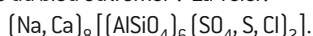


L'idée est donc venue de rechercher la présence d'un tel radical anion trisulfure dans le bleu outremer.

Le résultat, positif, a enfin donné la clé de l'énigme. Dans le bleu outremer, les radicaux résident dans les cages d'une matrice d'aluminosilicate (il s'agit plus précisément de sodalite). Leur insertion dans ces cages a lieu soit pendant la formation de la matrice, soit après, par diffusion.

Alors, finalement, quelle est la formule brute du bleu outremer ? La voici :



Et son nom chimique est la lazurite (à ne pas confondre avec l'azurite, évoquée plus haut). Cette formule compliquée ne révèle pas le secret de la couleur bleue, puisqu'elle n'explique pas le radical anion trisulfure... On comprend pourquoi deux siècles ont séparé la première analyse chimique de Marggraf et la résolution de l'énigme.

Quant à l'outremer vert observé au cours de la fabrication (voir l'encadré page ci-contre), il doit sa couleur à la présence du radical anion disulfure $\text{S}_2^{\bullet-}$, qui absorbe, lui, vers 400 nanomètres. Ainsi l'outremer peut-il apparaître bleu-vert, bleu turquoise ou vert selon les proportions de trisulfure et de disulfure. Si l'on poursuit la cuisson du bleu outremer en présence d'air en excès, on obtient encore d'autres teintes, comme l'a rapporté Émile Guimet en 1878 : « La matière prend une nuance violette, puis rouge ou plutôt rose, et enfin l'outremer devient blanc. » Enfin, en remplaçant le soufre par du sélénium ou du tellure (dont la configuration électronique de la couche externe est la même que celle du soufre), on obtient des « outremer » rouge ou jaune, ce que Émile Guimet et Jules Plicque avaient déjà observé dans les années 1870. Décidément, l'outremer en aura fait voir de toutes les couleurs aux chimistes !

BIBLIOGRAPHIE

B. Valeur, **La couleur dans tous ses éclats**, Belin, 2011.

B. Valeur, **La chimie crée sa couleur... sur la palette du peintre**, dans *La chimie et l'art*, EDP-Sciences, pp.129-167, 2010.

F. Delamarre, **Bleus en poudre. De l'art à l'industrie, 5 000 ans d'innovation**, Presses des Mines ParisTech, 2007.

D. Bonnard, **Le bleu outremer : invention(s) d'un pigment**, *La revue du Musée des arts et métiers*, pp. 26-35, n° 46-47, octobre 2006.

J. Mertens, **The history of artificial ultramarine (1787-1844) : science, industry and secrecy**, *Ambix*, vol. LI, n° 3, pp. 219-244, 2004.



LOGIQUE & CALCUL

Les plaisirs du rectangle

Trois mille ans de géométrie n'ont pas épuisé tout ce qu'un mathématicien peut dire de l'élémentaire figure géométrique du rectangle.

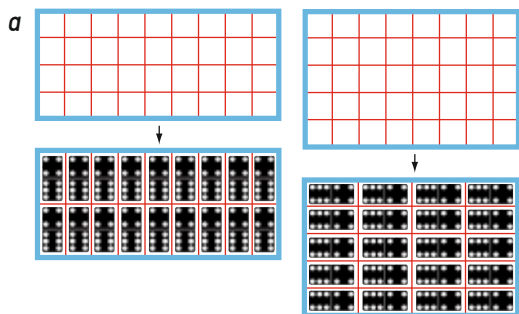
Jean-Paul DELAHAYE

Q uoi de plus simple qu'un rectangle ! Pourtant ce rectangle recèle des problèmes aux beautés cachées : nous allons en voir certains qui sont inattendus. Vous serez sans doute surpris de découvrir que nombres d'entre eux sont assez récents.

Commençons par des questions élémentaires. Le problème du recouvrement d'un damier rectangulaire de côtés entiers n et m par des dominos (rectangles 1×2) est assez facile. Si n et m sont impairs, le recouvrement est impossible, car le nombre total de carrés est impair. Si n ou m est pair, c'est possible : on aligne des dominos horizontalement ou verticalement selon que n ou m est pair (voir la figure a).

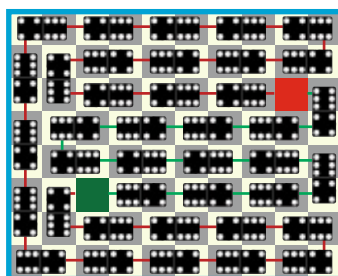
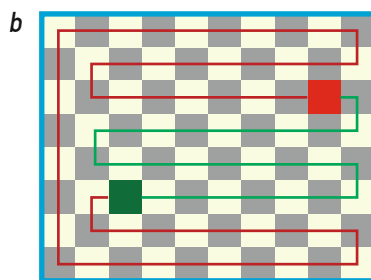
Découpage et coloriages

L'exploitation d'un coloriage bicoloré en damier permet de résoudre toutes les questions du type suivant : en enlevant deux carrés (1×1) d'un rectangle $n \times m$ (n ou m pair), peut-on encore recouvrir ce qui reste du rectangle avec des dominos ?



Si les deux carrés enlevés sont de la même couleur, par exemple aux deux coins diagonalement opposés, la réponse est négative : chaque domino recouvrant une case noire et une case blanche, il y a maintenant deux cases de plus d'une des couleurs. Si les deux cases enlevées sont de couleurs différentes, alors le rectangle diminué des deux cases peut être pavé par des dominos : on considère un chemin qui revient à son point de départ et qui passe par toutes les cases (si n ou m est pair, il existe) ; en enlevant deux cases de couleurs différentes, il reste deux bouts de chemin de longueur paire (en vert et en rouge sur la figure b), qu'il est facile de recouvrir par des dominos.

Ces raisonnements par coloriage sont puissants et parfois subtils. Ainsi, comment

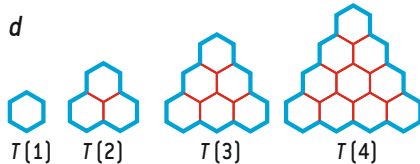


prouver que l'on ne peut pas recouvrir exactement un damier 10×14 avec des rectangles 1×4 , bien que 140 soit un multiple de 4 ? Colorions le damier avec quatre couleurs comme sur la figure c (ci-dessous). En

posant verticalement ou horizontalement un rectangle 1×4 sur les cases de ce coloriage, il couvre nécessairement deux cases d'une couleur et deux cases d'une autre couleur. Si on pouvait recouvrir le damier 10×14 avec des dominos 1×4 , le nombre de cases vertes (par exemple) couvertes serait donc pair. C'est impossible, car il y a 35 cases vertes. Le même raisonnement montre qu'on ne recouvrira jamais par des rectangles 1×4 les rectangles 6×6 , 6×10 , 6×14 , 10×10 , 10×14 , et plus généralement les rectangles $(4n + 2) \times (4m + 2)$ qui ont pourtant tous un nombre de cases multiple de 4.

Notons que les raisonnements avec des coloriages ne peuvent pas démontrer toutes les impossibilités de recouvrement : en 1990, John Conway et Jeffrey Lagarias, après avoir étudié soigneusement ce que peuvent donner les arguments de coloriages, ont proposé un problème dont ils ont démontré qu'il est impossible à résoudre par un argument de coloriage.

Ce résultat ne concerne pas les rectangles, mais les figures $T(n)$ formées d'hexagones juxtaposés (voir la figure d). J. Conway et J. Lagarias ont montré que $T(n)$ est pavable par des copies de $T(2)$ si $n = 12k$ ou $n = 12k + 2$ ou $n = 12k + 9$ ou $n = 12k + 11$. Dans les autres cas, le pavage de $T(n)$ par $T(2)$ est impossible, mais aucun argument de coloriage n'aboutira.



Pavages par rectangles 1×2 et 1×3

Les pavages par les rectangles 1×2 et 1×3 semblent faciles à obtenir. C'est à la fois vrai et faux. D'une part, d'après un résultat démontré en 1995 par Danièle Beauquier, Maurice Nivat, Eric Remila et Mike Robson, le problème *Une figure composée de carrés juxtaposés est-elle pavable par des rectangles 1×2 placés horizontalement et des rectangles 1×3 placés verticalement ?* est NP-complet. Il s'ensuit qu'on ne connaît aucun algorithme fonctionnant en temps polynomial qui réponde à la question. Les problèmes NP-complets sont considérés comme impossibles à résoudre en pratique : les temps de résolution croissent trop vite quand la valeur des données augmente.

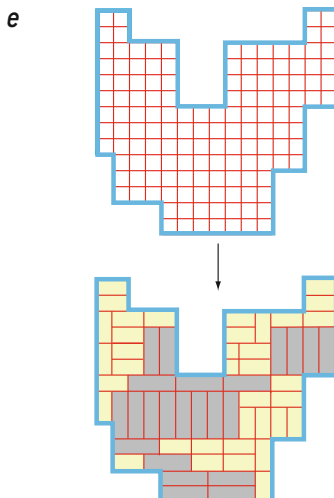
D'autre part, parallèlement au résultat indiquant qu'il est difficile de trouver les pavages envisagés par les rectangles 1×2 et 1×3 , un résultat affirme que ce type de pavage est parfois facile à trouver : si on n'impose plus le positionnement horizontal des rectangles 1×2 et vertical des rectangles 1×3 , alors tout change. E. Remila a établi que le problème *Une figure composée de carrés juxtaposés est-elle pavable par des rectangles 1×2 et 1×3 (sans contrainte d'horizontalité ou de verticalité) ?* se traite en temps proportionnel au nombre de carrés de la figure à paver, c'est-à-dire rapidement (voir la figure e).

Les démonstrations de ces deux résultats sont bien sûr assez délicates et nous

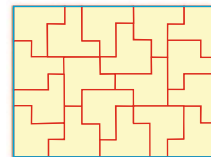
ne les détaillerons pas, mais elles illustrent l'idée que la prise en considération des algorithmes introduit un intéressant renouvellement en géométrie : les mathématiciens étendent toujours les domaines sur lesquels leur curiosité se porte.

Les problèmes de pavage avec des dominos, ou plus généralement des polyminos (formes composées de plusieurs carrés juxtaposés), n'ont pas qu'un intérêt ludique. David Vanderhaeghe, de l'INRIA à Grenoble, et Victor Ostromoukhov, de l'Université de Montréal, ont conçu en 2008 une méthode de représentation graphique fondée sur les pavages de rectangles à l'aide de polyminos permettant un meilleur rendu esthétique. Le découpage d'une image en « pixels » pas trop réguliers et pas trop bien rangés est meilleur que les codages tirés des réseaux totalement réguliers habituels faits de grilles rectangulaires. Partant d'un pavage de rectangles par un polymino fixé (étudiés soigneusement par Michael Reid dans les années 1990), on en déduit un pavage du polymino par lui-même (voir les figures f et g). Ce pavage utilisé plusieurs fois permet de découper facilement tout rectangle en « pixels » irréguliers aussi fins qu'on le souhaite.

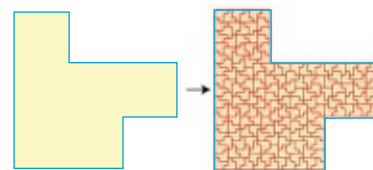
Le problème le plus simple concernant le pavage de rectangles par des rectangles et qui généralise celui du rectangle 10×14 cité plus haut est le suivant : *Dans quels cas des copies d'un petit rectangle $a \times b$ remplissent-elles exacte-*



f



g



ment un grand rectangle $n \times m$? (n , m , a et b sont des entiers). Les travaux de Nicolaas de Bruijn et David Klarner ont résolu la question en 1969. Le rectangle $n \times m$ peut être recouvert par des rectangles $a \times b$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

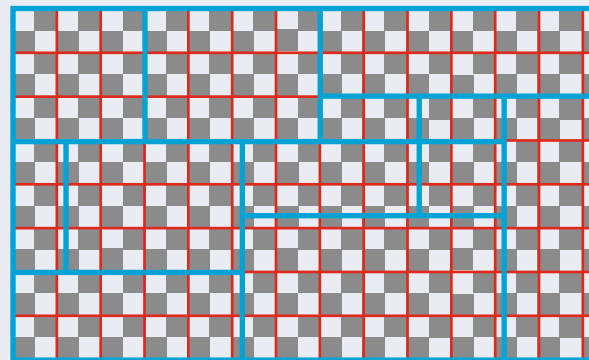
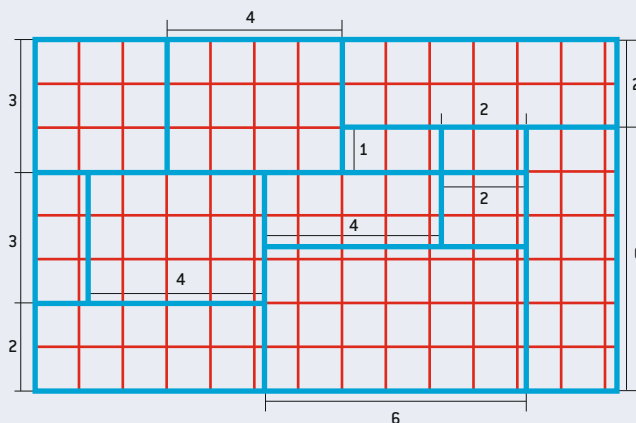
- (1) nm est multiple de ab ;
- (2) n et m peuvent chacun s'écrire comme une somme de a et de b ;
- (3) (n ou m est multiple de a) et (n ou m est multiple de b).

Paver un rectangle avec des copies d'un même rectangle

Réfléchissons aux trois conditions. La condition (1) est évidemment nécessaire. La condition (2) est elle aussi nécessaire car, si un pavage existe, en suivant le bord de longueur n du rectangle pavé, on trouvera une somme de a et de b donnant n , par exemple $2a + 5b$. De même pour m . La troisième condition est aussi nécessaire, mais cette fois, c'est nettement moins évident (si ça l'était, le résultat aurait été démontré bien avant 1969 !). Notons que si (3) est vérifiée, il se peut que ce soit n qui soit à la fois multiple de a et multiple de b , et alors m peut donc n'être multiple ni de a ni de b . Nous reviendrons un peu plus loin sur cette condition (3).

Pour voir l'intérêt du résultat de de Bruijn et Klarner, voici quelques exemples de son application. Un argument de coloriage démontre l'impossibilité du pavage du rectangle 10×14 par des pavés 1×4 , impossibilité vue auparavant. Elle n'est pas étonnante, car le théorème général la

1. Le théorème de transfert

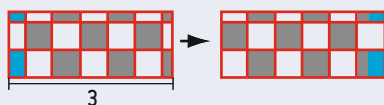


Le théorème de transfert stipule : Si un rectangle est pavé par des rectangles ayant tous au moins un côté de longueur entière, alors lui-même possède au moins un côté de longueur entière.

Démontrons-le. Soit un rectangle de côtés a et b , dont on suppose qu'il est pavé par des tuiles rectangulaires (éventuellement différentes) dont chacune possède au moins un côté de longueur entière. Supposons que ni a ni b ne sont des nombres entiers. Cela va nous conduire à une contradiction et donc à la conclusion recherchée (a ou b est entier).

(1) On dessine un damier sur le grand rectangle en prenant des carrés de côté de longueur $1/2$. On débute le coloriage en damier dans le coin en bas à gauche en y plaçant un carré noir (comme ci-dessus à droite).

Chaque tuile rectangulaire ayant un côté de longueur entière et posée horizontalement ou verticalement sur ce damier recouvre une aire égale de blanc et de noir. En effet, son côté entier correspond exactement à un nombre pair de carreaux du damier (comme illustré ci-dessous).

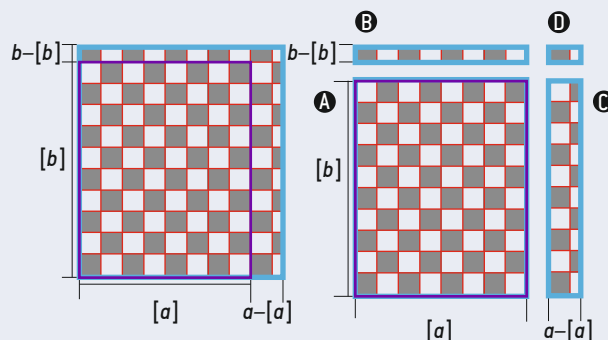


L'hypothèse que le rectangle de côtés a et b est entièrement pavé par des rectangles ayant chacun un côté de longueur entière, donc recouvrant autant de noir que de blanc, entraîne qu'il contient lui-même la même aire en blanc et en noir.

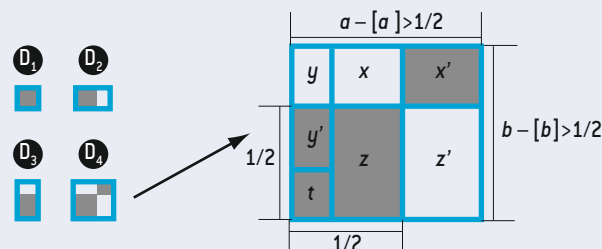
(2) Examinons comment se présente le rectangle dans son ensemble, en faisant apparaître le rectangle de côtés $[a]$ et $[b]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x (ainsi, $[3,14] = 3$). Prenons l'exemple $[a] = 4$ et $[b] = 5$ (ci-contre au milieu). En prolongeant les côtés de ce rectangle contenu dans le rectangle de côtés a et b , on découpe quatre rectangles notés A, B, C et D (voir le dessin). Le rectangle A a une aire blanche égale à l'aire noire, car il est composé de blocs de deux carrés noirs et deux carrés blancs. Il en est de même des rectangles B et C (cela provient, comme en (1), du fait que chacun de ces rectangles a un côté de longueur entière). Reste à étudier le petit rectangle D.

(3) L'hypothèse que ni a ni b ne sont entiers signifie que $[a] < a < [a] + 1$ et $[b] < b < [b] + 1$. Quatre cas sont à considérer selon que la différence

entre a et $[a]$ est inférieure à $1/2$ ou non, et selon que la différence entre b et $[b]$ est inférieure à $1/2$ ou non. Notons-les D_1, D_2, D_3 et D_4 . Nous allons montrer que l'aire noire de chacun de ces rectangles est supérieure à son aire blanche.



Pour les trois premiers, c'est évident. Pour D_4 , il faut y regarder de plus près; mais en découpant D_4 comme le montre la version agrandie de D_4 (ci-dessous), on voit que lui aussi contient plus de noir que de blanc. Sur le dessin, les aires x et x' sont égales, de même que y et y' et z et z' . L'aire de t est donc égale à l'aire noire en excès dans D_4 .

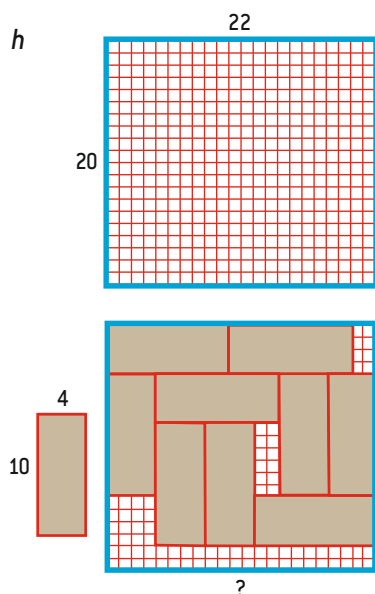


(4) Au total, pour le grand rectangle, l'aire noire est strictement plus grande que l'aire blanche. C'est en contradiction avec la conclusion du paragraphe (1). Il en résulte que l'hypothèse initiale, que ni a ni b n'étaient des entiers, est fautive. Le côté a ou le côté b est entier.

redonne ; la condition (3) n'est pas satisfaite, ni n ni m ne sont multiples de 4.

Le rectangle 16×25 peut-il être pavé par le rectangle 1×10 ? Là encore, (1) et (2) sont vérifiées, mais (3) ne l'est pas. Le pavage est impossible.

Le rectangle 21×11 peut-il être pavé par le rectangle 7×3 ? La condition (1) est vérifiée, la condition (3) aussi, mais pas la condition (2) : 11 n'est pas somme du nombre 7 (pris zéro, une ou plusieurs fois) et du nombre 3 (pris zéro, une ou plusieurs fois). Le pavage est impossible.



Le rectangle 22×20 peut-il être pavé par le rectangle 4×10 (voir la figure h) ? La condition (1) est vérifiée, la condition (3) aussi et la condition (2) est vérifiée, puisque $22 = 10 + 4 + 4 + 4$. Le pavage est possible : trouvez-le !

Transferts de propriété

Pour établir que lorsqu'on veut paver un rectangle $n \times m$ par des rectangles $a \times b$, la condition (3) doit être vérifiée, nous allons utiliser un théorème que nous nommerons « théorème de transfert » :

Si R un rectangle est pavé par une famille de tuiles rectangulaires dont chacune a au moins un de ses côtés de longueur

entière, alors R a au moins, lui aussi, un côté de longueur entière.

Il y a « transfert », des petits rectangles vers le grand rectangle pavé, de la propriété « avoir au moins un côté de longueur entière » que possède chaque petit rectangle du pavage. Ne croyez pas que la démonstration soit évidente (voir l'encadré 1).

Ce résultat est particulièrement intéressant pour de nombreuses raisons. Une première démonstration utilisait un calcul avec des intégrales doubles. En 1985, Hugh Montgomery, sans doute étonné de la difficulté des démonstrations connues, demanda à ses collègues, lors d'une réunion de l'Association américaine de

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

2. Célèbres dissections

Une célèbre question de découpage de rectangle qui a donné lieu à de nombreux travaux est celle de savoir s'il est possible de paver un rectangle (ou un carré) avec des carrés de tailles toutes différentes.

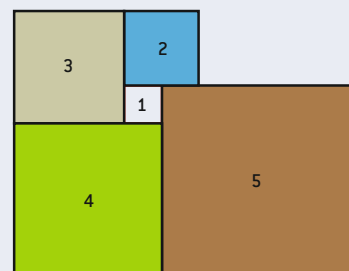
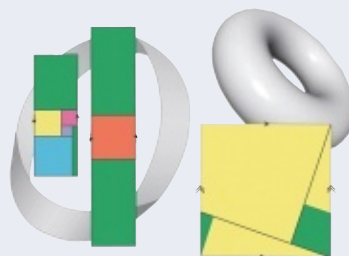
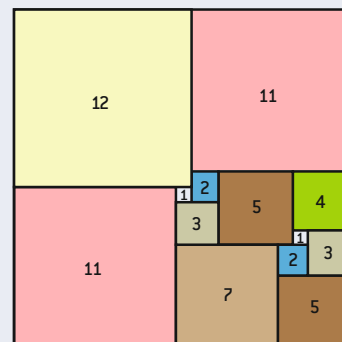
Le site de Stuart Anderson (<http://www.squaring.net/index.html>) vous donnera toutes les informations sur le sujet : histoire, résultats détaillés, recherches récentes. Parmi les variantes du problème, en voici trois.

1. On recherche les carrés pavables par des carrés et tels qu'aucun autre groupement de carrés du pavage ne forme un rectangle. Voici par exemple (ci-contre) le pavage « sans rectangle » du carré 23×23 . Une thèse de doctorat sur le sujet a été soutenue en 1999 à Marseille par Ian Gambini ; elle propose des algorithmes efficaces pour résoudre ce type de problèmes et le travail a permis la découverte de nombreux nouveaux pavages du carré.

Le carré pavable en carrés de tailles différentes ayant le plus petit nombre de carrés en contient 21. Il a été découvert en 1978 par A. Duivestijn, qui a démontré qu'on ne pouvait faire mieux que 21, et que la solution avec 21 carrés était unique.

2. On recherche un pavage du carré par des carrés de tailles différentes, mais, au lieu de se placer sur le plan, Ian Stewart se place sur la surface d'une bande de Moëbius (deux côtés du carré sont collés en inversant le sens) ou d'un tore (les côtés haut et bas, et droit et gauche sont collés sans inverser le sens) : on recolle les côtés en superposant les flèches.

3. Un étonnant résultat a été démontré en 2008 par Frederick Henle et James Henle : il est possible de paver le plan entier avec des carrés de côtés 1, 2, 3, ..., n , ... en utilisant chacun de ces carrés une et une seule fois. Ci-contre, le début (facile) de ce pavage.



mathématiques de trouver des preuves plus simples. Quelques mois plus tard, Stan Wagon publia un article qui proposait 14 démonstrations ! L'une d'elles est donnée dans l'encadré 1. Il faut bien se concentrer, mais c'est une démonstration uniquement graphique... utilisant un coloriage.

Cette collection de démonstrations d'un même résultat pas vraiment évident a été l'occasion de réfléchir à quelques questions que les mathématiciens se posent régulièrement : qu'est-ce qu'une bonne démonstration ? Quelle est la plus belle démonstration d'un résultat donné ? Un accord unanime est-il toujours possible pour désigner la meilleure démonstration ?

Dans le cas du théorème de transfert, la situation est particulièrement riche. Les avis sont partagés sur la meilleure preuve. Certaines preuves sont assez courtes, mais exigent des connaissances préalables que peu de gens possèdent. Certaines preuves se généralisent facilement et sem-

blent donc receler un potentiel intéressant, mais plusieurs généralisations différentes sont envisageables et, du coup, le choix d'une meilleure preuve fondée sur le critère de généralisation ne conduit pas, lui non plus, à une réponse unanime : la notion de meilleure preuve est affaire de goût.

Parmi les généralisations du théorème de transfert pour les rectangles, citons en deux, intéressantes parce qu'elles montrent que, même en géométrie, la théorie des nombres n'est pas loin (ce qu'un autre résultat cité plus loin confirmera). La première est facile, mais pas la seconde.

- Transfert de la propriété « avoir un côté rationnel » : Si R est un rectangle pavé par une famille de tuiles rectangulaires et si chaque tuile du pavage a au moins un côté de longueur rationnelle (c'est-à-dire de la forme p/q où p et q sont des entiers), alors R possède aussi cette propriété.

- Transfert de la propriété « avoir un côté algébrique » : Si R est un rectangle pavé

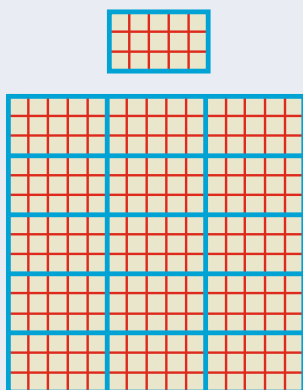
par une famille de tuiles rectangulaires dont chacune a au moins un côté dont la longueur est un nombre algébrique (c'est-à-dire un nombre solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers), alors R possède aussi cette propriété.

Revenons à la propriété (3) rencontrée quand nous avons considéré le problème du pavage d'un rectangle $n \times m$ par des copies du rectangle $a \times b$. Est-il vrai que, si un tel pavage est possible, alors nécessairement d'une part, n ou m est multiple de a et, d'autre part, n ou m est multiple de b ?

Voici le raisonnement qui prouve que oui. Prenons un rectangle $n \times m$ pavé par des copies du rectangle $a \times b$. Opérons la transformation, nommée homothétie, qui réduit toutes les tailles du facteur a . Nous avons maintenant un rectangle $(n/a) \times (m/a)$ pavé par des copies du rectangle $1 \times (b/a)$ qui possède un côté de longueur entière. D'après le théorème de transfert, n/a ou m/a est lui aussi un entier, et donc n ou m est multiple

3. Pavage d'un carré par des rectangles semblables

Un carré de côté 1 étant donné, il est facile de voir que pour tout nombre rationnel p/q (p et q entiers positifs), on peut le paver par des rectangles de proportions $1 \times (p/q)$. Cela résulte de ce qu'on sait paver le carré de côté pq par des rectangles $q \times p$ puisque les trois conditions (1), (2) et (3) du théorème énoncées sont satisfaites. Voici par exemple le pavage pour le rapport $3/5$.



La question se pose alors naturellement de savoir pour quels nombres réels t il existe un pavage du carré 1×1 par des rectangles de proportions $1 \times t$.

D'autres pavages que ceux, très réguliers, qu'on trouve quand on suppose t rationnel sont sans doute envisageables. Peut-on par exemple avoir un pavage de la forme ci-contre à droite, fait de trois rectangles semblables ?

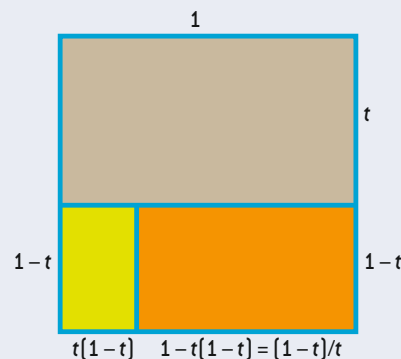
Supposons que c'est possible et notons t le rapport hauteur/longueur des trois rectangles. Le rectangle marron a pour hauteur t . Le rectangle jaune a donc comme côtés $1-t$ et $t(1-t)$. Par soustraction, cela implique que le rectangle orange a pour côtés $1-t(1-t)$ et $1-t$. La construction sera satisfaisante si ce dernier rectangle a les bonnes proportions, c'est-à-dire si :

$$t = (1-t)/(1-t(1-t)),$$

ce qui donne : $t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0$.

Il s'agit d'un polynôme de degré 3 possédant une racine réelle unique, qui est 0,569 840 291... C'est donc la proportion qu'il faut donner exactement aux rectangles pour que le pavage du carré soit correct.

Le fait d'être tombé sur un polynôme à coefficients entiers n'est pas un hasard. Tout pavage d'un carré par des rectangles de tailles différentes, mais ayant les mêmes proportions, conduit aussi à découvrir que cette proportion t est solution d'une équation polynomiale à coefficients



entiers. Le plus étonnant est que la réciproque est presque vraie. Chris Freiling, Dan Rinne, Miklos Laczkovich et György Szekeres ont en effet démontré le remarquable résultat suivant :

Un carré peut être pavé par des rectangles semblables à un rectangle $1 \times t$ si et seulement si t est un nombre algébrique (racine d'un polynôme à coefficients entiers) et que toutes les racines de son polynôme minimal ont une partie réelle positive.

La condition « toutes les racines du polynôme minimal ont une partie réelle positive » est un peu mystérieuse ; elle ne semble pas avoir d'interprétation géométrique simple.

de a . De même, n ou m est un multiple de b . C'est ce que nous voulions obtenir.

Découpage du carré et trisections

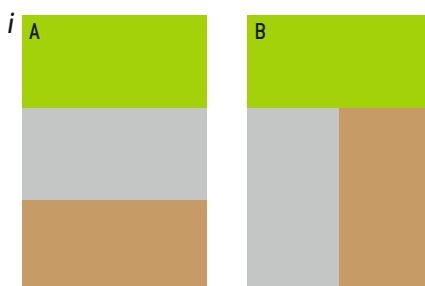
Un étonnant résultat, démontré indépendamment par C. Freiling et D. Rinne en 1994, puis par M. Laczkovich et G. Szekeres en 1995, affirme qu'un simple problème de pavage par des rectangles conduit inéluctablement à considérer l'idée de nombre algébrique (nombre solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers, tel $\sqrt{2}$ qui est solution de $x^2 = 2$), et la notion de polynôme minimal : le polynôme de plus petit degré dont x (un nombre algébrique) est solution. Voici ce remarquable résultat où les rectangles nous précipitent vers la théorie des nombres :

Un carré peut être pavé par des rectangles semblables à un rectangle $1 \times t$ si et seulement si t est un nombre algébrique et si toutes les racines de son polynôme minimal (certaines sont peut-être des nombres complexes) ont une partie réelle positive [voir l'encadré 3].

Notons les étranges conséquences de ce théorème : un carré ne peut pas être pavé par des rectangles de proportions $1 \times \sqrt[3]{2}$, alors qu'on peut le paver par des rectangles de proportions $1 \times (1 + \sqrt[3]{2})$. En effet, d'une part, le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ est $x^3 = 2$, dont les deux racines complexes ont une partie réelle négative ; d'autre part, le polynôme minimal de $(1 + \sqrt[3]{2})$ est $(x - 1)^3 = 2$, dont les racines complexes ont une partie réelle positive.

Parmi les énoncés simples concernant les rectangles, un singulier et amusant théorème a été démontré en 1992 par Samuel Maltby. Imaginons que l'on souhaite découper un champ rectangulaire en trois parties superposables (c'est-à-dire ayant exactement la même forme, et donc la même aire). Est-ce possible ? Il y a bien sûr le découpage A (voir la figure i), qui convient pour tout rectangle (et dont l'idée se généralise pour découper un rectangle en n parties superposables, pour tout $n \geq 1$). Lorsque le rapport entre la hauteur et la largeur est $3/2$, il y a aussi le découpage B.

Le théorème de Maltby, dont la démonstration occupe une bonne dizaine de pages, affirme qu'aucune « trisection du rectangle » autre que ces deux méthodes évidentes n'est possible. Le propriétaire d'un champ rectangulaire qui veut faire un partage parfaitement équitable de son champ entre ses trois enfants est obligé de leur laisser des rectangles !



Découpage en triangles de même aire

Terminons cette petite exploration (partielle) des résultats récents concernant le rectangle par le difficile (et pourtant simple à énoncer) théorème de Paul Monsky :

Si un carré (ou un rectangle) est pavé par des triangles de même aire, alors le nombre de triangles est pair.

Ce résultat qui date de 1970 a été généralisé en 1999 par Sherman Stein à tout polymino composé d'un nombre impair de carrés. Il établit donc l'impossibilité de découper chaque élément de cette famille infinie de formes en un nombre impair de triangles de même aire... ce qui semble mystérieux !

Il y a deux mois, nous avons indiqué dans cette rubrique qu'une exposition de tableaux monochromes pouvait devenir intéressante en retournant les tableaux contre les murs, car les problèmes d'accrochage sont riches en énigmes mathématiques. Maintenant, pour vous adonner à la contemplation et à la méditation mathématiques, vous savez qu'il n'est même pas nécessaire de retourner les tableaux : le rectangle du cadre, à lui tout seul, est une source inépuisable d'inspiration. ■

BIBLIOGRAPHIE

S. Anderson, *Tiling by squares*, 2012, www.squaring.net/index.html

B. Sury, *Group theory and tiling problems*, *Symmetry: A Multi-Disciplinary Perspective*, vol. 16, pp. 97-117, 2011.

F. Ardila et R. Stanley, *Tilings*, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 32(4), pp. 32-43, 2010.

C. Freiling et al., *Rectangling a rectangle*, *Discrete & Computational Geometry*, vol. 17(2), pp. 217-225, 1997.

M. Reid, *Tiling rectangles and half strips with congruent polyominoes*, *Journal of Combinatorial Theory A*, vol. 80(1), pp. 106-123, 1997.

J. H. Conway et J. C. Lagarias, *Tiling with polyominoes and combinatorial group theory*, *Journal of Combinatorial Theory A*, vol. 53, pp. 183-208, 1990.

S. Wagon, *Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle*, *Amer. Math. Monthly*, vol. 94, pp. 601-617, 1987.

ART & SCIENCE

La table qui se prenait pour un manuel de géologie

En remerciement de ses bons offices, l'électeur de Saxe Frédéric-Auguste III a offert au baron de Breteuil une table qui est aussi un cabinet de minéralogie : elle révèle la diversité des ressources géologiques de la Saxe.

Loïc MANGIN

Le 30 décembre 1777, Maximilien-Joseph, dit « Le Bon », électeur de Bavière, meurt sans descendant. Son héritier légitime est Charles-Théodore de Sulzbach, mais d'autres prétendants se manifestent, dont l'électeur de Saxe Frédéric-Auguste III et l'empereur Joseph II. La Prusse et la Russie sont aussi de la partie et la guerre menace. De son côté, le roi de France, Louis XVI, s'inquiète et multiplie les initiatives diplomatiques. Début 1779, tous les acteurs se rassemblent à Teschen, aujourd'hui au Sud de la Pologne. Au cœur des négociations, le baron de Breteuil, ambassadeur français à Vienne, et le prince russe Repnine. Et enfin, le 13 mai 1779 est signé un traité de paix. Le rôle de Breteuil fut si prépondérant que beaucoup souhaitèrent le remercier.

Il reçut de Frédéric-Auguste III une table (voir la photographie, page ci-contre), visible cet automne à la Galerie J. Kugel, à Paris. Elle fut confectionnée par l'orfèvre Johann Christian Neuber (1735-1808). Ce dernier était déjà célèbre pour son travail de lapidaire qu'il appliquait à différents objets en vogue à la fin du XVIII^e siècle. Les plus réputés sont des « galaneries » (carnets de bal, étuis à cire...) et des tabatières. Neuber utilisait la technique de mosaïque en cloisonné (les pièces sont enchâssées dans un cadre en métal). Sa renommée grandit encore quand il inventa les « tabatières formant cabinet minéralogique » : l'idée était de flatter l'intérêt naissant pour les sciences, et notamment la minéralogie, en insérant dans la mosaïque divers échantillons de roches et de minéraux sélectionnés pour leur qualité (beauté, rareté...). Chaque tabatière était

accompagnée d'un manuel énumérant la nature et l'origine des minéraux employés.

Ce principe a également été choisi pour l'élaboration de la table, à un changement d'échelle près : les tabatières ont au plus 10 centimètres de longueur, alors que la table a un diamètre de 71 centimètres ! Le plateau de la table est lui aussi un cabinet minéralogique rassemblant 128 échantillons (sous la forme de plaquettes) numérotés et dûment décrits dans un livret fourni avec le meuble, glissé dans un tiroir discret. Klaus Thalheim, conservateur au musée de minéralogie et de géologie de Dresde, en Allemagne, a étudié cette table dite de Breteuil.

Insérées dans la table de Breteuil, les pierres les plus célèbres de Saxe sont les topazes de Schneckenstein.

Neuber a voulu montrer la diversité des roches et des minéraux que recèle la Saxe. On trouve beaucoup de calcédoines (composés entre autres de silice) sous la forme de plusieurs variétés, tels l'agate, le jaspe, la cornaline... On peut aussi repérer des pierres fines (topaze, grenat...) ainsi qu'une perle (pièce n° 1) rassemblées autour du médaillon central.

Cependant, les connaissances de l'époque ne lui permirent pas d'identifier tous les échantillons retenus qui, de par la taille requise, devaient provenir des plus beaux spécimens de sa propre collection. Ainsi, dans le livret, on note 11 fois le terme « caillou ». Par ailleurs, certains minéraux ont été mal

interprétés. Par exemple, la pièce numérotée 2 est selon Neuber une aigue-marine, alors qu'il s'agit d'une topaze bleu clair. Les deux minéraux sont bien des silicates, mais le premier (de formule $\text{Be}_3\text{Al}_2\text{Si}_6\text{O}_{18}$) se distingue du second (de formule $\text{Al}_2\text{SiO}_4(\text{F},\text{OH})_2$) par la présence de béryllium (Be). De même, l'échantillon 10, noté « Crisolite » par Neuber, est également une topaze (verte).

À la fin du XVIII^e siècle, le géologue le plus influent en Europe était Abraham Werner, installé à Freiberg, en Saxe. Il avait mis au point une classification des minéraux fondée sur leur couleur, leur brillance... Neuber s'est sans doute inspiré de ces travaux en privilégiant des dénominations descriptives. Toutefois, la géologie n'était pas encore une science fixée et plusieurs systèmes étaient en usage.

La plupart des échantillons ont pu être identifiés d'après les critères de classification actuels par K. Thalheim, à l'exception de quatre plaquettes pour lesquelles les indications sont insuffisantes. Les pierres les plus célèbres de Saxe sont les topazes de Schneckenstein, à proximité de la frontière tchèque (5, 8, 10 et 16) : il y a 310 millions d'années, du magma de granite s'est introduit dans des schistes, ce qui a conduit, après un phénomène nommé pneumatolyse, à la formation d'un quartz-tourmaline contenant ces topazes. La table, conservée au château de Breteuil, dans les Yvelines, est désormais un précieux manuel de minéralogie. ■

« Le luxe, le goût, la science... », Neuber, orfèvre minéralogiste à la cour de Saxe, du 13 septembre au 10 novembre 2012, à la Galerie J. Kugel, 25, quai Anatole France, 75007 Paris. L'application Neuber pour iPad est disponible gratuitement.