe du clou, prenait le marteau de la main droite. Et, au premier coup, il s'écrasait le pouce, poussait un grand cri, laissait tomber le marteau sur les orteils de quelqu'un. (...)

Alors, nouvelle tentative. Au second coup, le clou traversait le plâtre d'outre en outre, la moitié du marteau aussi. Et l'oncle Podger suivait le marteau, lancé contre le mur d'un élan presque suffisant pour lui écraser complètement le nez.

Il nous appartenait de ramasser la règle et la ficelle ; on faisait un nouveau trou ; vers minuit, enfin, le tableau était accroché, un peu de travers, il est vrai, et pas très solidement, peut-être. En revanche, à plusieurs mètres alentour, le mur avait l'air d'avoir été ratissé. Tout le monde était éreinté, mort de fatigue, l'oncle Podger excepté.

Voilà ! disait-il, mettant lourdement pied à terre... sur le cor de la femme de ménage, et considérant avec un orgueil évident le désordre dont il était la cause. Je sais beaucoup de gens qui eussent dérangé un ouvrier au lieu de faire eux-mêmes une petite chose de rien du tout comme celle-là !

Jerome K. Jerome,

Trois hommes dans un bateau, 1889

4. Une liste de dix problèmes

Problème 1 (1 parmi 3). Quand on enlève un des trois clous x_1 , x_2 ou x_3 , le tableau tombe.

Problème 2 (2 parmi 3). Quand on enlève un des trois clous x_1 , x_2 ou x_3 , le tableau reste accroché, mais si on enlève deux clous (quelconques), il tombe.

Problème 3 (1+2). Quand on enlève le clou x_1 , le tableau tombe. Quand on enlève x_2 ou x_3 , il reste accroché. Quand on enlève x_2 et x_3 , il tombe.

Problème 4 (1 parmi 4). Quand on enlève un des quatre clous x_1 , x_2 , x_3 ou x_4 , le tableau tombe.

Problème 5 (2 parmi 4). Quand on enlève un des quatre clous x , y , z ou t , le tableau reste accroché, mais si on enlève deux clous, il tombe.

Problème 6 (3 parmi 4). Quand on enlève un ou deux des quatre clous x_1 , x_2 , x_3 ou x_4 , le tableau reste accroché, mais si on enlève trois clous, il tombe.

Problème 7 (2+2 parmi 2+2). Le tableau est accroché à deux clous bleus et deux clous rouges. Quand on enlève les deux clous bleus ou les deux clous rouges, il tombe. Quand on enlève un clou bleu et un clou rouge, il reste accroché.

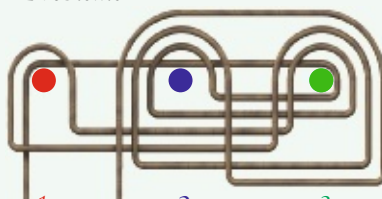
Problème 8 (1+2 parmi 2+2). Le tableau est accroché à deux clous bleus et deux clous rouges. Quand on enlève un clou bleu, il tombe. Quand on enlève les deux clous rouges, il tombe. Quand on enlève uniquement un clou rouge (et pas de bleu), il reste accroché.

Problème 9 (1+3 parmi 3+3). Le tableau est accroché à trois clous bleus et trois clous rouges. Quand on enlève un clou bleu, il tombe. Quand on enlève les trois clous rouges, il tombe. Quand on enlève uniquement un ou deux clous rouges (et pas de bleu), il reste accroché.

Problème 10 (1+2 parmi 3+3). Le tableau est accroché à trois clous bleus et trois clous rouges. Quand on enlève un clou bleu, il tombe. Quand on enlève deux clous rouges, il tombe. Quand on enlève uniquement un clou rouge (et pas de bleu), il reste accroché.

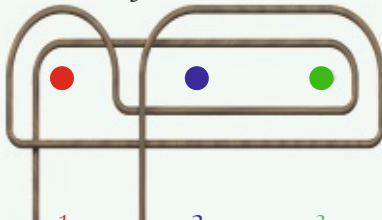
Dans les réponses ci-contre, la notation $[A, B]$ représente la formule $ABA'B'$.

Problème 1



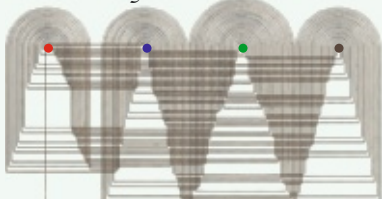
$$S_1 = x_1 x_2 x_3 x_2' x_1' x_3' x_2 x_3' x_2'$$

Problème 3



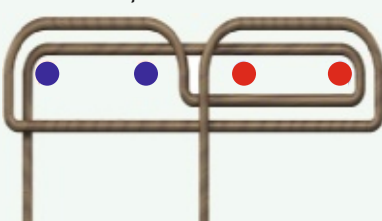
$$S_3 = [x_1, x_2 x_3] = x_1 x_2 x_3 x_1' x_2' x_3'$$

Problème 5



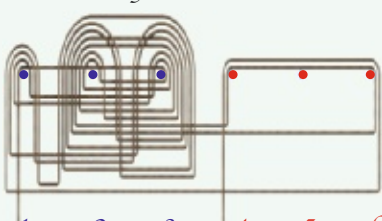
$$S_5 = [[x_1 x_2, [x_1 x_3, x_1 x_4]], [x_2 x_3, [x_2 x_4, x_3 x_4]]]$$

Problème 7



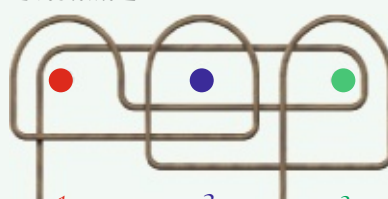
$$S_7 = [x_1 x_2, x_3 x_4] = x_1 x_2 x_3 x_4 x_2' x_1' x_4' x_3'$$

Problème 9



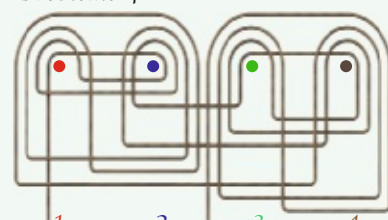
$$S_9 = [S_3, x_4 x_5 x_6]$$

Problème 2



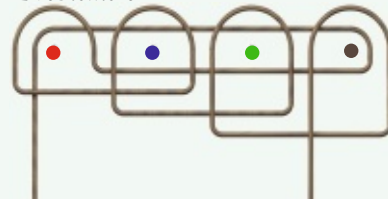
$$S_2 = x_1 x_2 x_3 x_1' x_2' x_3'$$

Problème 4



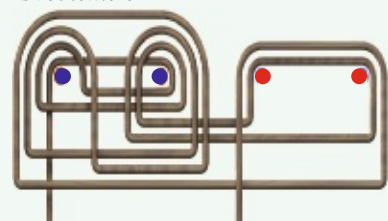
$$S_4 = x_1 x_2 x_1' x_2' x_3 x_4 x_3' x_4' x_1' x_2' x_1' x_4' x_3' x_4'$$

Problème 6



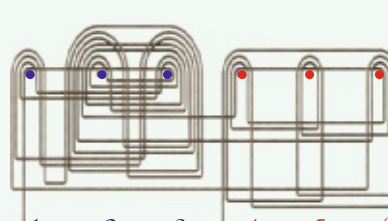
$$S_6 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_1' x_2' x_3' x_4'$$

Problème 8



$$S_8 = [S_2, x_3 x_4]$$

Problème 10



$$S_{10} = [S_3, x_4 x_5 x_6 x_4' x_5' x_6']$$

on en connaît une pour le problème à 2 clous, on pourra amorcer la construction et résoudre petit à petit le problème pour 3, 4, ..., n clous.

Soit s une solution au problème avec n clous. Notons s' la suite qui annule $s : s s' = 1$ (s' est l'« inverse » de s). C'est la suite de symboles qu'on obtient en inversant l'ordre des éléments de s , en ajoutant un « ' » sur les lettres qui n'en ont pas et en supprimant le « ' » de celles qui en ont (par exemple : $(x y z' x' y)' = y' x z y' x'$). Si z se réfère au $(n+1)$ -ième clou, alors la suite $s z s' z'$ sera une solution du problème pour $n+1$ clous. La formule permet de passer d'une solution pour n clous à une solution pour $n+1$ clous.

En effet, si on enlève une lettre parmi les n premières, s devient 1 (car c'est une solution pour n clous), de même que s' . Il ne reste alors que $z z'$, qui se simplifie en 1. Si on enlève les z , alors $s z s' z'$ devient $s s'$ qui devient 1 aussi. Chaque suppression d'un clou fait donc tomber le tableau au sol. C'est le montage *Podger* que nous voulions.

Appliquons cette méthode pour trouver la solution du problème des trois clous à partir de la solution du problème à deux clous $S_2 = x y x' y'$. On a $S_2' = y x y' x'$, et donc : $S_3 = S_2 z S_2' z' = x y x' y' z y x y' x' z'$. Ce n'est pas celle que nous avons trouvée par tâtonnements, mais elle a la même longueur. La méthode décrite donne une solution au problème des trois clous (et plus généralement au problème des n clous). Cela n'interdit pas bien sûr l'existence d'autres solutions.

Une ficelle à tout faire

De la même façon, on obtient la solution du problème des quatre clous à partir de celle pour trois clous : $S_4 = S_3 t S_3' t' = x y x' y' z y x y' x' z' t z x y x' y' z' y x y' x' t'$. Une multitude d'autres problèmes d'accrochage sont envisageables (voir l'encadré 4). Il se trouve que l'équipe de chercheurs américains a réussi l'exploit de démontrer que tout ce qu'il est envisageable de demander à une corde faisant tenir un tableau peut l'être. Voyons ce que cela signifie.

Imaginons que l'on souhaite accrocher le tableau à cinq clous x, y, z, t, u de façon qu'il tienne, mais que si on enlève les clous x et y , ou les clous x et z et t , ou les clous y et t

et u , alors il tombe, et dans aucun autre cas (c'est-à-dire quand x ou y restent, et que x ou z ou t restent, et y ou t ou u restent).

Est-ce possible ? Oui, les six chercheurs ont montré comment et leur résultat vaut pour tout problème du même type, c'est-à-dire pour toute disjonction de conjonctions (sans négation) : $(x_1 \text{ et } \dots \text{ et } x_i)$ ou $(y_1 \text{ et } \dots \text{ et } y_j)$ ou $\dots$ ou $(z_1 \text{ et } \dots \text{ et } z_k)$.

Par ailleurs, il est clair qu'on ne peut pas demander n'importe quoi. Il est par exemple impossible de disposer la ficelle pour que le tableau tombe si on enlève le clou x , mais pas si on enlève x et y . Cette condition, dite de monotonie, est en fait exactement celle qui assure qu'il y a une solution. Quand l'énoncé du problème est monotone (autrement dit pas absurde), le problème peut se réécrire comme une disjonction de conjonctions et admet donc une solution. En clair : tous les cas où l'on peut raisonnablement envisager qu'il y ait une solution sont effectivement des cas où il y a une solution, et on sait la trouver.

On n'a pas fait le tour complet des problèmes d'accrochage de tableaux. D'autres questions liées à la complexité des algorithmes à mettre en œuvre pour résoudre ces problèmes sont abordées. Certaines sont résolues et d'autres, comme c'est toujours le cas en mathématiques face à une problématique riche, sont encore ouvertes et attendent leur vainqueur. Voici deux des problèmes en attente de solution :

– La solution la plus courte (en nombre de symboles) pour traiter le problème des n clous (enlever un des clous fait tomber le tableau) compte-t-elle moins de n^2 symboles ?

– Une ficelle autour de clous soutenant un tableau étant donnée (par son parcours ou sa formule), existe-t-il un algorithme polynomial permettant de connaître le plus petit ensemble de clous qui libère le tableau ?

Lorsque vous visiterez la prochaine exposition de peinture contemporaine de tableaux monochromes (si, si, ça existe !) et que vous vous ennuierez un peu, pensez à ces problèmes qui rendent le dos des tableaux plus intéressants que leur face, et aux artistes mathématiciens qui y travaillent. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

✓ BIBLIOGRAPHIE

E. Demaine et al., *Picture-Hanging Puzzles*, *Proceedings of the 6th International Conference on Fun with Algorithms FUN 2012*, Lecture Notes in Computer Science, Venice, Italy, June 4-6, 2012. [<http://arxiv.org/pdf/1203.3602v1.pdf>]

A. Spivak, *Brainteasers B 201 : Strange painting*, *Quantum*, page 13, mai-juin 1997.

ART & SCIENCE

Van Gogh et les tournesols mutants

Certains des tournesols peints par Van Gogh à Arles ressemblent à des pompons. Des généticiens viennent d'élucider les mécanismes qui expliquent cet aspect.

Loïc MANGIN

Je suis en train de peindre avec l'entrain d'un Marseillais mangeant la bouillabaisse, ce qui ne t'étonnera pas, lorsqu'il s'agit de peindre des grands tournesols.

Van Gogh, *Lettres à Théo*.

Le 20 février 1888, Vincent Van Gogh (1853-1890) s'installe à Arles. En août de cette année, il peint sa première série des *Tournesols*. Elle est constituée de quatre tableaux et sera complétée par trois autres en janvier 1889. À chaque fois, un bouquet de 3 à 15 tournesols est placé dans un vase, sur un fond jaune ou bleu. Certains étaient destinés à décorer la chambre de Paul Gauguin, qui rejoint le peintre néerlandais en octobre 1888. D'ailleurs, dans une de ses œuvres, Gauguin a représenté Van Gogh en train de peindre un bouquet de tournesols. Peut-être *Vase avec cinq tournesols*, le tableau de la série qui fut détruit au Japon, en 1945, après un raid aérien.

À chaque fois, les tournesols sont montrés à différentes étapes de leur vie, de la floraison jusqu'au flétrissement. Mais ils se distinguent aussi par leur morphologie. En effet, certains ressemblent à des pompons ! Par exemple, sur le tableau conservé à la *National Gallery*, à Londres, on en compte sept (voir la figure a, page ci-contre). John Burke, de l'Université de Géorgie, à Athens, aux États-Unis, et ses collègues se sont intéressés aux bases génétiques de cet aspect.

Avant de décrire leurs résultats, détaillons l'anatomie d'un tournesol (*Helianthus annuus*). Il appartient à la famille des Astéracées (anciennement Composées), la plus grande du règne végétal (topinambour, pis-

senlit, pâquerette, artichaut...). Les fleurs de tournesols, nommées fleurons, sont réunies sur des capitules (un réceptacle floral charnu). Ainsi, ce que l'on nomme une « fleur » de tournesol est en fait constitué d'une multitude de fleurs vraies, les fleurons serrés sur un capitule. Dans le tournesol commun (figure b), les fleurons de la périphérie sont ligulés, c'est-à-dire qu'ils sont dotés d'une languette (la ligule, que l'on prend à tort pour un pétale), tandis que ceux du centre sont tubulés, en forme de tube (figure c) : seuls ces derniers sont pourvus d'organes reproducteurs.

Le gène muté dans les tournesols en pompons participe au contrôle de la symétrie florale.

Les tournesols en pompons sont des fleurs doubles. Dans ses *Lettres écrites de la montagne*, en 1764, Jean-Jacques Rousseau décrit le phénomène : « La fleur double est celle dont quelqu'une des parties est multipliée au-delà de son nombre naturel [...]. Ce mot de fleur double ne marque pas dans le nombre des pétales une simple duplication, mais une multiplication quelconque. » Dans les fleurs doubles de tournesol (figure d), au moins plusieurs rangs sinon la totalité des fleurons tubulés dans le type commun, dit sauvage, sont ligulés (figure e). L'équipe de J. Burke a voulu comprendre les mécanismes qui expliquent ces fleurs doubles.

Ils ont commencé par croiser des tournesols de type sauvage avec d'autres de type

fleur double. Les résultats sont conformes aux lois qu'a définies Mendel au milieu du XIX^e siècle, quelque 20 ans avant que Van Gogh ne peigne ses tournesols. Le caractère fleur double résulte de la mutation d'un seul gène et elle est dominante. D'autres croisements ont mis en évidence une seconde mutation du même gène, qui est récessive : elle se traduit par des fleurons d'un genre particulier : ils sont en forme de tube allongé et jaune, et contiennent des organes reproducteurs (voir les figures f et g). En d'autres termes, ils sont intermédiaires entre les fleurons ligulés et ceux tubulés des tournesols communs.

Les généticiens ont identifié le gène en cause et l'ont séquencé : il s'agit du gène *HaCYC2c* qui code un facteur de transcription, c'est-à-dire une protéine qui favorise l'expression d'autres gènes. La famille du gène *HaCYC2c* participe au contrôle de la symétrie florale. Dans le cas des fleurs doubles, la mutation consiste en l'insertion d'un nucléotide dans le promoteur du gène, celui-ci s'exprimant alors de façon anormale dans les fleurons centraux. Dans le second cas, la mutation résulte de l'insertion de transposons (des gènes mobiles) dans le gène lui-même et interdit son expression dans tous les fleurons.

Ce dernier type de tournesols est absent des tableaux de Van Gogh. N'en a-t-il pas trouvé ? Les trouvait-il peu esthétiques ? Ni l'histoire ni les *Lettres à Théo* ne le disent. ■

M. Chapman *et al.*, Genetic analysis of floral symmetry in Van Gogh's sunflowers reveals independent recruitment of CYCLOIDEA genes in the Asteraceae, *PLoS Genetics*, vol. 8(3), e1002628, 2012.