que l'on veut. Tous les cas particuliers peuvent alors être englobés en choisissant une valeur appropriée de d. Il faut juste accepter que d devienne arbitrairement grand si α s'approche de 1. En termes précis, la conjecture *ABC* s'énonce ainsi :

Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $d_\varepsilon > 0$ tel que, pour tous entiers naturels A, B et C premiers entre eux et tels que $A + B = C$, on ait :

$$C \leq d_\varepsilon [\mathrm{Rad}(A \cdot B \cdot C)]^{1+\varepsilon}$$

Autrement dit, en prenant le logarithme :

$$\kappa(A,B,C) \leq 1 + \varepsilon + \frac{\log(d_\varepsilon)}{\log(\mathrm{Rad}(A \cdot B \cdot C))}$$

où le terme d'erreur $\log(d_\varepsilon)$ dépend de ε.

Pourquoi ne pas choisir α égal à 1, voire moins ? Parce que l'on connaît certains contre-exemples (notamment de la forme $(A,B,C) = (1, 2^{p(p-1)} - 1, 2^{p(p-1)})$, où p est un nombre impair tel que $2^{p(p-1)} - 1$ est divisible par p^2). Par ailleurs, peut-on trouver un ε pour lequel on peut prendre $d_\varepsilon = 1$, ce qui correspond à notre première version de la conjecture ? Bien sûr, on cherche $\alpha = 1 + \varepsilon$ qui soit le plus petit possible.

La plus grande valeur connue pour $\kappa(A,B,C)$ est 1,6299117. Elle correspond au triplet $(2, 3^{10} \cdot 109, 23^5)$, solution de l'équation $x^5 - 109\,y^{10} = 2$, trouvée par Éric Reyssat, aujourd'hui à l'Université de Caen. Ayant testé tous les nombres jusqu'à 10^{20}, nous savons qu'au moins dans cet intervalle immense, il n'existe pas de contre-exemple (pour $d_\varepsilon = 1$) à la conjecture *ABC* avec $\alpha = 2$ (qui correspond à $\varepsilon = 1$), c'est-à-dire $\kappa(A,B,C) \leq 2$.

À la recherche des bons triplets

Depuis que la conjecture *ABC* a été énoncée, elle a suscité une recherche intense de triplets nécessitant de grandes constantes α et d, c'est-à-dire pour lesquels $\kappa(A,B,C)$ est grand. Ces exemples resserrent l'intervalle pour le choix de ε et d_ε, mais il y a aussi une part de compétition dans cette recherche des triplets les plus riches. C'est à qui mettra au point l'algorithme le plus rapide et le plus performant. On peut en outre espérer découvrir des équations intéressantes.

On dit que (A,B,C) est un « bon triplet » si $\kappa(A,B,C) > 1{,}4$. Ces triplets sont extrêmement rares. Dans la tranche des entiers allant jusqu'à 10^{20}, presque entièrement explorée, il n'y en a qu'environ 200.

Sur le modèle des projets participatifs de recherche de signaux extraterrestres ou d'étude du repliement des protéines, le projet ABC@home invite tous les internautes à participer à la recherche d'autres bons triplets en donnant un peu de temps de calcul de leur ordinateur, ou même en développant leur propre algorithme.

Outre son intérêt intrinsèque, la démonstration de la conjecture *ABC* entraînerait celle de nombreux problèmes de la théorie des nombres. C'est le cas notamment du redoutable théorème de Fermat, dont la conjecture *ABC* apporte une preuve – du moins pour n assez grand – d'une simplicité dérisoire.

Dans l'équation $x^n + y^n = z^n$, posons $A = x^n$, $B = y^n$, $C = z^n$. On donne d'abord une borne supérieure grossière pour $\mathrm{Rad}(ABC)$:

$$\mathrm{Rad}(ABC) = \mathrm{Rad}(x^n y^n z^n)$$
$$= \mathrm{Rad}(xyz) \leq xyz < z^3.$$

Cela donne une borne inférieure pour $\kappa(A,B,C)$: $\kappa(A,B,C) = \log(C)/\log(\mathrm{Rad}(ABC)) \geq \log(z^n)/\log(z^3) = n/3$.

Cette dernière quantité tend vers l'infini pour des exposants n élevés. Si par exemple $\kappa(A,B,C)$ était borné par 2, on aurait ainsi démontré que l'équation de Fermat n'a pas de solutions pour $n \geq 6$. Le théorème de Fermat étant prouvé depuis longtemps pour des petits exposants, cela suffirait pour boucler sa démonstration.

La validité de la conjecture *ABC* apporterait des démonstrations faciles et élégantes à d'autres poids lourds de la théorie des

■ L'AUTEUR

Gerhard FREY est professeur à l'Institut de mathématiques expérimentales de l'Université Duisburg-Essen, en Allemagne.

Le logarithme

Le logarithme (décimal) d'un nombre strictement positif X est le nombre $\log X$ tel que $X = 10^{\log X}$. La fonction logarithme transforme un produit en somme : $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, et $\log(a^n) = n \log(a)$. Par ailleurs, $\log 1 = 0$. On peut choisir une autre base que la base 10. Pour la base e = 2,718..., le logarithme est dit népérien et est noté ln.

	$\kappa > 1$	$\kappa > 1{,}05$	$\kappa > 1{,}1$	$\kappa > 1{,}2$	$\kappa > 1{,}3$	$\kappa > 1{,}4$
$C < 10^2$	6	4	4	2	0	0
$C < 10^3$	31	17	14	8	3	1
$C < 10^4$	120	74	50	22	8	3
$C < 10^5$	418	240	152	51	13	6
$C < 10^6$	1 268	667	379	102	29	11
$C < 10^7$	3 499	669	856	210	60	17
$C < 10^8$	8 987	3 869	1 801	384	98	25
$C < 10^9$	22 316	8 742	3 693	706	144	34
$C < 10^{10}$	51 677	18 233	7 035	1 159	218	51
$C < 10^{11}$	116 978	37 612	13 266	1 947	327	64
$C < 10^{12}$	252 856	73 714	23 773	3 028	455	74
$C < 10^{13}$	528 275	139 762	41 438	4 519	599	84
$C < 10^{14}$	1 075 319	258 168	70 047	6 665	769	98
$C < 10^{15}$	2 131 671	463 446	115 041	9 497	998	112
$C < 10^{16}$	4 119 410	812 499	184 727	13 118	1 232	126
$C < 10^{17}$	7 801 334	1 396 909	290 965	17 890	1 530	143
$C < 10^{18}$	14 482 065	2 352 105	449 194	24 013	1 843	160

4. LA LISTE DES « BONS » TRIPLETS. Ce tableau présente le nombre de valeurs de C dans certains intervalles *(lignes)* pour lesquelles il existe A et B premiers entre eux, avec $A + B = C$, tels que la richesse $\kappa(A,B,C)$ soit supérieure à une borne donnée *(colonnes)*.

nombres. Il s'agit en général de problèmes diophantiens, du nom du mathématicien du IIIe siècle Diophante d'Alexandrie. Ces problèmes font intervenir des équations polynomiales à coefficients entiers, dont on cherche les solutions parmi les nombres entiers (on parle d'équations diophantiennes). Une démonstration de la conjecture *ABC* fournirait en particulier une solution simple aux problèmes suivants :

– La conjecture de Catalan, selon laquelle l'équation $x^m - y^n = 1$ n'a qu'une seule solution parmi les entiers naturels : $3^2 - 2^3 = 1$. Elle a été démontrée en 2002 par le mathématicien roumain Preda Mihăilescu.

– La conjecture de Mordell, démontrée en 1983 par Gerd Faltings, affirme que chaque courbe dont le « genre » est plus grand que 1, définie par une équation polynomiale à coefficients rationnels, ne peut contenir qu'un nombre fini de points dont les coordonnées sont rationnelles (le genre peut être vu comme le nombre de fois où il est possible de couper la courbe sans obtenir deux morceaux séparés). Noam Elkies, de l'Université Harvard, a démontré en 1991 que la conjecture de Mordell est une conséquence de la conjecture *ABC*. Si la conjecture *ABC* était valable dans sa version la plus forte, cela prouverait non seulement l'existence de ces points rationnels, mais donnerait aussi un procédé effectif pour les déterminer.

– Un grand nombre de généralisations de ces problèmes. La preuve de la conjecture *ABC* entraînerait par exemple celle que chaque égalité (dite de Fermat) $ax^n + by^n = cz^n$ pour $n \geq 4$ (et a, b, c entiers relatifs) n'a qu'un nombre fini de solutions. Il en est de même pour l'équation de Catalan-Fermat $x^n + y^m = z^k$, si les exposants sont « grands », c'est-à-dire si $1/n + 1/m + 1/k < 1$.

Il reste qu'à ce jour, la conjecture *ABC* n'est pas démontrée – du moins tant que les affirmations de S. Mochizuki n'ont pas été vérifiées. Pourquoi serait-elle vraie ? Et quels sont les résultats intermédiaires atteints à ce stade ?

Comme on l'a vu, de nombreuses données numériques soutiennent la validité de la conjecture, mais elles n'aident en rien à la prouver. En mathématiques, on cherche à obtenir des énoncés qui ne concernent pas seulement un comportement moyen, mais qui sont valables dans tous les cas. Or la difficulté de la conjecture *ABC* vient des nombres exceptionnels qui échappent à la statistique.

Des pistes ténues vers une démonstration

En utilisant des méthodes de ce qu'on appelle la théorie des nombres transcendants, Cameron Stewart, Robert Tijdeman et Kunrui Yu ont pu montrer que le taux de croissance de C en fonction de Rad(ABC) est au plus exponentiel. D'après la conjecture *ABC*, cette croissance est polynomiale, avec un exposant égal au plus à 2 ou $1 + \varepsilon$, suivant la version de la conjecture. On sait donc au moins que la croissance de C n'est pas illimitée, mais cela est insuffisant pour des grandes valeurs de C. Et il semble hors de portée de gravir, avec les méthodes utilisées, la marche séparant la croissance exponentielle de la croissance polynomiale.

Une autre approche emprunte un chemin *a priori* paradoxal. En généralisant la conjecture *ABC*, donc en la rendant en quelque sorte plus difficile, on a l'espoir de faciliter la démonstration. La généralisation consiste à remplacer les nombres naturels usuels par des structures abstraites plus compliquées. Les propriétés des entiers naturels utilisées dans la conjecture sont la structure additive, la structure multiplicative et l'ordre total : deux entiers peuvent toujours être comparés, au sens que l'un est forcément plus petit ou égal à l'autre. Ces trois propriétés se retrouvent dans beaucoup d'autres structures mathématiques, par exemple :

– Les nombres rationnels, c'est-à-dire les fractions de la forme r/s, où r et s sont des entiers relatifs. On utilise l'addition et la multiplication usuelles, mais au lieu de l'ordre habituel, on ordonne ici les rationnels par leur « hauteur », c'est-à-dire le maximum entre le numérateur et le dénominateur de la fraction sous forme réduite (sans tenir compte du signe). La hauteur est en quelque sorte une mesure de la complexité d'un nombre rationnel.

– Les polynômes, c'est-à-dire des sommes de produits de puissances des variables et de constantes. L'ordre est donné par le degré du polynôme, la plus élevée des sommes des exposants d'un terme du polynôme.

– Les fonctions rationnelles, c'est-à-dire les fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.

– Les extensions algébriques des nombres rationnels (corps de nombres algébriques) et des fonctions rationnelles (corps de fonctions algébriques).

Il est possible de transposer la conjecture *ABC* pour ces structures ; le contexte devient ainsi plus clair. R. Mason et W. Stothers ont prouvé l'équivalent de la conjecture *ABC* pour les polynômes par des méthodes élémentaires en 1981, avant que la conjecture sur les entiers n'ait été énoncée. Et dans le cadre général des corps de fonctions, la relation avec les courbes elliptiques, qui avaient déjà joué un grand rôle dans la preuve du théorème de Fermat, devient évidente.

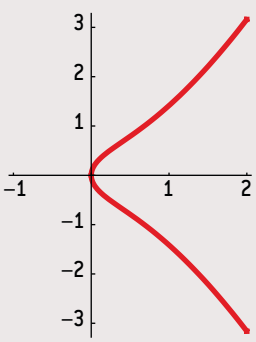
Considérons une courbe elliptique E. On peut définir trois nombres qui la caractérisent : son invariant modulaire, noté j_E, son discriminant, noté Δ_E, et sa hauteur, notée h_E *(voir l'encadré ci-contre)*. Le comportement de la courbe E est décrit par le radical du discriminant, aussi appelé conducteur de la courbe.

Lucien Szpiro, de l'Université de New York, a conjecturé qu'il existe un nombre k tel que pour toute courbe elliptique E, $\delta(|\Delta_E|) \leq k$ (la puissance moyenne du discriminant est bornée). Il est remarquable que L. Szpiro ait observé ce comportement dans le cas des corps de fonctions, et ait formulé un analogue pour le cas des corps de nombres.

Un lien intime avec les courbes elliptiques

Une courbe elliptique E *(ci-contre un exemple)* est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) solutions d'une équation de la forme $y^2 = x^3 + ax + b$, où a et b sont des entiers tels que le « discriminant » $\Delta_E = 4a^3 - 27b^2$ soit non nul (cela garantit que la courbe n'ait pas de points singuliers).

On peut définir une hauteur de Faltings h_E pour une courbe elliptique E. Lorsque la courbe est « semi-stable », h_E est reliée à la hauteur du nombre $j_E = 12^3 \cdot 4a^3/\Delta_E$, nommé invariant modulaire.



La « conjecture sur la hauteur des courbes elliptiques », formulée par l'auteur, énonce que la hauteur h_E est bornée par une quantité qui dépend du radical du discriminant Δ_E ($h_E \leq k \log \mathrm{Rad}(|\Delta_E|)$). La conjecture *ABC* découle de celle sur les hauteurs.

L. Szpiro a prouvé cette conjecture dans le cas des corps de fonctions (pour $k = 6$), si bien que la version forte de la conjecture *ABC* est vraie pour ces corps (ce qui généralise le résultat de R. Mason et W. Stothers). Cela justifie l'espoir que la conjecture soit valable pour les nombres rationnels qui, du point de vue arithmétique, sont assez semblables aux fonctions rationnelles.

J'ai généralisé la conjecture de L. Szpiro en affirmant que la hauteur h_E est bornée par un multiple de log Rad($|\Delta_E|$). J'ai ensuite prouvé que cette « conjecture sur la hauteur des courbes elliptiques » entraîne la conjecture *ABC*. Ces deux dernières sont même équivalentes dans le cadre des fonctions rationnelles.

En exploitant la très riche théorie des courbes elliptiques, développée depuis plus de 200 ans, notamment en utilisant des résultats qui ont conduit G. Faltings à la preuve de la conjecture de Mordell, j'ai ainsi trouvé une borne – malheureusement toujours exponentielle – de *C* en fonction de Rad(*ABC*).

Mais on a fait encore mieux. Par sa relation avec l'arithmétique des courbes elliptiques, la conjecture *ABC* s'intègre à la géométrie algébrique. Cette branche des mathématiques, qui donne une interprétation géométrique à des problèmes de la théorie des nombres et apporte ainsi des éclaircissements surprenants, a été révolutionnée dans les années 1960 par le mathématicien Alexandre Grothendieck.

D'après moi, la conjecture sur la hauteur des courbes elliptiques n'est pas seulement un énoncé profond sur ces objets en question, mais aussi l'arrière-plan structurel recherché pour la conjecture *ABC*. Et pour J. Oesterlé, la motivation essentielle de la conjecture *ABC* était son rapport avec l'arithmétique des courbes elliptiques.

La conjecture sur la hauteur des courbes elliptiques étant vraie pour le corps des fonctions rationnelles, la conjecture *ABC* l'est aussi pour ce corps. Ma démonstration en est simple et courte, mais on ne peut malheureusement pas la transposer du monde géométrique vers celui des nombres. En revanche, la démonstration initiale de L. Szpiro, bien plus compliquée, fournit une ébauche d'une telle transposition.

Cette preuve tire parti de l'arithmétique des surfaces algébriques, bien étudiées en géométrie algébrique. Il existe un analogue à ces surfaces dans le monde des nombres, appelé « surfaces arithmétiques ». Ces objets jouent un rôle clef dans la démonstration de la conjecture de Mordell, et les propriétés des surfaces arithmétiques qui permettraient de prouver la conjecture sur la hauteur des courbes elliptiques sont bien identifiées. Nous sommes cependant loin d'avoir trouvé ces propriétés...

Les travaux de S. Mochizuki ont-ils changé la donne ? Expert reconnu dans le domaine des surfaces arithmétiques, S. Mochizuki a prouvé des résultats difficiles sur la relation entre les « groupes fondamentaux au sens de Grothendieck » et les surfaces. Derrière ces termes et ces résultats se cachent encore des idées profondes de A. Grothendieck reliant la théorie de Galois à l'arithmétique. De nombreux spécialistes de la théorie des nombres se sont attelés à la vérification des travaux de S. Mochizuki, qui occupent des centaines de pages et qui utilisent des objets et méthodes mathématiques peu classiques. En attendant leur verdict, la conjecture *ABC* reste non démontrée.

On est au moins sûr d'une chose. La conjecture *ABC* n'est pas une bizarrerie gratuite de la théorie des nombres. Elle a de vastes conséquences et découle elle-même d'autres conjectures, dont il y a de bonnes raisons de penser qu'elles sont vraies. La relation entre théorie des nombres et géométrie qui sert de fondation depuis 50 ans à la géométrie algébrique serait mise à rude épreuve si la conjecture *ABC* était fausse. Il est difficile de l'imaginer. ■

Winfried Scharlau

5. ALEXANDRE GROTHENDIECK ***(ici au Vietnam en 1967)*** **a refondé dans les années 1960 la géométrie algébrique. Né en 1928, ce fils d'un anarchiste russe a découvert très jeune des résultats révolutionnaires, malgré une formation sommaire. En 1970, notamment par conviction antimilitariste, il quitte l'Institut des hautes études scientifiques, près de Paris. Depuis 1991, il vit retiré du monde dans les Pyrénées.**

■ BIBLIOGRAPHIE

S. Mochizuki, **Inter-universal Teichmuller theory I : Construction of Hodge theatres**, 2012. Prépublication : www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ffmotizuki/Inter-universal/Teichmuller/Theory/I.pdf

G. Frey, **Der Beweis des Fermatschen Theorems**, *Moderne Mathematik*, pp. 166-175, Spektrum Akademischer Verlag, 1996.

G. Frey, **Links between solutions of A – B = C and elliptic curves,** *Number Theory - Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1380, pp. 31-62, Springer, 1989.

J. Oesterlé, **Nouvelles approches du théorème de Fermat**, *Séminaire Bourbaki*, exposé 694, 1987-88.

F. Beukers, **Introduction to the ABC conjecture**, conférence donnée le 9 septembre 2005 : www.math.leidenuniv.nl/ffdesmit/ic/abc/fritsABCpresentation.pdf

La liste des bons triplets : www.rekenmeemetabc.nl/?item=h_stats.

Projet de calcul collaboratif des bons triplets : www.abcathome.com

Les LED blanches

L'éclairage

Les lampes à diodes électroluminescentes blanches sont appelées à remplacer les ampoules à incandescence. Elles offrent une bonne qualité de lumière et autorisent d'importantes économies d'énergie.

D'autres lampes à incandescence, ingénieusement combinées, sont exposées dans des salles voisines de celles de M. Edison mais aucune ne donne sa lumière douce et pure, sa clarté fixe, et n'est rattachée à aucun système d'installation véritablement pratique.

Disons-le, dans l'intérêt de la vérité, du progrès, du bien-être général, le système de M. Edison constitue une complète révolution dans l'éclairage domestique ; il est appelé à remplacer dans un temps très rapproché tous les systèmes en usage.

Le Journal des débats, 1881

Lors de l'Exposition internationale d'électricité, à Paris, en 1881, Thomas Edison fit la démonstration de ses lampes à incandescence. L'extrait du *Journal des débats* ci-dessus décrit les qualités de ce système novateur qui se généralisa à l'éclairage public et domestique. Edison se lança dans le développement des ampoules électriques dès 1879. Il perfectionna le modèle de l'Anglais Joseph Swan. Les premières lampes étaient constituées d'un filament de carbone, obtenu à partir d'une fibre de bambou du Japon, et placé dans une ampoule sous vide. Après avoir testé environ 6 000 substances végétales, le choix d'Edison se porta sur le bambou pour sa flexibilité. La durée de vie des premières lampes était de 45 heures. Puis Lewis Latimer, ingénieur de la *Edison Company*, perfectionna la fabrication des lampes pour prolonger leur temps d'utilisation.

En 1898, Carl Auer von Welsbach remplaça le filament de carbone par un filament métallique pour obtenir les lampes à incandescence modernes, dont la durée de vie atteint aujourd'hui entre 1 000 et 2 000 heures. Bien qu'omniprésentes au XX^{e} siècle, ces lampes ne sont plus autorisées à la vente au sein de l'Union européenne depuis septembre 2012, car leur rendement énergétique est catastrophique : seulement cinq pour cent de l'énergie électrique sont convertis en lumière visible. Ces lampes ont néanmoins l'avantage de produire une lumière blanche chaude très proche de la lumière du jour.

Quel type d'éclairage peut remplacer la lampe à incandescence et satisfaire les contraintes d'une lumière agréable, une longue durée de vie et une faible consommation ? La question est un enjeu économique important, car l'éclairage représente plus de 10 pour cent de la consommation d'électricité en France. Dans les grandes villes, ce chiffre peut même dépasser 30 pour cent.

De nombreux systèmes d'éclairage alternatifs ont été développés au cours du XX^{e} siècle. Il en est ainsi des lampes à décharge, qui produisent de la lumière par excitation d'un gaz sous l'effet d'un arc électrique. Différents gaz sont utilisés, tels le néon ou le sodium. Ces derniers sont souvent utilisés dans l'éclairage public, mais donnent des lumières de mauvaise qualité, très loin du spectre solaire, dans des tons orangés pour les lampes à sodium mélangé à du néon.

Les lampes fluorescentes appartiennent à la famille des lampes à décharge, mais la paroi interne est recouverte d'un revêtement fluorescent. Le fonctionnement de ces dispositifs repose aujourd'hui sur l'excitation de vapeur de mercure contenue dans une atmosphère d'argon. Après excitation, les atomes de mercure reviennent à leur état fondamental en émettant un rayonnement ultraviolet, qui est absorbé par des matériaux fluorescents recouvrant les parois du tube, matériaux qui réémettent de la lumière à différentes longueurs d'onde pour