

seulement constaté, mais dûment démontré. N'est-ce pas magique ?

L'énumération parfaite des nombres rationnels

Nous arrivons à la plus remarquable propriété de la suite diatomique de Stern, qui se rapporte à l'énumération des fractions. Les nombres fractionnaires ou plus communément nommés nombres rationnels sont les quotients de deux nombres entiers (comme $1/2$, $5/1$, $23/165$...). En écrivant toutes les fractions positives dans un tableau à double entrée (une pour le numérateur, l'autre pour le dénominateur) et en parcourant successivement les diagonales montantes du tableau (sommes du numérateur et du dénominateur égales), on obtient une énumération des nombres rationnels **E**. Elle montre qu'ils ne sont pas « vraiment » plus nombreux que les nombres entiers (même infini dénombrable).

E

	1	2	3	4	5	6	7	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	...
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	...
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	...
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	...
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	...
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	...
7	7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	...

L'énumération commence par $1/1$, $2/1$, $1/2$, $3/1$, $2/2$, $1/3$, $4/1$, $3/2$, $2/3$, $1/4$, $5/1$, $4/2$, $3/3$, $2/4$, $1/5$, ... Dans cette liste des fractions, du fait des simplifications possibles ($2/2 = 1/1$, $2/4 = 1/2$, etc.), certains nombres rationnels sont répétés. Ce n'est pas très grave, car on peut reprendre l'énumération en décidant de ne pas garder les nombres qui se trouveront déjà mentionnés, c'est-à-dire ceux qui se simplifient. Le début de cette énumération sans répétition devient alors : $1/1$, $2/1$, $1/2$, $3/1$, $1/3$, $4/1$, $3/2$, $2/3$, $1/4$, $5/1$, $1/5$, ... Le résultat de ce nettoyage est une bijection entre les entiers positifs et les nombres rationnels positifs : à chaque nombre entier n positif, le n -ième nombre de l'énumération est un nombre rationnel simplifié (une fraction irréductible) et il n'y a ni oubli ni répétition.

Un défaut de cette méthode de mise en correspondance nombre à nombre, entre les entiers et les rationnels, est qu'il est impossible, à moins d'un assez gros travail, de connaître quel est le nombre rationnel qui vient par exemple en position mille (et est donc associé à 1 000). Il est encore plus difficile d'avoir une formule générale et simple donnant le n -ième terme de l'énumération.

Très étonnamment, la suite diatomique de Stern fournit une solution à ce problème : si on énumère les rationnels en prenant successivement : s_0/s_1 , s_1/s_2 , s_2/s_3 , s_3/s_4 , s_4/s_5 , s_5/s_6 , s_6/s_7 , s_7/s_8 , s_8/s_9 , s_9/s_{10} , ... c'est-à-dire : $1/1$, $1/2$, $2/1$, $1/3$, $3/2$, $2/3$, $3/1$, $1/4$, $4/3$, ..., alors la liste obtenue est parfaite. Il n'y a ni oublis, ni répétitions, ni fractions simplifiables ; c'est une mise en ordre idéale de l'infini des nombres rationnels.

Cette fois, on peut savoir sans mal que le n -ième élément énuméré est $s_n - 1/s_n$, rapport dont on connaît rapidement la valeur à partir du développement binaire de n sans passer par les précédents ; voir plus haut l'exemple du calcul de s_{99} .

Cette merveilleuse liste des fractions incita Stern en 1858 à introduire sa suite diatomique qui donne lieu à de jolies représentations graphiques de l'ensemble des nombres rationnels positifs. Partant de l'arbre diatomique de Stern (sans sa dernière colonne de 1), en divisant chaque élément par le suivant, on obtient un

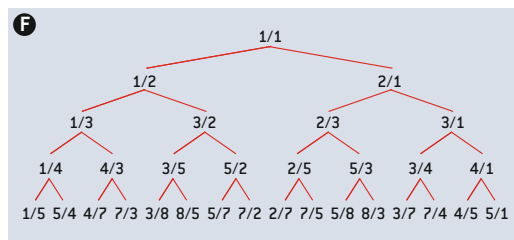


tableau infini de tous les nombres rationnels **F**. Ce tableau est parfois nommé arbre de Calting-Wilf, car Neil Calting et Herbert Wilf l'ont étudié en 2000.

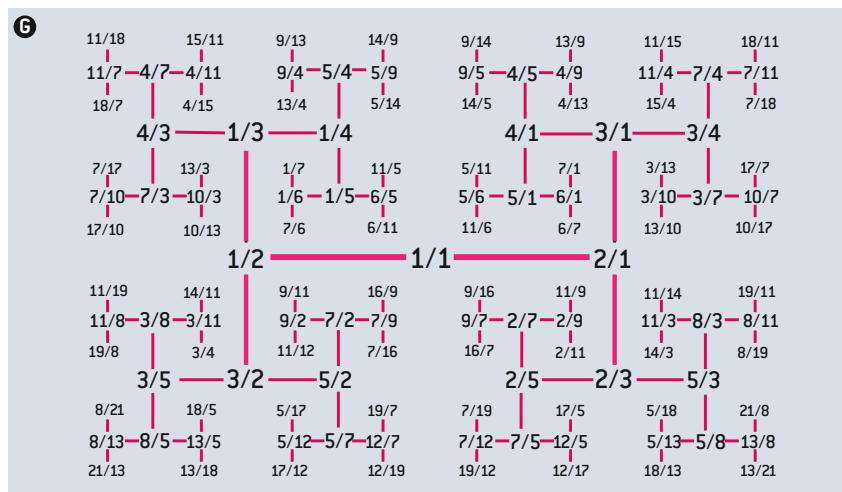
La représentation fractale de l'arbre binaire en fait apparaître un plus grand nombre d'éléments **G**.

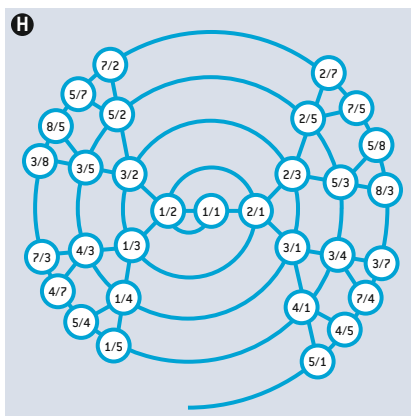
Plus intéressante encore, la disposition en spirale rend apparent à la fois l'arbre et l'énumération linéaire de tous les rationnels **H**.

L'arbre de Calting-Wilf possède une magnifique propriété qui suffit d'ailleurs à l'engendrer à partir de sa racine $1/1$: les deux descendants d'une fraction a/b de l'arbre sont dans l'ordre $a/(a+b)$ et $(a+b)/b$. Ce procédé étonnamment simple fournit indirectement une nouvelle méthode pour engendrer la suite diatomique de Stern.

Une autre formule surprenante par sa simplicité permet directement de passer d'un élément de l'énumération magique des rationnels au suivant : $f(x) = 1/(1 + 2[x] - x)$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x).

Autrement dit, en partant de $1/1$ et en appliquant la fonction f , on obtient d'abord $1/2$, puis en l'appliquant à nouveau à ce





qu'on vient d'obtenir, on a $2/1$, puis $1/3$, $3/2$, $2/3$, $3/1$, $1/4$, $4/3$, $3/5$, $5/2$, etc., ce qui énumère tous les nombres rationnels, chacun une fois et une seule, et sans jamais tomber sur des fractions simplifiables.

[Contrôle : $1/1 \rightarrow 1/(1+2[1]-1) = 1/2 \rightarrow 1/(1+2[1/2]-1/2) = 2 \rightarrow 1/(1+2[2]-2) = 1/3 \rightarrow 1/(1+2[1/3]-1/3) = 3/2$.]

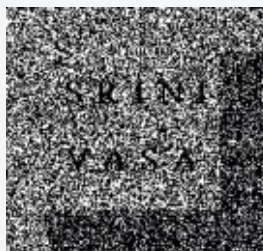
Il est impossible ici de présenter toutes les propriétés de la suite diatomique de Stern-Brocot, pas plus que ses généralisations (avec des polynômes par exemple), tant la richesse de sa structure semble inépuisable.

Il est ahurissant qu'il ait fallu attendre le XX^e et le plus souvent le XXI^e siècle pour que se dévoile une telle marée de relations et de propriétés simples provenant de cette suite à la définition ridicule de banalité. Nous sommes parfois tentés, à tort, de croire que nous connaissons tout ce qui est simple et fondamental. Il reste sans doute encore de nombreuses vérités mathématiques élémentaires à découvrir, que mystérieusement nous ne voyons pas. C'est bien sûr une source de plaisir sans égale pour tout mathématicien ou amateur de nombres que de voir surgir cette simplicité inattendue qui est peut-être un autre nom de la beauté.

Solution de l'énigme cryptographique

Notre rubrique de juin 2012 portait sur la cryptographie visuelle. Elle proposait une énigme : un prénom de mathématicien était caché dans une image. Rafael Chevalier a été le premier à m'avoir fait parvenir la solution. Il gagne donc un abonnement d'un an à *Pour la Science*. Jean-François Colonna qui connaissait l'énigme avant la parution (et qui était donc hors-concours) l'avait aussi résolue.

Il fallait trouver SRINIVASA, prénom du grand mathématicien indien Ramanujan, célèbre pour ses travaux en théorie des nombres et pour son extraordinaire aptitude au calcul. La méthode de chiffrement était fondée sur l'idée de la superposition de transparents expliquée dans l'article. Comme il n'y avait qu'une seule image, et que l'image était carrée, l'idée était assez naturelle de superposer un transparent de l'image avec le même transparent tourné de 90°, 180° ou 270°. C'est effectivement ce qu'il fallait faire, avec 180°.



L'énigme aurait été trop facile si cette seule rotation-superposition avait donné la solution. Il fallait donc aussi décaler le transparent tourné. Le nombre de cases du décalage horizontal et le nombre de cases du décalage vertical jouent le rôle de clefs de chiffrement. Cependant, une méthode exhaustive d'exploration n'était pas coûteuse à mettre en place et conduisait donc à la solution pour peu qu'on soit un peu patient.

La patience n'était pas absolument nécessaire, car on pouvait se repérer visuellement sur les motifs présents sur les images pour découvrir sans trop de peine la bonne superposition. C'est d'ailleurs ainsi qu'a procédé R. Chevalier qui nous a expliqué avoir résolu l'énigme en environ une heure.

Nous avons indiqué ci-contre la solution que l'on aperçoit lorsque l'image initiale et sa copie tournée de 180° sont superposées et convenablement décalées l'une par rapport à l'autre.

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

B. Bates et al., *Child's addition in the Stern-Brocot tree*, *European Journal of Combinatorics*, vol. 33, pp. 148-167, 2012.

M. Coonsa et J. Shallit, *A pattern sequence approach to Stern's sequence*, *Discrete Mathematics*, vol. 311, pp. 2630-2633, 2011.

S. Glasby, *Enumerating the rationals from left to right*, *The American Mathematical Monthly*, vol. 118, pp. 830-835, 2011.

S. Northshield, *Stern's diatomic sequence 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, ...*, *The American Mathematical Monthly*, vol. 117, pp. 581-598, 2010.

B. Bates et al., *Locating terms in the Stern-Brocot tree*, *European Journal of Combinatorics*, vol. 31, pp. 1020-1033, 2010.

S. Finch, *Mathematical Constants*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 94, Cambridge University Press, 2003.

N. Calting et H. Wilf, *Recounting the rational*, *The American Mathematical Monthly*, vol. 107, pp. 360-363, 2000.

M. Stern, *Über eine zahlentheoretische Funktion*, *J. Reine Agnew. Math.*, vol. 55, pp. 193-220, 1858.

SCIENCE & FICTION

Pourquoi tant de grosses têtes dans la science-fiction ?

Le volumineux cerveau de certains extraterrestres des films et autres romans d'anticipation intrigue les scientifiques.

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

Les envahisseurs de *Mars Attacks!*, film de Tim Burton (1996), sont affreux : grands et minces, au visage décharné et aux yeux globuleux, ces extraterrestres ont tous une tête démesurée, hypertrophiée (voir la figure 1). Voilà un caractère qui n'est pas original pour un extraterrestre : des « petits gris » de l'affaire Roswell au *E.T.* de Steven Spielberg (1982), des aliens de *Star Trek* à ceux de *Star Wars*, les « grosses têtes » sont légion en science-fiction ! Mais de tels archétypes sont-ils biologiquement plausibles ? Un cerveau surdimensionné est-il vraiment plus intelligent ? Et demain, aurons-nous tous un encéphale démesuré ?

Observons de plus près ces Martiens de *Mars Attacks!* : curieusement, leur cerveau

n'est protégé que par un ample casque transparent. Or, même en l'absence de prédateur, une espèce n'a aucun avantage adaptatif à être dotée d'un gros cerveau non protégé, car c'est le centre vital du traitement des informations. D'ailleurs, dans les océans terrestres, l'apparition de l'encéphale, chez des « poissons » sans mâchoire il y a 480 millions d'années environ, a été concomitante avec celle d'une boîte crânienne censée protéger le cerveau des agressions externes. Cette boîte est même une caractéristique importante définissant le groupe des *craniates*, qui réunit l'ensemble des vertébrés à nageoires et à pattes (les *tétrapodes* dont nous faisons partie).

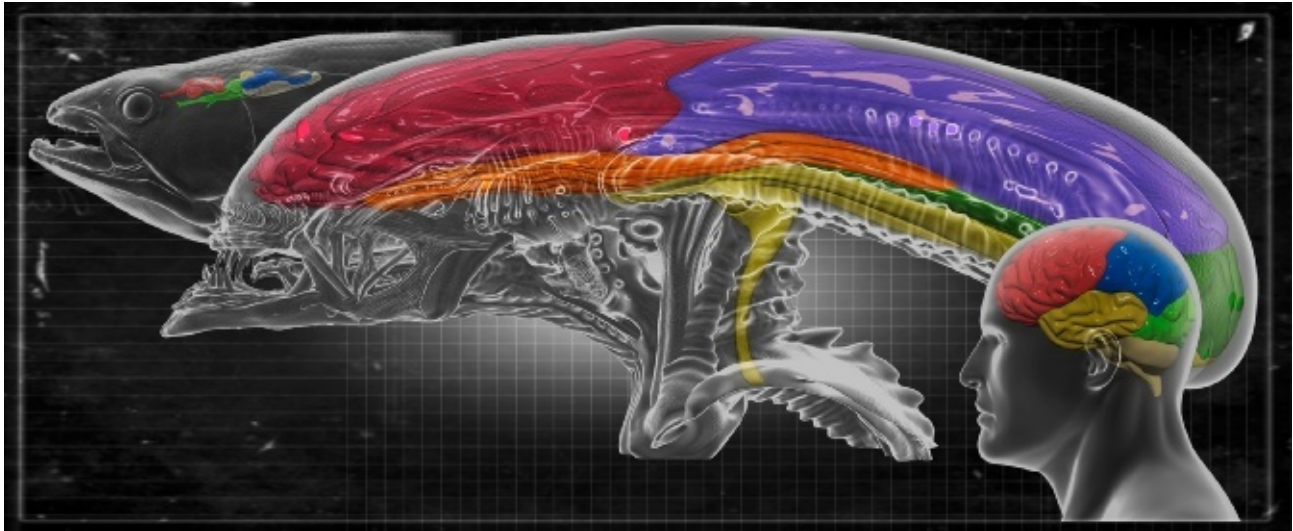
La couche la plus externe du cerveau des Martiens, leur cortex, présente aussi de belles circonvolutions. Sur Terre, cette morphologie

se retrouve plutôt chez des mammifères à grand cerveau tels les chiens, les baleines ou encore les grands singes. Les petits mammifères, rats ou souris par exemple, ainsi que d'autres tétrapodes tels que les grenouilles et les oiseaux ont, eux, des cerveaux plutôt lisses. Ces replis du cortex permettent une augmentation de la surface du cerveau dans le volume limité de la boîte crânienne. Parce qu'il est replié, le cortex humain, dont la surface est d'environ deux mètres carrés, tient dans un volume dont la surface interne est trois fois plus faible. Sans boîte crânienne, le cerveau des Martiens n'a pas à être soumis à cette contrainte géométrique : ses multiples replis sont une « erreur » de réalisateur !

Chez les extraterrestres *craniates*, le développement du cerveau semble s'être opéré aux dépens de la face : celle-ci devient souvent plate et réduite. Ainsi, le crâne de *E.T.*, volumineux et triangulaire quand il est vu de dessus, suggère un cerveau de belle taille. Moins sympathique, *Alien* du plasticien Hans Ruedi Giger présente une face très réduite et un crâne tubulaire, allongé vers l'arrière, ce qui suggère également un cerveau développé (voir la figure 2). Du point de vue biomécanique, une grosse tête nécessite, au niveau du cou, des muscles et des vertèbres suffisamment robustes pour le port de tête, notamment chez les « créatures » qui marchent debout. Si le crâne superallongé d'*Alien* se situe bien dans le prolongement du dos lorsqu'il se déplace à quatre pattes, il doit être gênant quand le monstre devient bipède. Au cours de l'évolution des hominidés, la forme et la taille du crâne ont aussi



1. LES EXTRATERRESTRES DE MARS ATTACKS! (Tim Burton, 1996) présentent tous un cerveau démesuré. Cette hypertrophie du crâne (nommée *macrocéphalie* sur Terre) soulève diverses questions anatomiques et fonctionnelles...



2. LES POISSONS OSSEUX, TEL LE CŒLACANTHE (*en haut à gauche*), ont un cerveau lisse. Le cerveau des humains (*en bas à droite*) est doté de circonvolutions. Enfin, *Alien*, avec son crâne démesurément long, est un représentant des extraterrestres à grosses têtes (*au milieu*).

évolué : notre visage est plus plat et notre crâne plus gros que ceux de nos cousins australopithèques par exemple. La station debout serait liée à la rotation vers le bas de la région du crâne où s'insère la colonne vertébrale – le basicrâne – et aurait joué un rôle dans l'augmentation du volume cérébral.

Une anomalie génétique

Les grosses têtes de l'espace présentent ce que l'on appelle cliniquement sur Terre une macrocéphalie. En biologie humaine, cette hypertrophie du crâne est un symptôme du dérèglement des gènes dits « architectes », responsables de la construction du crâne et de la face, mais aussi de celle des doigts et du système urogénital. Elle apparaît d'ailleurs souvent avec d'autres « malformations », telles qu'un écartement anormal des yeux ou la présence de doigts sumuméraires. Si les extraterrestres à grosse tête ne présentent pas les symptômes associés à la macrocéphalie humaine, c'est certainement parce que leur génome est très différent du nôtre !

Pourquoi donc de tels cerveaux ? Parce qu'en science-fiction, l'hypertrophie du crâne est souvent la marque d'un être superintelligent, disposant éventuellement de superpouvoirs mentaux, telle la télépathie. Pourtant une intelligence supérieure – nous nous

garderons bien de définir la chose – n'est pas nécessairement liée à un gros cerveau. Éléphant et baleine ont un cerveau plus gros que le nôtre ; sont-ils pour autant plus intelligents ? Notons aussi que Néandertal, souvent considéré comme moins « adapté », était doté d'un cerveau 25 pour cent plus gros que le nôtre ! Quant aux grands penseurs, ils n'étaient pas forcément dotés d'un cerveau plus gros que la moyenne...

Qu'en est-il alors du rapport masse du cerveau sur masse corporelle, autre indicateur supposé de l'intelligence ? Il n'est guère plus parlant, car humains et souris seraient alors équivalents. De plus, ce rapport serait le plus important chez les petits oiseaux. Quant à l'espèce humaine, il est anormalement élevé pour les adultes. Car le crâne de la plupart des mammifères se développe plus rapidement que le reste du corps chez l'embryon. Puis le rapport diminue progressivement avec l'âge.

Ces énormes têtes relèvent-elles du fantasme du surhomme ? Sont-elles une anticipation de notre évolution ? Dans un futur plus ou moins lointain, notre cerveau se développera-t-il à l'image de ceux des aliens ? Probablement pas. D'abord, parce que la masse du cerveau et la masse corporelle évoluent simultanément. Ensuite, un trop gros cerveau pourrait devenir un inconvénient : le cerveau d'un adulte, même s'il ne représente que deux pour cent de la

masse corporelle, consomme 20 pour cent de toute l'énergie métabolique. Au stade prénatal et durant la première année de vie, c'est près de 60 pour cent de l'énergie de l'enfant qui est consommée par son cerveau.

Un cerveau massif imposerait donc de fortes contraintes énergétiques. Enfin, la taille du cerveau est aussi une contrainte lors de l'accouchement, parce que le bébé doit passer par le bassin de sa mère. Si le volume du crâne augmente au cours de l'évolution, il faut que le diamètre du bassin de la femme suive, avec les conséquences que cela peut avoir sur la locomotion, le taux de mortalité lors d'accouchements par voie naturelle, etc. Étant donné la morphologie filiforme des Martiens et l'étroitesse de leurs hanches, on imagine difficilement que l'évolution de leur bassin soit corrélée à celle de leur crâne : si les Martiennes accouchent, c'est forcément par césarienne ! Ou comment le cerveau des Martiens nous renseigne sur les difficultés que rencontrent les Martiennes pour perpétuer l'espèce...

J.-S. STEYER est paléontologue au MNHN à Paris.
R. LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay.

C. Hilgetag et H. Barbas, *Plis et replis du cerveau*, *Pour la Science* n° 378, pp. 42-47, 2009.
G. Roth et U. Dicke, *Evolution of the brain and intelligence*, *Trends in Cognitive Sciences*, vol. 9(5), pp. 250-257, 2005.

ART & SCIENCE

Les objets impalpables dans l'espace

À la fin du XIX^e siècle, Louis Ducos du Hauron a inventé la photographie en couleurs et les anaglyphes, c'est-à-dire les images en relief.

Les principes qu'il exploite sont toujours d'actualité : ils sont mis en œuvre dans nos écrans d'ordinateur et par les missions de la NASA sur Mars !

Loïc MANGIN

Le 15 novembre 1854, la Société française de photographie est créée avec, comme modèle, l'Académie des sciences. L'objectif fixé de la nouvelle institution est de « Concourir aux progrès scientifiques et artistiques de la photographie et de ses applications ». De fait, lors de réunions publiques, photographes et scientifiques venaient présenter leurs expériences et prototypes. En outre, la Société française de photographie était la dépositaire de plis cachetés qui faisaient office de dépôt légal en vue d'éventuelles contestations de paternité. Enfin, les inventeurs lui confiaient souvent des épreuves illustrant leurs découvertes.

Ainsi, les fonds de la Société française de photographie recèlent de nombreux incunables de l'histoire de la photographie. Ils correspondent à autant d'actes de naissance de techniques toujours en cours aujourd'hui, à quelques différences près, surtout depuis l'arrivée du numérique. Lors des rencontres d'Arles 2012, une exposition organisée par Luce Lebart, directrice des collections de la Société, a mis en lumière plusieurs de ces « premières fois », pour la plupart inédites. Décrivons-en certaines qui révèlent le fourmillement des inventions au tournant du XIX^e siècle et du XX^e.

Le 7 mai 1869, le chimiste et physicien Louis Ducos du Hauron présente à la Société les premières photographies en couleurs réalisées selon un procédé qu'il a breveté l'année précédente. Ce dernier est fondé sur le principe de la trichromie : de la même façon que nos yeux perçoivent les couleurs à partir

de trois types de cellules (les cônes) photosensibles, on peut reconstituer la plupart des teintes avec seulement trois couleurs primaires, le bleu, le vert et le rouge. C'est la synthèse additive des couleurs. Le principe de ce procédé sera ensuite décliné de façon industrielle par les frères Lumière qui commercialisent à partir de 1907 leurs premiers autochromes. Ces diapositives en couleurs sur plaque de verre fonctionnent grâce à de la fécule de pomme de terre teintée dont les grains correspondent, dans le principe... aux pixels des images numériques d'aujourd'hui !

La NASA utilise une méthode mise au point à la fin du XIX^e siècle pour obtenir des images en relief de Mars.

En 1891, Ducos du Hauron présente une nouvelle innovation, l'anaglyphe, ou « objet impalpable dans l'espace ». Un anaglyphe est constitué de deux images superposées de couleurs complémentaires (cyan et magenta le plus souvent) représentant la même scène vue de points décalés (la figure b est un des premiers anaglyphes de Ducos du Hauron). Les images ne sont pas identiques, car le décalage, ou parallaxe, d'un même élément dans les deux couleurs est d'autant plus grand qu'il est situé près du premier plan. Le relief est restitué grâce à des lunettes bicolores qui cachent à chacun des yeux une des deux couleurs. On retrouve alors le fonctionnement stéréoscopique de la vision humaine en relief.

Le succès des anaglyphes viendra avec les images de Léon Gimpel, dont la *Jeanne qui rit, Jeanne qui pleure*, en 1920 (voir ci-dessus), illustre le mécanisme de l'absorption d'une couleur par sa complémentaire : chaussez les lunettes bicolores et fermez alternativement un œil, puis un autre : la fillette est gaie ou triste.

Gimpel, photoreporter, adapte la méthode de Ducos du Hauron aux autochromes des frères Lumière et produit de nombreuses images, par exemple *l'Intérieur d'un char d'assaut type Saint Chamond*, en 1916 (voir la figure a). On lui doit aussi des images de reconnaissance en avion ou en ballon d'observation. Les anaglyphes sont toujours d'actualité, le robot *Curiosity* de la NASA créant des images numériques de ce type depuis la surface de Mars !

Autre invention de cette époque, un « radar » automobile. Peu après les premiers décrets limitant la vitesse, Léon Gaumont propose un appareil qui prend deux clichés à un intervalle de temps connu sur une même plaque photographique. Le décalage des images d'un véhicule (voir la figure c) permet de calculer sa vitesse. Citons aussi les premières photographies au microscope, la transmission d'images par téléphone... La façon d'envisager les images aujourd'hui découle de ces inventions. ■

Un laboratoire des « premières fois » : les collections de la Société française de photographie, Rencontres d'Arles 2012, du 2 juillet au 23 septembre 2012. www.sfp.asso.fr/blog-collection

