

résultat quasi miraculeux confirme que C/n est théoriquement la plus équitable attribution de poids aux entiers. La densité $D_e(A) = \sum \{1/k^e, k \text{ dans } A\} / \sum \{1/k^e, k \text{ entier}\}$ est toujours définie si $e > 1$, car maintenant le dénominateur est fini (car la série de terme $1/k^e$ est de somme finie quand $e > 1$).

Comme $1/k^e$ est proche de $1/k$ si e est proche de 1, pour contourner la divergence de la série $\sum 1/k$, on définit la densité $D_z(A)$ de l'ensemble A d'entiers comme la limite, si elle existe, de $D_e(A)$ quand e tend vers 1. On la nomme parfois « densité zêta » (à cause du dénominateur qui est la fonction zêta de Riemann), d'où le « z ». Les ensembles d'entiers A dont la densité D_z existe sont les mêmes que ceux pour lesquels la densité logarithmique (voir l'encadré 3) existe, et alors les deux densités coïncident. Ce résultat remarquable est publié dans la thèse de Persi Diaconis (voir la bibliographie).

Les deux façons envisageables d'étendre la notion de densité naturelle en se fondant sur l'idée d'attribuer (autant que possible) une probabilité $1/n$ à l'entier n fonctionnent et conduisent de manière inattendue à la même notion. Le sens de ces théorèmes mathématiques est que, moyennant un petit passage par des limites pour contourner la divergence de $\sum 1/n$, il est possible de formuler une définition de « choix aléatoire équitable » entre entiers. Ainsi, la loi de Zipf est dans une position privilégiée par rapport à toutes les autres lois envisageables sur les entiers.

Benford retrouvé

Un dernier théorème s'ajoute aux arguments pratiques et mathématiques. La loi de Benford apparaît quand on examine le premier chiffre d'une série de données : la probabilité pour qu'un nombre entier pris dans un ensemble assez grand (par exemple dans le tableau des longueurs de tous les fleuves mesurées en kilomètres) commence par le chiffre i ($i = 1, 2, \dots, 9$) est $\log_{10} \{1 + 1/i\}$ et il y a donc plus de 30 % de chances (car $\log_{10} \{2\} = 0,30103$) que le premier chiffre d'un tel nombre soit 1 (voir l'article de janvier 2007 dans cette rubrique).

Une question s'est posée depuis longtemps : la liste des entiers vérifie-t-

elle la loi de Benford ? Autrement dit, le quotient (Nombre d'entiers $< n$ commençant par le chiffre i)/ n a-t-il pour limite $\log_{10} \{1 + 1/i\}$? Il se trouve que non : ce quotient n'a pas de limite quand n tend vers l'infini, mais oscille sans cesse, car les nombres commençant par i n'ont pas de densité naturelle. Maintenant que nous savons qu'on peut étendre la densité naturelle, reformulons la question : l'ensemble des entiers commençant par i ($i = 1, 2, \dots, 9$) a-t-il une densité logarithmique (ou, ce qui revient au même, une densité D_z) ? Comme par miracle, la réponse est oui, et la densité trouvée est $\log_{10} \{1 + 1/i\}$. Les entiers, traités équitablement, suivent la loi de Benford et il n'est donc pas étonnant que cette loi se rencontre si fréquemment.

À défaut de mesure de probabilité uniforme sur les entiers, la loi de Zipf joue le rôle d'une mesure naturelle. On le voit en observant la prévalence de cette loi pour des données concrètes (telles les fréquences d'utilisation des mots dans un texte). On le voit quand on s'aperçoit que la loi de Zipf est liée à la complexité de Kolmogorov des entiers. On le voit aussi quand on recherche les densités qui, pour les ensembles d'entiers, jouent le rôle de probabilités uniformes.

La preuve mathématique qu'avec ces densités en C/n , les entiers eux-mêmes vérifient la loi de Benford (et c'est vrai aussi des nombres premiers), renforce la conviction que ces densités tirées de la loi de Zipf sont les bonnes façons de choisir au hasard des nombres entiers. Le fait que la loi de Benford redonne en un certain sens la loi de Zipf est un argument supplémentaire, car il existe des explications directes de la loi de Benford, telle celle proposée par Nicolas Gauvrit et l'auteur de cette rubrique, et qu'elles sont donc aussi des explications de la loi de Zipf.

Le monde mathématique est déconcertant : l'infini dénombrable, le plus simple de tous, semble interdire qu'on en pioche les éléments au hasard équitablement, alors que le continu de l'intervalle $[0, 1]$, plus gros et plus compliqué que l'infini dénombrable, l'autorise. Heureusement, la loi de Zipf, à sa façon, joue ce rôle de probabilité uniforme sur les entiers. ■

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

N. Gauvrit, J.-P. Delahaye et H. Zenil, *Sloane's Gap : Do mathematical and social factors explain the distribution of numbers in the OEIS ?*, *Journal of Humanistic Mathematics*, à paraître, 2012.

N. Gauvrit et J.-P. Delahaye, *Pourquoi la loi de Benford n'est pas mystérieuse*, *Mathématiques et Sciences Humaines*, vol. 182-2, pp. 7-15, 2008 (<http://msh.revues.org/10363>).

M. Newman, *Power laws, Pareto distributions and Zipf's law*, *Contemporary Physics*, vol. 46, pp. 323-351, 2005.

G. Tenenbaum, *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*, Cambridge University Press, 1995.

P. Diaconis, *Weak and Strong Averages in Probability and Theory of Numbers*, thèse de l'Université Harvard, 1974, http://www-stat.stanford.edu/ffcgates/PERSI/Persi_PhDdiss.pdf [c'est le document à lire sur les densités étendant la densité naturelle].

G. Zipf, *Human Behaviour and the Principle of Least Effort*, Addison-Wesley Publishing, 1949.

SCIENCE & FICTION

La Force des Jedis

Dans l'univers de La guerre des étoiles, elle serait conférée par des organismes microscopiques, les midichloriens. Qui sont ces « supports » de la Force ?

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

« **Q**ue la Force soit avec toi ! » La Force est cette source de pouvoir des chevaliers Jedis dans l'univers de *Star Wars*. On apprend dans le premier épisode, *La menace fantôme* (1999), que la Force a un support matériel, d'étranges organismes microscopiques nommés midichloriens. Une discussion entre le jeune Anakin Skywalker et son mentor Qui-Gon Jinn, nous en précise la nature :

« Les midichloriens sont des formes de vie microscopiques qui résident dans toutes les cellules vivantes et communiquent avec la Force. [Ils vivent] dans tes cellules. Nous vivons en symbiose avec les midichloriens. »

En introduisant les midichloriens dans l'histoire, le réalisateur George Lucas tente alors, au grand dam de ses fans, de donner une explication rationnelle à la Force. Approche scientifique ? Loin s'en faut si l'on regarde de plus près qui sont ces midichloriens venus de l'espace. Éliminons d'abord une éventuelle nature virale, les virus étant considérés comme des parasites intracellulaires, alors que les midichloriens sont des symbiotes, d'après la définition. Remarquons que le mot « midichlorien », forgé par G. Lucas, semble être un assemblage des mots « mitochondrie » et « chloroplaste », deux organites présents dans les cellules terriennes. Les mitochondries, localisées dans le cytoplasme, fournissent les molécules d'ATP (adénosine triphosphate), qui permet aux cellules de stocker de l'énergie. La mitochondrie est l'usine énergétique des cellules à noyau, dites eucaryotes, aussi bien animales que végétales.



1. ANAKIN SKYWALKER, qui deviendra Dark Vador dans les épisodes ultérieurs de *La guerre des étoiles*, a une affinité marquée avec la Force. Cette dernière lui est conférée par les midichloriens, des micro-organismes présents notamment dans son sang.

Quant au chloroplaste, c'est un organite spécifique des cellules végétales qui permet la synthèse de la chlorophylle dans les algues et les plantes. Les mitochondries et les chloroplastes ont leur propre ADN, et seraient issus de bactéries (cyanobactéries pour les chloroplastes et protéobactéries pour les mitochondries) qui se seraient « alliées », il y a 1,5 à 2 milliards d'années, avec des cellules pour finir par y vivre en symbiose. Cette hypothèse de l'endosymbiose a été proposée en 1967. Ainsi, les mitochondries et les chloroplastes sont synonymes d'énergie vitale tant pour les animaux que pour les végétaux. L'assemblage des deux confère apparemment des pouvoirs hors du commun aux porteurs de midichloriens.

Mais, même s'ils semblent présenter des propriétés symbiotiques identiques à celles des mitochondries ou des chloroplastes, les midichloriens sont, toujours selon la description de Maître Qui-Gon Jinn, des organismes et non des organites. Ils peuvent même être considérés comme des organismes pathogènes ou mutagènes à part entière. Dès lors, du point de vue microbiologique, les Jedis seraient des mutants contaminés, et une analyse de sang permet d'identifier le stade de contamination, voire le degré de contagiosité ! D'ailleurs, pour tester l'affinité du jeune Anakin avec la Force, Qui-Gon Jinn lui fait une prise de sang visant à déterminer la quantité de midichloriens présents dans son organisme. Le fait que la présence de midichloriens soit quantifiable semble leur donner une base scientifique.

Résultat : 20 000. En quelle unité ? On l'ignore... Est-ce le corps du jeune homme qui en contient cette quantité ? Est-ce seulement



la goutte de sang prélevée ? Quoi qu'il en soit, cette valeur (supérieure à celle de Maître Yoda !) est si élevée que le Conseil des Jedis se demande si le jeune héros, qui n'a aucun père biologique rappelons-le, n'aurait pas lui-même été créé par des midichloriens pour rétablir l'équilibre de la Force dans l'Univers. Cette vieille prophétie souvent citée dans *Star Wars* n'a bien sûr aucun sens en termes d'évolution : elle rappelle l'ancienne théorie de la « génération spontanée », selon laquelle des organismes vivants complexes pouvaient apparaître sans ascendant, simplement à partir de matière inanimée.

Admettons un instant qu'Anakin ait réellement été fabriqué par des midichloriens ; son cas serait intéressant à l'aune de la classification systématique du monde vivant : notre héros passerait du statut d'organisme pluricellulaire (un jeune humanoïde) à celui de superorganisme, colonie dont les individus hyperspécialisés seraient des midichloriens. Cette frontière entre organisme et superorganisme est parfois floue sur Terre : c'est, par exemple, le cas des siphonophores, groupe bien réel d'étranges cnidaires (des sortes de méduses), qui vivent en colonie et dont les tentacules peuvent atteindre 40 mètres de longueur. Aux plans morphologique et fonctionnel, chacune des parties d'un siphonophore est tellement spécialisée dans la réalisation de tâches variées (locomotion, reproduction,

2. CE MIDICHLORIEN observé au microscope révèle une double spirale volumineuse qui contient son information génétique. Sur cette vue d'artiste, la membrane lumineuse ainsi que les « particules d'énergie » (en vert) trahissent la Force qu'il véhicule.

nutrition, etc.) que certains se demandent même si ces animaux ne seraient pas plutôt des superorganismes...

Résistant aux conditions extrêmes

Ainsi, nous savons désormais que la Force est directement liée au nombre de midichloriens. Mais... Si les midichloriens confèrent la Force et se multiplient dans le sang, pourquoi une simple transfusion ne suffit-elle pas pour devenir un Jedi ?

Puisque les midichloriens sont présents partout dans l'Univers, « infectant » les Jedis de toutes espèces et de toutes planètes, ces organismes doivent être des extrémophiles, capables de résister au vide intergalactique. En cela, ils évoquent certaines bactéries, telles que *Serratia liquefaciens* ou *Escherichia coli*, qui colonisent nos intestins, et sont capables de résister en laboratoire aux conditions drastiques qui règnent sur Mars.

Autre solution : les midichloriens pourraient s'enkyster pendant des millénaires, formant des formes végétatives hibernant quasi éter-

nellement. Ils se propageraient dans l'espace avant de trouver l'âme sœur... Ils évoqueraient alors les tardigrades, ces pseudo-arthropodes minuscules, capables de tolérer le vide spatial et rentrant en léthargie lorsque les conditions de vie ne sont pas favorables.

Mais étant donné l'éventail très large des Jedis et de leurs mondes d'origine, on peut se demander d'où viennent les midichloriens qui pullulent ainsi dans l'Univers. Sont-ils transportés par des météorites, astéroïdes ou autres comètes, ceux-là même qui, selon l'hypothèse de la panspermie, auraient apporté sur Terre certains des acides aminés à l'origine de la vie ? En raison des distances qui séparent étoiles et planètes, et donc les Jedis dans une galaxie, la dissémination et la divergence des midichloriens auraient pu avoir lieu durant la « jeunesse » de l'Univers. Et si l'ancêtre commun à toute forme de vie, LUCA (*Last Universal Common Ancestor*), hypothétique organisme archaïque âgé de 3,6 à 4,1 milliards d'années, avait été un midichlorien ? G. Lucas, comme le sont parfois les auteurs de science-fiction, serait alors un visionnaire ! ■

J.-S. STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris. R. LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay.



Retrouvez les articles de J.-S. Steyer et R. Lehoucq sur www.pourlascience.fr

ART & SCIENCE

Piero della Francesca et les « piles d'assiettes »

Le peintre italien de la Renaissance a représenté dans un cycle de fresques des nuages lenticulaires empilés : ces météores traduisent la formation d'une onde stationnaire dans laquelle l'air monte et descend périodiquement.

Loïc MANGIN

Qu'ont en commun l'église Saint-Calixte de Pontpierre (Moselle), la chapelle des Incurables de l'hospice de Baugé (Maine-et-Loire), la paroisse copte orthodoxe de Sarcelles (Seine-Saint-Denis) et l'abbaye de Saint-Guilhem-le-Désert (Hérault) ? Tous ces établissements religieux revendiquent la possession d'un morceau de la croix sur laquelle Jésus aurait été crucifié. Ils ne sont pas les seuls et, selon un adage, avec tout le bois de la croix, dite Vraie Croix, « on aurait pu chauffer Rome pendant un an » !

L'histoire de cette relique connaît plusieurs versions. La plus connue est contenue dans la *Légende Dorée* de Jacques de Voragine (1228-1298), archevêque de Gênes et dominicain. On la retrouve sous la forme d'un cycle de fresques dans le chœur de la chapelle Bacci de la basilique Saint-François, à Arezzo, en Toscane. On doit cette *Légende de la Vraie Croix* au peintre et mathématicien italien Piero della Francesca (1412-1492) qui prit la suite de l'artiste Bicci di Lorenzo à sa mort en 1452, à la demande de la famille Bacci.

L'œuvre, achevée en 1466, reprend en 12 tableaux les péripéties du bout de bois sacré selon le récit de Voragine. En voici à grands traits l'histoire : à la mort d'Adam, son fils Seth sème dans sa bouche une graine dont sort un arbre. Sur ordre de Salomon, l'arbre est ensuite abattu et affecté à la construction d'un pont. Averti par la reine de Saba que ce bois serait lié à un destin funeste pour les Juifs, le roi

ordonne d'enfourer la poutre. Elle resurgit au moment de la crucifixion puis disparaît encore. Elle sera retrouvée au IV^e siècle par Hélène, la mère de Constantin, l'Empereur qui convertit les Romains au catholicisme, puis retrouvera sa place à Jérusalem, dans l'église du Saint-Sépulcre.

Dans la plupart des ciels représentés par Piero della Francesca, des nuages ont une forme inhabituelle. Il en est ainsi dans le troisième épisode (*voir la figure c*) où des hommes s'emploient à cacher le morceau de bois. Ces nuages ressemblent à des piles

L'immobilité et la forme des nuages lenticulaires expliqueraient certaines observations d'OVNI !

d'assiettes de différentes tailles et sont distincts des « moutons », des cumulus et des bandes parallèles de certains cirrus. Sont-ils le fruit de l'imagination du peintre ? Non, ils sont réalistes. Ces nuages sont des altocumulus lenticularis, aussi nommés nuages lenticulaires. Ils se forment près des montagnes, sous le vent, quand l'air prend de l'altitude pour passer l'obstacle. Lorsque les conditions sont stables, ce premier mouvement se traduit par l'apparition d'une onde stationnaire, dite orographique, en aval du relief.

Plus précisément, l'air qui s'est élevé pour passer au-dessus des montagnes redescend sous l'effet de son poids. Cependant, quand sa densité devient inférieure à celle de l'air

environnant, la poussée d'Archimède le fait remonter. Ces deux effets opposés, ajoutés au déplacement horizontal de l'air, impriment au mouvement une oscillation dont les sommets sont distants de cinq à dix kilomètres : c'est la période spatiale de l'onde stationnaire.

Aux différents maxima de l'oscillation, en altitude, la masse d'air s'étend, se refroidit (par détente adiabatique) et peut se saturer en eau : des nuages se créent et adoptent la forme d'une lentille, voire de plusieurs lentilles empilées. C'est le cas des nuages peints par della Francesca. D'autres formes de nuages liés à des ondes orographiques sont possibles, notamment les nuages en capuchon, au sommet d'une montagne, et les allées de tourbillons dits de von Karman (*voir les figures a et b*).

Étonnamment, les nuages lenticulaires semblent immobiles, même par grand vent. En fait, ils sont alimentés en permanence par le vent du côté de la montagne et disparaissent de l'autre côté. On observe alors un nuage stationnaire quand le vent est fort. Cette immobilité apparente, associée à la forme discoïdale, fait de ces nuages des explications possibles à certaines prétendues observations de soucoupes volantes !

Arezzo étant installée au pied des « Alpes de Catenai » , au Sud de la chaîne de l'Apennin septentrional, on peut imaginer que della Francesca a vu plusieurs de ces nuages lenticulaires. Les a-t-il trouvés particulièrement esthétiques au point d'en faire l'unique type de nuages dans les ciels de son cycle de fresques ? ■