

seulement constaté, mais dûment démontré. N'est-ce pas magique ?

L'énumération parfaite des nombres rationnels

Nous arrivons à la plus remarquable propriété de la suite diatomique de Stern, qui se rapporte à l'énumération des fractions. Les nombres fractionnaires ou plus communément nommés nombres rationnels sont les quotients de deux nombres entiers (comme $1/2$, $5/1$, $23/165$...). En écrivant toutes les fractions positives dans un tableau à double entrée (une pour le numérateur, l'autre pour le dénominateur) et en parcourant successivement les diagonales montantes du tableau (sommes du numérateur et du dénominateur égales), on obtient une énumération des nombres rationnels **E**. Elle montre qu'ils ne sont pas « vraiment » plus nombreux que les nombres entiers (même infini dénombrable).

E

	1	2	3	4	5	6	7	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	...
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	...
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	...
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	...
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	...
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	...
7	7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	...

L'énumération commence par $1/1$, $2/1$, $1/2$, $3/1$, $2/2$, $1/3$, $4/1$, $3/2$, $2/3$, $1/4$, $5/1$, $4/2$, $3/3$, $2/4$, $1/5$, ... Dans cette liste des fractions, du fait des simplifications possibles ($2/2 = 1/1$, $2/4 = 1/2$, etc.), certains nombres rationnels sont répétés. Ce n'est pas très grave, car on peut reprendre l'énumération en décidant de ne pas garder les nombres qui se trouveront déjà mentionnés, c'est-à-dire ceux qui se simplifient. Le début de cette énumération sans répétition devient alors : $1/1$, $2/1$, $1/2$, $3/1$, $1/3$, $4/1$, $3/2$, $2/3$, $1/4$, $5/1$, $1/5$, ... Le résultat de ce nettoyage est une bijection entre les entiers positifs et les nombres rationnels positifs : à chaque nombre entier n positif, le n -ième nombre de l'énumération est un nombre rationnel simplifié (une fraction irréductible) et il n'y a ni oubli ni répétition.

Un défaut de cette méthode de mise en correspondance nombre à nombre, entre les entiers et les rationnels, est qu'il est impossible, à moins d'un assez gros travail, de connaître quel est le nombre rationnel qui vient par exemple en position mille (et est donc associé à 1 000). Il est encore plus difficile d'avoir une formule générale et simple donnant le n -ième terme de l'énumération.

Très étonnamment, la suite diatomique de Stern fournit une solution à ce problème : si on énumère les rationnels en prenant successivement : s_0/s_1 , s_1/s_2 , s_2/s_3 , s_3/s_4 , s_4/s_5 , s_5/s_6 , s_6/s_7 , s_7/s_8 , s_8/s_9 , s_9/s_{10} , ... c'est-à-dire : $1/1$, $1/2$, $2/1$, $1/3$, $3/2$, $2/3$, $3/1$, $1/4$, $4/3$, ..., alors la liste obtenue est parfaite. Il n'y a ni oublis, ni répétitions, ni fractions simplifiables ; c'est une mise en ordre idéale de l'infini des nombres rationnels.

Cette fois, on peut savoir sans mal que le n -ième élément énuméré est $s_n - 1/s_n$, rapport dont on connaît rapidement la valeur à partir du développement binaire de n sans passer par les précédents ; voir plus haut l'exemple du calcul de s_{99} .

Cette merveilleuse liste des fractions incita Stern en 1858 à introduire sa suite diatomique qui donne lieu à de jolies représentations graphiques de l'ensemble des nombres rationnels positifs. Partant de l'arbre diatomique de Stern (sans sa dernière colonne de 1), en divisant chaque élément par le suivant, on obtient un

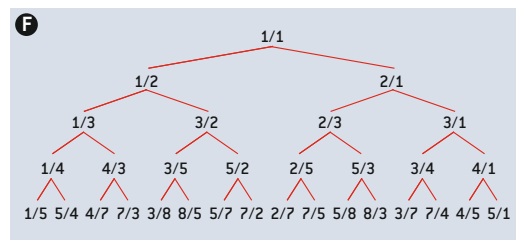


tableau infini de tous les nombres rationnels **F**. Ce tableau est parfois nommé arbre de Calting-Wilf, car Neil Calting et Herbert Wilf l'ont étudié en 2000.

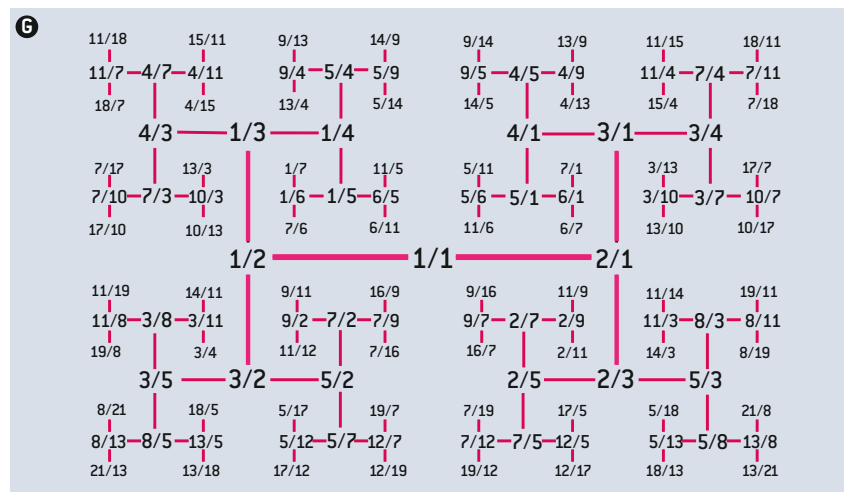
La représentation fractale de l'arbre binaire en fait apparaître un plus grand nombre d'éléments **G**.

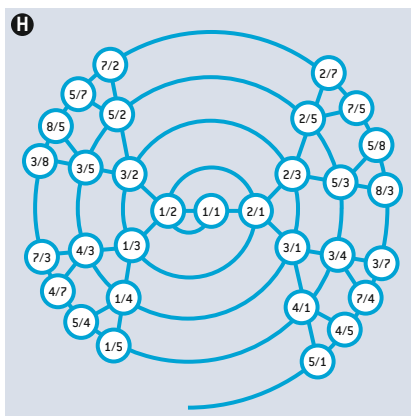
Plus intéressante encore, la disposition en spirale rend apparent à la fois l'arbre et l'énumération linéaire de tous les rationnels **H**.

L'arbre de Calting-Wilf possède une magnifique propriété qui suffit d'ailleurs à l'engendrer à partir de sa racine $1/1$: les deux descendants d'une fraction a/b de l'arbre sont dans l'ordre $a/(a+b)$ et $(a+b)/b$. Ce procédé étonnamment simple fournit indirectement une nouvelle méthode pour engendrer la suite diatomique de Stern.

Une autre formule surprenante par sa simplicité permet directement de passer d'un élément de l'énumération magique des rationnels au suivant : $f(x) = 1/(1 + 2[x] - x)$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x).

Autrement dit, en partant de $1/1$ et en appliquant la fonction f , on obtient d'abord $1/2$, puis en l'appliquant à nouveau à ce





qu'on vient d'obtenir, on a $2/1$, puis $1/3$, $3/2$, $2/3$, $3/1$, $1/4$, $4/3$, $3/5$, $5/2$, etc., ce qui énumère tous les nombres rationnels, chacun une fois et une seule, et sans jamais tomber sur des fractions simplifiables.

[Contrôle : $1/1 \rightarrow 1/(1+2[1]-1) = 1/2 \rightarrow 1/(1+2[1/2]-1/2) = 2 \rightarrow 1/(1+2[2]-2) = 1/3 \rightarrow 1/(1+2[1/3]-1/3) = 3/2$.]

Il est impossible ici de présenter toutes les propriétés de la suite diatomique de Stern-Brocot, pas plus que ses généralisations (avec des polynômes par exemple), tant la richesse de sa structure semble inépuisable.

Il est ahurissant qu'il ait fallu attendre le XX^e et le plus souvent le XXI^e siècle pour que se dévoile une telle marée de relations et de propriétés simples provenant de cette suite à la définition ridicule de banalité. Nous sommes parfois tentés, à tort, de croire que nous connaissons tout ce qui est simple et fondamental. Il reste sans doute encore de nombreuses vérités mathématiques élémentaires à découvrir, que mystérieusement nous ne voyons pas. C'est bien sûr une source de plaisir sans égale pour tout mathématicien ou amateur de nombres que de voir surgir cette simplicité inattendue qui est peut-être un autre nom de la beauté.

Solution de l'énigme cryptographique

Notre rubrique de juin 2012 portait sur la cryptographie visuelle. Elle proposait une énigme : un prénom de mathématicien était caché dans une image. Rafael Chevalier a été le premier à m'avoir fait parvenir la solution. Il gagne donc un abonnement d'un an à *Pour la Science*. Jean-François Colonna qui connaissait l'énigme avant la parution (et qui était donc hors-concours) l'avait aussi résolue.

Il fallait trouver SRINIVASA, prénom du grand mathématicien indien Ramanujan, célèbre pour ses travaux en théorie des nombres et pour son extraordinaire aptitude au calcul. La méthode de chiffrement était fondée sur l'idée de la superposition de transparents expliquée dans l'article. Comme il n'y avait qu'une seule image, et que l'image était carrée, l'idée était assez naturelle de superposer un transparent de l'image avec le même transparent tourné de 90° , 180° ou 270° . C'est effectivement ce qu'il fallait faire, avec 180° .



L'énigme aurait été trop facile si cette seule rotation-superposition avait donné la solution. Il fallait donc aussi décaler le transparent tourné. Le nombre de cases du décalage horizontal et le nombre de cases du décalage vertical jouent le rôle de clefs de chiffrement. Cependant, une méthode exhaustive d'exploration n'était pas coûteuse à mettre en place et conduisait donc à la solution pour peu qu'on soit un peu patient.

La patience n'était pas absolument nécessaire, car on pouvait se repérer visuellement sur les motifs présents sur les images pour découvrir sans trop de peine la bonne superposition. C'est d'ailleurs ainsi qu'a procédé R. Chevalier qui nous a expliqué avoir résolu l'énigme en environ une heure.

Nous avons indiqué ci-contre la solution que l'on aperçoit lorsque l'image initiale et sa copie tournée de 180° sont superposées et convenablement décalées l'une par rapport à l'autre.

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

B. Bates et al., *Child's addition in the Stern-Brocot tree*, *European Journal of Combinatorics*, vol. 33, pp. 148-167, 2012.

M. Coonsa et J. Shallit, *A pattern sequence approach to Stern's sequence*, *Discrete Mathematics*, vol. 311, pp. 2630-2633, 2011.

S. Glasby, *Enumerating the rationals from left to right*, *The American Mathematical Monthly*, vol. 118, pp. 830-835, 2011.

S. Northshield, *Stern's diatomic sequence 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, ...*, *The American Mathematical Monthly*, vol. 117, pp. 581-598, 2010.

B. Bates et al., *Locating terms in the Stern-Brocot tree*, *European Journal of Combinatorics*, vol. 31, pp. 1020-1033, 2010.

S. Finch, *Mathematical Constants*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 94, Cambridge University Press, 2003.

N. Calting et H. Wilf, *Recounting the rational*, *The American Mathematical Monthly*, vol. 107, pp. 360-363, 2000.

M. Stern, *Über eine zahlentheoretische Funktion*, *J. Reine Agnew. Math.*, vol. 55, pp. 193-220, 1858.

SCIENCE & FICTION

Pourquoi tant de grosses têtes dans la science-fiction ?

Le volumineux cerveau de certains extraterrestres des films et autres romans d'anticipation intrigue les scientifiques.

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

Les envahisseurs de *Mars Attacks!*, film de Tim Burton (1996), sont affreux : grands et minces, au visage décharné et aux yeux globuleux, ces extraterrestres ont tous une tête démesurée, hypertrophiée (voir la figure 1). Voilà un caractère qui n'est pas original pour un extraterrestre : des « petits gris » de l'affaire Roswell au *E.T.* de Steven Spielberg (1982), des aliens de *Star Trek* à ceux de *Star Wars*, les « grosses têtes » sont légion en science-fiction ! Mais de tels archétypes sont-ils biologiquement plausibles ? Un cerveau surdimensionné est-il vraiment plus intelligent ? Et demain, aurons-nous tous un encéphale démesuré ?

Observons de plus près ces Martiens de *Mars Attacks!* : curieusement, leur cerveau

n'est protégé que par un ample casque transparent. Or, même en l'absence de prédateur, une espèce n'a aucun avantage adaptatif à être dotée d'un gros cerveau non protégé, car c'est le centre vital du traitement des informations. D'ailleurs, dans les océans terrestres, l'apparition de l'encéphale, chez des « poissons » sans mâchoire il y a 480 millions d'années environ, a été concomitante avec celle d'une boîte crânienne censée protéger le cerveau des agressions externes. Cette boîte est même une caractéristique importante définissant le groupe des *craniates*, qui réunit l'ensemble des vertébrés à nageoires et à pattes (les *tétrapodes* dont nous faisons partie).

La couche la plus externe du cerveau des Martiens, leur cortex, présente aussi de belles circonvolutions. Sur Terre, cette morphologie

se retrouve plutôt chez des mammifères à grand cerveau tels les chiens, les baleines ou encore les grands singes. Les petits mammifères, rats ou souris par exemple, ainsi que d'autres tétrapodes tels que les grenouilles et les oiseaux ont, eux, des cerveaux plutôt lisses. Ces replis du cortex permettent une augmentation de la surface du cerveau dans le volume limité de la boîte crânienne. Parce qu'il est replié, le cortex humain, dont la surface est d'environ deux mètres carrés, tient dans un volume dont la surface interne est trois fois plus faible. Sans boîte crânienne, le cerveau des Martiens n'a pas à être soumis à cette contrainte géométrique : ses multiples replis sont une « erreur » de réalisateur !

Chez les extraterrestres *craniates*, le développement du cerveau semble s'être opéré aux dépens de la face : celle-ci devient souvent plate et réduite. Ainsi, le crâne de *E.T.*, volumineux et triangulaire quand il est vu de dessus, suggère un cerveau de belle taille. Moins sympathique, *Alien* du plasticien Hans Ruedi Giger présente une face très réduite et un crâne tubulaire, allongé vers l'arrière, ce qui suggère également un cerveau développé (voir la figure 2). Du point de vue biomécanique, une grosse tête nécessite, au niveau du cou, des muscles et des vertèbres suffisamment robustes pour le port de tête, notamment chez les « créatures » qui marchent debout. Si le crâne superallongé d'*Alien* se situe bien dans le prolongement du dos lorsqu'il se déplace à quatre pattes, il doit être gênant quand le monstre devient bipède. Au cours de l'évolution des hominidés, la forme et la taille du crâne ont aussi



1. LES EXTRATERRESTRES DE MARS ATTACKS! (Tim Burton, 1996) présentent tous un cerveau démesuré. Cette hypertrophie du crâne (nommée *macrocéphalie* sur Terre) soulève diverses questions anatomiques et fonctionnelles...